Matematik som teoretiskt arbete - utveckling av matematiska modeller för rationella tal i åk 4

H Eriksson & I Eriksson

Sammanfattning

Undervisning om rationella tal på mellanstadiet är ett erkänt svårt område. Eleverna har till exempel svårt att förstå att tal i bråkform och decimaltal kan representera samma värde eller att tal i bråkform har en bestämd plats på tallinjen, det vill säga att de är tal. I den här artikeln diskuteras och exemplifieras hur elever kan engageras i ett teoretiskt utforskande av tal i blandad form. Grunden för elevernas utforskande bestod i situationer där eleverna fick göra jämförelser av trästavar som inte gick jämt upp - det saknades ”en liten bit”. Utifrån dessa jämförelser kunde eleverna i gemensamma diskussioner skapa en generell modell för tal i blandad form, det vill säga en modell som också kunde beskriva mätningar som inte gick jämnt upp. Analysen visar bland annat att arbetet med modellen gjorde det möjligt för eleverna att diskutera heltalsdelar i förhållande till bråkdelar i tal i blandad form. Artikeln bygger på data från en serie Learning studies som genomfördes i en årskurs 4 på en interkulturell skola under 2012 – 2013.

Nyckelord: rationella tal, matematiska modeller, lärandeverksamhet/Learning activity, Davydovs matematiska program

Helena Eriksson är kommunal lektor i matematikämnets didaktik. Hon är också projektledare för ”Matematik på lågstadiet genom problemlösning och algebra” samt specialpedagog i grundskolan i Borlänge kommun.

Inger Eriksson är professor i pedagogik vid Stockholms universitet, verksam vid Institutionen för de humanistiska och samhällsvetenskapliga ämnenas didaktik, Stockholm Teaching & Learning Studies samt forskarskolan i Learning study.

Abstract

The teaching of rational numbers to young students (grade 4-6) is known to be difficult. It is for instance difficult for students to understand that fractions and decimal numbers may represent the same value, or that fraction has a specific place on the number line, i.e. that it is a number among other numbers. The purpose of this article is to discuss and exemplify how students can be involved in a theoretical exploration of fractions as numbers. The basis of the students' exploration was a designed situation where they were to make measurements of wooden rods where the measurements did not make an equal, i.e. "a little bit" was missing. With these measurements students in joint discussions were able to design a general model for fractions. Such a model could be used as a tool in discussions of "the whole" and "its parts" in fractions. The article is based on data from a series of Learning studies conducted in a grade 4 in an intercultural school in 2012-2013.

Keywords: Davydov's mathematical program, rational numbers, learning activity, mathematical models

Introduktion

I den västerländska matematikundervisningen är det vanligt att elever arbetar med rationella tal, det vill säga tal i bråkform och decimaltal, utifrån vardagliga situationer. Det kan exempelvis handla om att tal i decimalform ska omvandlas mellan olika enheter, såsom exempelvis omvandling från cm till m, eller att tal i bråkform ska urskiljas som delar av helheter eller delar av olika antal (jfr. McIntosh, 2008). Ett stort antal studier som sträcker sig över flera årtionden beskriver svårigheter och missuppfattningar som kan kopplas samman med denna traditionella undervisning (Ball, 1993; Erlwanger, 1973; Hart, 1981; Hiebert & Waerne, 1986; Kieren, 1988; Lamon, 2005; Mack, 1993; Niemi, 1996; Steffe & Olive, 2010). McIntosh sammanfattar ett flertal andra studier med att många elever kan få svårt att se tal i bråkform och tal i decimalform som representationer av samma värden, samt att elever även kan ha svårigheter med respektive representationsform. McIntosh skriver också att elevernas förståelse av decimalerna i ett tal i decimalform kan utvecklas med stöd av tal i bråkform. Exempelvis kan 0,1 förstås som 1/10 och 0,01 kan förstås som 1/100. Bristande förståelse för tal i bråkform minskar alltså möjligheten att förstå tal i decimalform med stöd av tal i decimalform. Vanliga svårigheter i arbetet med tal i bråkform som McIntosh beskriver är exempelvis att elever kan ha svårt att se innebörden i delarna respektive innebörden i helheten vid arbete med delar av en helhet eller delar av ett antal. Det finns således grund för att fundera över vad som krävs av undervisningen för att ge elever möjlighet att utveckla en mera adekvat matematisk förståelse av rationella tal än vad dagens undervisning uppenbarligen förmår.

Alternativa undervisningsmodeller

Mot bakgrund av dokumenterade svårigheter för elever att utveckla förtrogenhet med rationella tal har flera forskare inom det matematikdidaktiska fältet prövat alternativa undervisningsmodeller. Exempelvis beskriver Brousseau (1997) en undervisning där man designat en specifik matematikdidaktisk miljö i form av till exempel en tävling där eleverna skulle gissa ett hemligt tal (ett rationellt tal). Eleverna fick diskutera mellan vilka tal det hemliga talet fanns och kunde med gemensamma ansträngningar närma sig det rationella talet. Ytterligare ett alternativt sätt att arbeta med rationella tal presenteras i en artikel skriven av Davydov och TSvetkovich (1991) utifrån ett matematikdidaktiskt program utvecklat av Daniil Elkonin och Vasili Davydov. Detta program är utvecklat med rötter i Vygotskijs kulturhistoriska skola. Kortfattat innebär det att programmet har ett teoretiskt grundantagande om nödvändigheten av att eleverna introduceras till tal och olika talområden på en principiell och abstrakt eller generell grund (Davydov, 2008). När det gäller rationella tal innebär det att eleverna behöver utforska vad rationella tal representerar för typ av tal, dess matematiska funktion och hur de är konstruerade. Vidare inbegriper detta att man kan se på tal i bråkform som tal, det vill säga att se att rationella tal finns mellan de hela talen på en tallinje och att de har ett bestämt värde, och att rationella tal kan representeras med olika symboler (Davydov, 2008). Utifrån genomgången av dessa tidigare studier finns det anledning att fundera över vad som krävs av undervisningen för att ge elever möjlighet att utveckla en mer adekvat matematisk förståelse av rationella tal än vad dagens undervisning tycks göra. Genomgången av tidigare forskning väcker ett antal frågor som diskuteras i denna artikel: Vad innebär det i en svensk matematikundervisning att eleverna utforskar rationella tal utifrån en principiell och abstrakt eller generell grund? Vad krävs av uppgifterna? Vad krävs av sammanhanget där uppgifter tas i bruk?

Lärandeverksamhet

I den serie av Learning studies som artikeln bygger på användes det som i dag kallas för Davydovs matematiska program samt begreppet lärandeverksamhet (se Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2012; Repkin, 2003). Davydovs program bygger på Vygotskys (1986) idéer om att skolan måste ta ett speciellt ansvar för att eleverna ska utveckla teoretiskt tänkande. Förenklat kan det uttryckas som att undervisningen ska ge eleverna möjlighet att engagera sig i ett teoretiskt arbete som gör det möjligt för dem att rekonstruera kunskaper som historiskt har utvecklats i vissa specifika sammanhang för att kunna omtolka och använda dem i andra specifika sammanhang (Davydov, 2008).

Davydovs matematiska program, som är utvecklat i samarbete med lärare och elever på experimentskolan Skola Nr 91 i Moskva, innefattar ett specifikt sätt att introducera matematik för yngre elever. Programmet omfattar både en innehållslig dimension för det kunnande som eleverna förväntas lära sig, och en idé om undervisningspraktiken (Davydov, 2008). Utifrån Vygotskys och Leontievs arbete innehåller programmet en didaktisk teori för hur elever och lärare kan arbeta tillsammans för att bemästra teoretiska matematiska redskap och praktiker. Denna didaktiska teori går under beteckningen learning activity som på svenska kan översättas till lärandeverksamhet (Adolfsson Boman m.fl, 2013; Eriksson & Jansson, 2016; Kinard & Kozulin, 2012). Detta innebär ett antagande om att ett kunnande inte kan förstås frikopplat från den verksamhet innehållet är en del av och *att man inte kan bli teoretiskt kunnig utan att vara delaktig i ett teoretiskt arbete*. Detta innebär att såväl innehållet som undervisningens utformning är av betydelse för elevernas kunskapsutveckling.

Lärandeverksamhet som didaktisk teori bygger på ett antagande att undervisningen behöver arrangeras på ett sådant sätt att eleverna kan uppleva ett behov av att gå in i ett utforskande eller problemlösande (teoretiskt) arbete. Eleverna behöver således utveckla ett motiv för att engagera sig i ett arbete där resultatet kan beskrivas som en förändring av deras aktuella förmågor och uppfattningar till ett mera kvalificerat och specificerat kunnande.

I en lärandeverksamhet är det inte möjligt för eleverna att utveckla motiv frikopplat från personligt upplevda behov. En lärandeverksamhet kan således endast etableras i de fall eleverna kan identifiera problem som de finner värda att försöka lösa. I ett första skede kan eleverna pröva att lösa problemet med redan kända redskap men idén är att problemet i grunden ska vara av ett sådant slag att eleverna upplever att redan kända redskap inte fullt ut räcker till. Om detta lyckas kan eleverna utforma det Davydov kallar för en learning task (lärandeuppgift). Det är i utformandet av en lärandeuppgift som också personliga behov och motiv kan utvecklas och först då kan eleverna ta sig an uppgiften att försöka utarbeta alternativa förslag till lösningar.

Utveckling av en gemensam matematisk modell

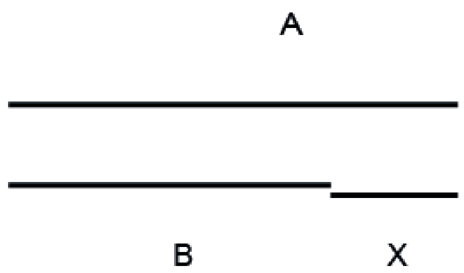
Idealt ska elevernas arbete leda fram till en ny modell som kan fungera för att lösa tt problem. Det sista steget i en lärandeverksamhet handlar om att reflektera över och värdera modellen de utvecklat (se även Zuckerman, 2004). För att en lärandeverksamhet ska kunna etableras krävs således matematiskt dynamiska problem där det önskade teoretiska kunnandet potentiellt finns inbyggt och som eleverna kan omvandla till lärandeuppgifter (Davydov, 2008). Inom lärandeverksamhet ses alltså elevernas deltagande i utvecklingen av modeller som avgörande för utvecklingen av teoretiska begrepp. Detta innebär att läraren kan planera för en lärandeverksamhet men hen kan inte garantera att den tar form (Davydov, 1990, 2008; Schmittau, 2003; Schmittau & Morris, 2004).

Det är utvecklingen av (matematiska) modeller som utgör grunden för det teoretiska arbetet. Modellerna utvecklas i gemensamma diskussioner med hjälp av olika ämnesspecifika redskap, såsom jämförelser, symboler och tallinjer (Kozulin, 2003). Roth och Hwang (2006) samt Zuckerman (2004) argumenterar med hjälp av lektionsexempel hur modeller som synliggör teoretiskt kunnande bör utvecklas i växelverkan mellan teoretiska och empiriska begrepp. Davydov beskriver modeller som att de "copies the structure of the object" (Davydov, 2008. s. 95). Van Dijk, van Oers, Terwel och van den Eeden (2003) uttrycker att modellerna kan ses som en bro mellan det teoretiskt abstrakta och det konkret empiriska. En modell för ett rationellt tal behöver exempelvis synliggöra att de består av dels en heltalsdel och dels en bråkdel, vilket i sin tur synliggör att det rationella talet finns mellan två hela tal.

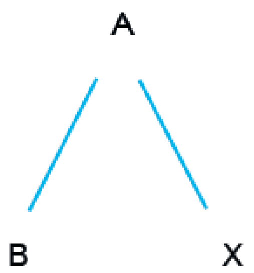
En lärandeverksamhet som handlar om taluppfattning kan med utgångspunkt i

Davydovs och TSvetkovich (1991) studie, handla om att eleverna inbjuds att arbeta med jämförelser av olika kvantiteter. Jämförelserna ska representeras matematiskt. Kvantiteterna kan exempelvis bestå av längder, volymer, vikter eller antal. Eleverna utformar arbetet som lärandeuppgifter genom att diskutera jämförelserna i relation till olika matematikspecifika redskap såsom modeller och tallinjer. För de yngsta eleverna utgör representationerna av jämförelserna alltid ett heltal. När eleverna senare börjar arbeta med ett utvidgat talområde kräver motsvarande jämförelser representationer med rationella tal. På detta sätt kan de naturliga och rationella talen introduceras utifrån samma principer. Enligt Davydov och TSvetkovich är det en nödvändighet att olika talområden introduceras utifrån samma principer, för att synliggöra hur talområdena hänger samman.

I de första uppgifterna eleverna möter kan en helhet *A* jämförs med exempelvis delarna *X* och *B*, se figur 1 och 2.

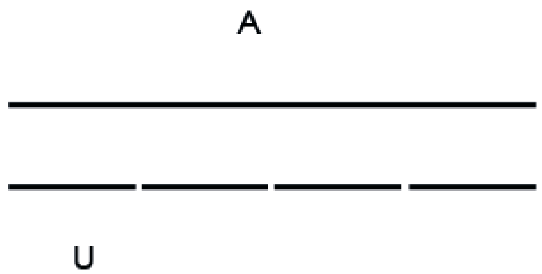


Figur 1. *Jämförelsen A = B + X.*



Figur 2. *Modellen A = B + X.*

I figur 1 jämförs de olika längderna och det blir synligt att $A = B + X$. I samma figur blir det också synligt att B kan uttryckas som $B = A - X$ och att X kan uttryckas som $X = A - B$. I figur 2 gestaltas samma additiva relation, det vill säga $A = B + X$, men utan längder. I ett fortsatt arbete uttrycks A med endast en annan mätenhet, exempelvis med en mätenhet som är U lång.



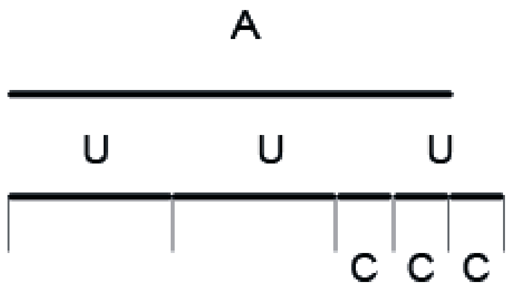
Figur 3. *Jämförelsen A = xU.*

I figur 3 kan längden A jämföras med ett helt antal längder U. Sambandet mellan A och U kan därför anges med uttrycket $A = xU$, där x utgörs av det antal längder U som behövs för att jämföra med A. Jämförelsen där en och samma stav används som mätenhet visar på ett multiplikativt förhållande mellan A och U enligt modellen i figur 4 (Davydov, 2008).

Figur 4. *Modell för A = x U.*[1]

I Davydovs arbeten utgör antalet *U* alltid ett heltal för de yngsta eleverna. Jämförelserna eleverna arbetar med kommer med tiden att resultera i mätresultat som måste anges med rationella tal. Davydov och TSvetkovich utvecklade en modell för tal i blandad form som anger *A* uttryckt med *U* enligt *A* = *xU* + *'rem'*, där *A* är den längd som mäts, *U* är mätenheten och *'rem'* motsvarar resten för att mäta hela sträckan.

Den här modellen vidareutvecklades till *A* = *xU* + *(mC/nC)U*, där *mC/nC* anger hur stor del av mätenheten *U* som behövs tillssammans med det hela antalet *U* för att ange *A*. I modellen som utvecklades synliggjordes de två multiplikativa förhållandena som finns, dels inom bråkdelen av talet genom *m/n*, dels mellan mätenheten *U* och objektet som ska mätas genom *xU*. Ett additivt förhållande blir synligt i additionen av de två termerna som utgörs av heltalsdelen respektive bråkdelen. Modellen presenteras i figur 5.



Figur 5. *En schematisk bild av A = xU + (mC/nC)U, där x är antalet hela U, m är det antal C som behövs för att jämförelsen ska bli exakt A och n är totala antalet C som U delas i.*

Material och metod

Artikeln bygger som nämnts på en serie Learning studies som genomfördes (2012 och 2013) i årskurs 4 med totalt 76 elever. Skolan där studierna genomfördes kan beskrivas som en interkulturell skola med flera språk representerade. En del av eleverna var relativt nyanlända och hade därmed inte speciellt goda kunskaper i svenska.

I de lektioner som utgör datamaterialet för denna artikel fick eleverna inledningsvis arbeta med jämförelser som kunde beskrivas med endast hela tal (jfr figur 1 och 2 ovan). I en uppföljande uppgift fick eleverna konstruera egna jämförelser. Samtliga elever råkade då ut för att dessa jämförelser inte kunde anges med endast ett heltal. Med utgångspunkt i elevernas egenkonstruerade jämförelser kunde eleverna identi-

1 Den här modellen utgör även grunden för att utveckla förståelse för multiplikation (jfr Zuckerman, 2007)

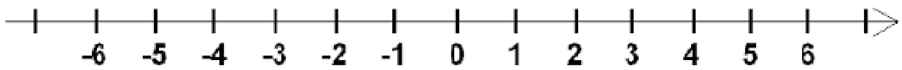
fiera att mätenheten inte gick jämt upp med den stav de jämförde. En lärandeuppgift utformades där elever och lärare gemensamt kom fram till att mätresultatet måste anges som ett rationellt tal (jfr Davydov & TSvetkovich, 1991).

Lärandeuppgiften fortsatte med att eleverna jämförde längden av en svart cuisenairestav med längden av olika andra cuisenairestavar. De olika andra stavarna utgjorde olika mätenheter i de olika jämförelserna. Resultatet för alla fortsatta jämförelser var tvunget att anges med en heltalsdel och en bråkdel i enlighet med Davydov och TSvetkovich modell i figur 5 ovan.

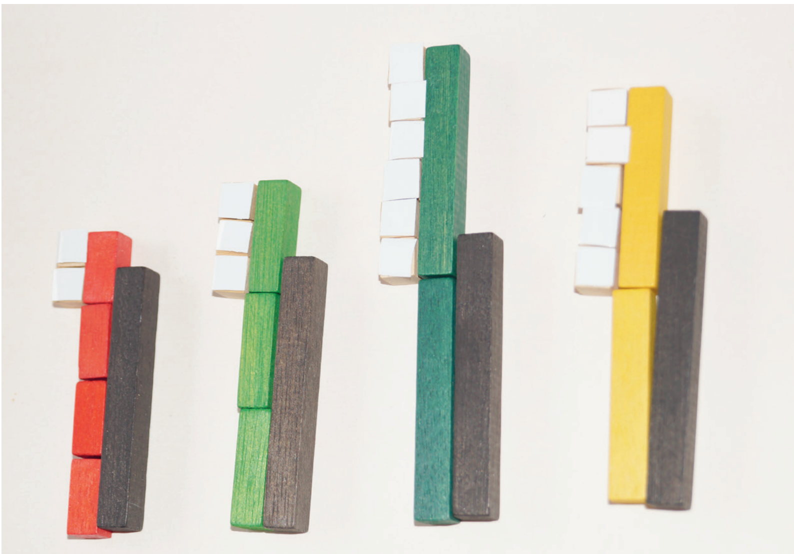
När lärarna designade de fortsatta jämförelserna tog de stöd av variationsteorins tanke om variationsmönster (Marton, 2014). Först varierade nämnaren i bråkdelen och därefter varierade täljaren. Designen tog även hänsyn till resultaten från Morris (2000) samt Kullberg och Runesson (2013) som visar att stambråk på formen *1/n* är lättare för eleverna att arbeta med, än bråk av formen *m(1/n)* det vill säga *m/n*.

Alla jämförelser eleverna arbetade med presenterades såsom exemplet med uppgift 1 i figur 6 här nedan.

Uppgift 1: Mät den svarta staven med röda stavar. Redovisa resultatet. Markera talet på tallinjen.



Figur 6. *Uppgiftsdesignen.*



Figur 7. *Bilden visar de stavar eleverna använde för att jämföra och redovisa uppgifterna. I uppgift 1 mäts den svarta staven med de kortare röda stavarna, 4st i figuren. I jämförelsen blir det synligt att ett helt antal av de röda stavarna inte går jämt upp med den svarta staven.*

Jämförelsen i exemplet i figur 6 redovisades genom att den svarta staven angavs med tre och en halv röd stav (se figur 7). Detta mätresultat kunde noteras som tal i decimalform *Svart = 3,5 röda*, tal i blandad form *Svart = 3 1/2 röda*, eller enligt den generella modellen för rationella tal $S = x + (m/n)$ såsom *Svart = 3 röda + 1/2 röd*.

I uppgift 2 var mätenheten en ljusgrön stav. Mätresultatet i uppgift 2 var två hela och en tredjedel. Syftet med jämförelserna i uppgift 2 var att påvisa nödvändigheten med tal i bråkform, eftersom 2 + 1/3 inte kan anges som ett exakt värde i decimalform.

I uppgift 3 utgjordes täljaren fortfarande av 1, medan nämnaren bestod av sjättedelar. Syftet med uppgiften var att diskutera att nämnaren v kunde utgöras av olika numeriska värden.

I uppgift 4 förändrades det numeriska värdet på täljaren. I den uppgiften behövdes det två små enheter för att genomföra jämförelsen mellan svarta och gula stavar. Syftet med denna fjärde uppgift var att eleverna skulle försättas i en situation där de fick uppleva att det behövdes mer än en liten enhet för att mätenheten skulle gå jämt upp i staven som mättes.

Resultat

Resultatet är disponerat i sju underrubriker som utgör exempel på kunnande som kom till uttryck under lektionerna då modellen för tal i blandad form utvecklades. De handlingar som tog form i arbetet med modellerna utgör grunden till de olika rubrikerna.

Helheter i förhållande till delar

Arbetet under lektionerna med att utveckla en modell för tal i blandad form utgick alltså från jämförelser av olika längder. När eleverna inledningsvis skulle designa egna jämförelser hamnade de i svårigheter när längderna de jämförde inte kunde göras lika långa.

Eleverna uttryckte att den mätenhet som det inte behövdes hela av, var tvungen att anges på något sätt de fortfarande inte kände till, och att de var i behov av att lära sig något nytt för att beskriva jämförelserna.

> Aisha: Det är något vi inte kan…något ni måste lära oss… […] Den här är ju liksom inte hela… den är ju bara en bit.

Bayar diskuterade hur längderna kunde användas respektive inte användas för att uttrycka en svart längd.

> Bayar: Det är tre och en halva. Det är tre stycken såna dära röda (pekar mot jämförelsen som finns på tavlan) och sen var det en röd som var längre. Sen om du skulle lägga till svarta så skulle det vara längre än en svart. Men om man la halva skulle man vara lika.

Dana uttrycker att det är den svarta längden de ska beskriva.

> Läraren: Nu måste vi hålla ordning här. … Vad är det vi håller på med?

Dana: Vi ska få till den svarta.

[Läraren skriver Svart = H hela + en liten bit till på tavlan.]

[…]

Dana: Vi kan kanske mäta? Vi måste väl mäta den röda, och ”den lilla biten” som är kvar?

Läraren stöttar eleverna med frågan ”Vad är det vi håller på med?” i samtalet här ovan. Med stöd av den frågan kunde Dana reflektera över att det är den svarta längden som ska beskrivas som en helhet.

Läraren stöttar även genom att skriva *Svart = H hela + 'en liten bit till'* på tavlan. Genom att skriva 'en liten bit till' i modellen på tavlan leder läraren in samtalet på att även mätenheten behöver delas i mindre delar.

Uttrycket 'en liten bit till' togs i bruk för att beskriva att mätenheten, som i sig är en del av den hela längden, var tvungen att delas i mindre delar, som en egen helhet, för att redovisa ett resultat för jämförelserna. Dana reflekterar vidare över att de kan behöva mäta även den röda längden, för att veta vad ”som är kvar”.

Att modellen innehåller tre olika helheter diskuterades i samband med att de identifierade vad de hade för problem att lösa. Läraren och eleverna diskuterade längden de skulle mäta, mätenheten samt delarna som mätenheten delas i. Dessa tre delar utgör olika helheter och olika delar i den generella modellen.

Mätenheten i förhållande till objektet som ska mätas

Arbetet med att utveckla modellen synliggjorde ett förhållande mellan mätenheten och det objekt som skulle mätas. Att jämförelsen skulle genomföras med en enda mätenhet var en förutsättning i det fortsatta arbetet med lärandeuppgiften. Förhållandet mellan en längd som ska jämföras med en mätenhet är multiplikativt (se figur 4 och 5).

En elev uttryckte att de borde få använda flera olika mätenheter samtidigt i jämförelsen för att slippa problemet med att ange mätresultatet i form av ett rationellt tal.

Emil: Man kan ju ta en röd och en vit, då behöver man inte krångla så där.

Heltalsdelen i förhållande till bråkdelen

I arbetet med att utveckla modeller för tal i blandad form under lektionerna tog klassen stöd av olika matematikspecifika redskap för att synliggöra strukturen i ett rationellt tal. De redskap som togs i bruk var algebraiska symboler, tallinjer, längdjämförelser och olika matematiska modeller.

Läraren föreslog inledningsvis symbolen x för heltalsdelen i den modell som skulle komma att utvecklas. Läraren valde x eftersom den symbolen kan ses som en vedertagen algebraisk symbol för att beteckna en variabel. Ingen av eleverna använde dock denna symbol. Istället valde eleverna en annan symbol för heltalsdelen, vilket visas i följande excerpt, där heltalsdelen av modellen utvecklades.

Läraren: Perfekt… Dom är hela. Dom är fyra hela. Det är det som är skillnaden. Vad kan vi kalla den här? Kan vi sätta in en bokstav för den här? Kan ni komma på någon bokstav bara?

Fahrad: H?

Läraren: H. Då kan vi göra H för hela.

Eleverna synliggjorde heltalsdelen genom att använda symbolen *H*. Läraren och eleverna enades om att heltalsdelen skulle benämnas *'hela'*, och symboliseras med *H*.

Läraren introducerade bråkdelen i modellen genom att använda elevernas uttryck 'en liten bit till'. En av eleverna tog också hjälp av 'en liten bit till' men kallade den för "den lilla biten som är kvar" när hen förklarade hur bråkdelen kunde anges, se nedanstående excerpt:

Läraren: Men… en liten bit till, hur vet vi att det är en halv? Vet vi att det verkligen är en halv?

[Läraren pekar på den röda enheten som utgör 'en liten bit till' och på tallinjen mellan tre och fyra.]

Chaid: Jaaa, det vet vi väl?

Läraren: Finns det något sätt, vad gör vi för att veta?

Dana: Vi kan kanske mäta? Vi måste väl mäta den röda, och "den lilla biten" som är kvar?

Fler elever diskuterade bråkdelen genom att använda benämningen 'en liten bit till'. Amii behövde 'en liten bit till' av mätenheten för att ange ett mätresultat och använde uttrycket för att förklara vad som utgjorde en tredjedel.

Amii: Men jag tänker att det är dom hela två gröna och av den som det bara är 'en liten bit till' av är det en tredjedel.

Läraren diskuterade och synliggjorde bråkdelen genom att stå vid tavlan och peka växelvis på cuisenairestavarna och växelvis på tallinjen. Eleverna pekade mot stavarna och tallinjen på tavlan.

Benämningen 'en liten bit till' användes fortlöpande av både eleverna och läraren för att diskutera bråkdelen. Här nedan är ytterligare ett exempel.

Läraren: Hur mycket behöver vi av den röda? Hur många vita går på den där 'en liten bit till'? Hur många vita går åt för att fylla ut den där svarta?

Många elever: En.

Läraren: Hur många är dom sammanlagt? En av hur många? Hur många vita finns på hela röda?

Många elever: Två.

Läraren: Hur ska vi skriva här då?

[Läraren pekar på fyrkanten i S = H röd + ☐ röd som finns skrivet på tavlan.]

[Evin räcker upp handen och blir ombedd att skriva bråkdelen på tavlan. Evin skriver: S = H röd + 1 vit/2 vita röd.]

[Läraren skriver: Svart = 3 röda + 1/2 röda.]

Läraren utmanade eleverna med att fråga ”Hur ska vi skriva här då?”. I den bråkdel som Evin skriver på tavlan synliggörs att bråkdelen, det vill säga ”en liten bit till’, av den röda mätenheten utgörs av 1 vit av totalt 2 vita. Bråkdelen synliggjordes med stöd av ’en liten bit till’, och kunde därmed separeras från heltalsdelen.

Att de hela mätenheterna i jämförelserna utgör en heltalsdel i modellen blev synligt i jämförelserna med cuisenairestavarna och elevernas förslag på den algebraiska symbolen *H* för denna del. Vidare synliggjordes att bråkdelen av talet utgörs av vissa delar av den sista mätenheten, nämligen *d/v*. Det var genom diskussionerna om de två delarna med stöd av algebraiska symboler och benämningen ’en liten bit till’ som detta synliggjordes. Det var en av eleverna som synliggjorde att bråkdelen utgörs av en del som behövs i relation till det totala antalet delar som mätenheten kan delas igenom förslaget *vit/vita*.

Täljaren i förhållande till nämnaren

Arbetet med att utveckla modellen för tal i blandad form innebar att eleverna reflekterade över bråkdelen av talen men utan att använda begreppen täljare respektive nämnare. Istället reflekterade eleverna över bråkdelen genom att använda algebraiska symboler som gav ledtrådar till innebörderna i täljaren respektive nämnaren.

Eleverna utvecklade bråkdelen i modellen genom att symbolen d fick utgöra täljare i bråkdelen. Med stöd av symbolen synliggjorde eleverna innebörden i symbolens placering genom diskussionen att täljaren var de delar som behövdes för att mäta objektet som skulle mätas. Symbolen v utvecklades utifrån innebörden vita, det vill säga samtliga vita som mätenheten delas med.

Läraren: Vad är det vi gör när vi har en liten bit till? Nu behöver alla hjärnor hjälpas åt.

Mehmet: Två vita finns det.

Läraren: Ja, vi har ju, och vad kan vi kalla det för, om vi ska kalla det för något.
Nermin: Litet d

Läraren: d som delar. Ja, delar och vad har vi för något här? Hur tänker vi vidare sedan då?

[Läraren skriver ett d som en täljare i bråkdelen i modellen. Svart = Hg +d/▯g. Läraren pekar på nämnaren under "d" och diskussionen fortsätter.]

Mehmet: Det är dom vita.

Läraren: Och vad skulle vi kunna ha här under, av hur många?

Dana: v

Läraren: Förlåt.

Fler elever: [Ljudar] vvvvv som i vita

[Läraren skriver v i nämnaren.]

När eleverna valde symboler, för placeringen i modellen som utvecklades, valdes symboler utifrån första bokstavsljudet i det ord som representerade innebörden i det diskuterade. I exemplet ovan valdes *v* att representera nämnaren, då nämnaren utgjordes av det totala antalet vita klossar. Diskussionen som föregick valet av symbol påverkade alltså valet av symbol.

Eleverna synliggjorde förhållandet mellan täljare och nämnare genom diskussionen delarna av samtliga vita. I kommentaren "delar av samtliga" gömmer sig en matematisk innebörd om att förhållandet är multiplikativt. Detta multiplikativa förhållande blev speciellt synligt vid ett tillfälle där tre elever och läraren reflekterade över ett konkret exempel där jämförelsen gav svaret 1 + 1/6.

Peaqua: Fem delar för det går bort en del.

Läraren: Hur tänker du då?

Peaqua: [Pekar mot tavlan.] För vi använder ju en etta till den döra första, sedan är det fem kvar.

Läraren: [Pekar på den översta gröna]. Men hur många delar är hela den där? Hur många delar är hela den gröna?

Dana: Sex.

Läraren: Ja. [Läraren pekar på sexan i nämnaren i 1/6]

Läraren: Ja, så det måste alltså vara sex delar emellan… ett och två. Alla dom delarna behöver vara med. Det är alla delar man mäter den översta staven med. Den man tar bort var ser man den någonstans? Den där ettan, hur kommer den att bli synlig? Hur ser man att det är en av sex?

Dana: Den är en av dom sex.

Chaid: För att det är eeeen aaaav alla vi delar med.

Peaqua såg alltså bråkdelen som att sjättedelarna kunde delas upp på 1 + 5 delar och beskriver därmed felaktigt ett additivt förhållande. Chaids betonar istället "att det är eeeen aaaav alla de delar med" och visar därmed på det multiplikativa förhållandet. Arbetet med modellen synliggjorde alltså det multiplikativa förhållandet inom bråkformen dels i diskussionen med symbolerna och dels i kontrast till elevernas reflektioner över att se förhållandet som additivt.

Att täljaren står i ett förhållande till nämnaren synliggjordes i arbetet med modellen för tal i blandad form. Innehållet diskuterades av eleverna med hjälp av symbolerna *d/v*. Att förhållandet dessutom är multiplikativt blev synligt i "eeeen aaaav alla vi delar med".

De rationella talen i förhållande till x och x + 1

I arbetet med modellen under lektionerna försattes eleverna i situationer där mätresultaten blev ett tal mellan olika tal x och olika tal $x+1$ (där x utgör ett heltal). Det vill säga mätresultaten fanns mellan två bestämda hela tal. Hur långt från talet x mätresultatet fanns diskuterades med hjälp av 'en liten bit till' samt att talen skulle markeras på en tallinje.

Läraren stöttade eleverna med frågor i en diskussion om det specifika avståndet mellan det hela talet 2 och det hela talet 3 genom att först markera heltalsdelen 2 på tallinjen. Genom frågorna från läraren diskuterade eleverna placeringen mellan heltalen 2 och 3. Exempel på frågor: "Den här biten mellan 2 och 3 hur har ni gjort? Hur har ni delat upp den? Hur har ni fått till 'den lilla biten till' mellan ett och två?"

Läraren ställde fler frågor som stöttade diskussionen då 2 1/3 skulle placeras på tallinjen: "Var finns 'den lilla biten till'? Var finns 1/3 på tallinjen?" I excerptet nedan visas hur lärarens stöttning kunde ta form.

Läraren: Rita den svarta staven på tallinjen.

[Aisha kommer till tavlan och pekar med fingret som en båge från 0 till mellan värdet för 2 och 3.]

Läraren: Till varför 2 och en halv?

Aisha: Från nollan till trean…nästan.

Läraren: [Läraren ringar in 1/3.] Är det en halv?

Aisha: [Aisha pekar på 3:an på tallinjen.] Nej, tre.

Läraren. Är det trean eller en tredjedel? […]Vad menar man med en tredjedel? Håller ni med allihop att den där lilla biten ligger mellan två och tre?

[Aisha går och sätter sig. Läraren kryssar vid markeringen för två och tre på tallinjen.]

Eleverna diskuterade hur avståndet mellan två hela tal kunde delas. För att precisera 'en liten bit till', det vill säga den bit som skulle adderas till heltalsdelen för att representera en jämförelse mellan de olika längderna. Aisha sa att två hela och en tredjedel på en tallinje ska placeras nära trean eftersom det är en trea i en tredjedel. Edgar påstår att två och en tredjedel finns mellan två och en halv och tre eftersom tre är större än två, då måste en tredjedel vara större än en halv.

Eleverna reflekterade även över om 1/6 innebar fem eller sex streck mellan två tal, eller om 1/6 innebar fem eller sex avstånd mellan två hela tal. Kvantiteten av de olika talen representerades på respektive streck på tallinjen. Hur många streck behövdes för att visa ett bestämt antal delar mellan två hela tal? I nästa excerpt argumenterar Evin för att man ska rita fem streck för att det ska bli sex avstånd, det vill säga att varje avstånd skulle symbolisera en sjättedel.

Dana: Jag har ritat sex streck mellan ett och två.

Läraren: Varför valde du sex streck mellan ett och två?

Evin: Fem streck.

Läraren: Varför ska det vara fem streck?

Evin: Fem streck för att det ska vara. Vi räknar med att ett hopp är ett.

Läraren: [Nickar tydligt och tittar på Dana.] För när du sa streck, menade du sex avstånd mellan. För det ska vara hur många delar emellan ettan och tvåan?

Evin reflekterade över den lösning som läraren och Dana diskuterade. Evin hade ett annat förslag till lösning, och gav sig in i diskussionen: ”Fem streck för att det ska vara. Vi räknar med att ett hopp är ett”. Var mellan två hela tal ett rationellt tal återfinns bestäms alltså av bråkdelen av talet. Hur avståndet mellan två tal ska delas bestäms dessutom av nämnaren i bråkdelen. Delningen av avståndet på tallinjen följer dessutom att värdet markeras med en punkt, eller som i dessa lektioner, med ett streck.

Att det rationella talet *S = x + 'en liten bit till'* finns mellan *x* och *x+1* synliggjordes i diskussionen om hur avståndet mellan två tal kunde delas, var på tallinjen ett specifikt tal kan finnas, och hur olika rationella tal mellan samma hela tal kunde storleksordnas. Kunnandet synliggjordes dels genom att eleverna och läraren pekade på tallinjen och dels genom att eleverna och läraren delade upp avståndet mellan två hela tal. Det additiva förhållandet synliggjordes även med hjälp av benämningen 'en liten bit till'.

Storheter i förhållande till mätenheter

I arbetet med modellen separerades storheterna och mätenheterna på en av elevernas initiativ.

> Evin: Kan vi inte skriva gula istället för bara g. Det blir så rörigt annars.

Eleverna utvecklade därigenom modellen till *Svart = H gul + (d/v) gul*. I modellen står fortfarande *H* för antalet hela, *d* för delar och *v* för vita. Eleverna höll alltså isär mätenheten och storheterna i modellen genom att hela ordet för mätenheten skrevs ut medan storheterna utgjordes av en symbol. Storheterna utgörs av variabler i modellen.

Att talen innehöll dels en storhet, variabel, och dels en mätenhet synliggjordes alltså genom att eleverna använde symboler för storheterna, variablerna, och hela ordet för mätenheten.

Oändliget av rationella tal i förhållande till hela tal

Arbetet med att bråkdelen i modellen skulle markeras på en tallinje, förtydligades med en fråga från läraren som synliggjorde att det finns oändligt många tal mellan två hela tal.

Läraren stöttade eleverna i att få syn på hur många tal det finns mellan två hela tal genom frågan: "Hur många sätt kan man dela sträckan mellan två hela tal?" Läraren frågade vidare: ”Är det alla sätt man kan dela en sträcka i?" efter olika förslag på antalet gånger som eleverna föreslår.

De elever som inte varit med under de lektioner där det utvecklades en modell för rationella tal svarade på frågan genom formuleringar som: ”Gogolplex" och ”En miljon och mer…" De eleverna som var med under lektioner där det utvecklades en generell modell svarade istället ”Det finns hur många som helst", ”Den kan delas i massor", ”Massvis, hur många som helst", ”Hur många delar som helst".

Att det finns hur många rationella tal som helst synliggjordes med lärarens fråga ”Är det alla sätt man kan dela en sträcka i?" efter alla numeriska förslag från eleverna.

Diskussion

Avslutningsvis diskuterar vi exempel på kunnande som kom till uttryck i arbetet med generella modeller för rationella tal som prövades i den serie av Learning studies som vi här använt data ifrån. Exemplen diskuteras i relation till de frågeställningar som adresserats utifrån tidigare forskning gällande undervisning om rationella tal.

Arbetet med att utveckla modellen *Svart = H gul + (d/v) gul* i lektionerna gjorde det möjligt för eleverna att reflektera över att även rationella tal är tal liksom de hela talen (3, 2, 1, 0, -1, -2, -3). I lektionerna diskuterade eleverna och läraren att talen som modellen beskriver finns mellan de hela talen. Modellutvecklingen var ett stöd i dessa diskussioner trots att eleverna i lektionerna sedan tidigare inte var vana att använda vare sig algebra eller teoretiska modeller i matematik. Modellen var ett stöd i ett arbete som enligt Vygotsky kan betraktas som teoretiskt arbete. I de lektioner vi analyserat i denna artikel blev det möjligt för eleverna att urskilja olika aspekter av rationella tal då de deltog i utvecklandet av den generella modellen.

Arbetet i de lektioner vi studerat, innebar att olika aspekter av kunnande av rationella tal synliggjordes då en generell modell utvecklades. Bland annat synliggjordes 1) att ett tal i blandad form består av dels en heltalsdel och dels en bråkdel. De båda delarna kunde separeras i diskussionerna med stöd av de algebraiska symbolerna. När de båda delarna diskuterades synliggjordes 2) det additiva förhållandet mellan heltalsdelen och bråkdelen, genom benämningen 'en liten bit till'. Arbetet med modellen 3) särskilde även storheterna och mätenheterna genom att eleverna föreslog att enheten skulle anges med hela ordet för enheten istället för att bara utgöras av en symbol. Storheterna och mätenheten kunde särskiljas genom att modellen utvecklades från *Svart = H g + (d/v) g* till *Svart = H gul + (d/v) gul*. Arbetet med modellen synliggjorde 4) täljaren och nämnaren i bråkdelen av talen. 5) Det multiplikativa förhållandet inom bråkdelen blev möjligt att diskutera genom att modellen för talen utvecklades med algebraiska symboler. Symbolerna innehöll en semantisk ledtråd till innebörderna i symbolernas placeringar. Detta fick till följd att benämningarna täljare respektive nämnare inte fokuserades. Istället var det innebörderna i täljaren och nämnaren som diskuterades. Delen, *d*, av det totala antalet vita , *v*, utvecklades till *d/v*.

Den matematiska modellen utvecklades tillsammans med eleverna

För att det skulle vara möjligt att föra ett teoretiskt matematiskt resonemang tillsammans med eleverna valde lärargruppen att använda lärandeverksamhet som designredskap i Learning study-arbetet (jfr Davydov, 2008; Zuckerman, 2004). I den lektionsdesignen utvecklades den matematiska modellen i en process av problemformulering, problemlösning samt i elevernas reflektioner över rationella tal. För att identifiera problemet tog eleverna och lärarna stöd av jämförelserna med cuisenairestavarna, tallinjen, modellen för tal i blandad form samt benämningen 'en liten bit till'. De längder som eleverna jämförde styrde vilka resultat som kunde anges. I designen av jämförelserna gav heltalsdelen i de olika uppgifterna olika heltal. Det fick till följd att klassen kunde undvika att fastna i avståndet mellan heltalen 0 och 1, där tidigare studier visar att elever brukar ha stora svårigheter att se helheten som värdet för ett (se exempelvis McIntosh, 2008). Istället möjliggjorde dessa uppgifter ett urskiljande av att det finns tal mellan samtliga hela tal.

De inledande uppgifterna där eleverna själva skulle konstruera jämförelser, och där eleverna stötte på svårigheter med att redovisa resultat för jämförelserna, ser ut att vara framgångsrika för att diskutera ett behov av rationella tal. I diskussionen om varför dessa tal behövs, uppstod även en diskussion om hur de matematiska konventionerna för strukturen för dessa tal ser ut. I det sammanhanget synliggjorde modellen olika helheter som finns inbyggda i ett tal i blandad form, objektet som skulle mätas, mätenheten samt delen som mätenheten delades med.

Modellutvecklingen gav eleverna bättre möjlighet att diskutera rationella tal

När eleverna själva använde modellen i sitt arbete blev diskussionerna om numeriska exempel mer generella. Ett exempel var när eleverna nämnde att antalet tal mellan de hela talen är ”hur många som helst” istället för ett mer bestämt antal som ”miljoner eller mer”.

Sammantaget visar arbetet med längdjämförelserna och de övriga redskapen att det kunnande som synliggjordes i dessa lektioner motsvarar de grundantaganden som Davydovs matematikdidaktiska program skriver fram som nödvändiga för att utveckla elevernas taluppfattning. I utvecklingen av modellen kunde alla elever delta i diskussionerna. Även elever som varit kort tid i Sverige kunde vara med i diskussionerna genom att både lärare och elever pekade på tallinjen och pekade i jämförelserna när de inte hittade ord de kunde förstå varandra med. Arbetet med modellutvecklingen möjliggjorde att eleverna kunde arbeta med rationella tal som tal.

Referenser

Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A. & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt sammanhang. *Forskning om undervisning och lärande*, nr. 10, ss. 29-49.

Ball, D. (1993). Halves, pieces and twoth: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. Ingår i T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (red.), *Rational numbers. An integration of research*, ss. 157-195. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Netherland: Kluwer academic Publishers.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. *Soviets Studies in Mathematics Education*. Reston Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of Developmental Instruction. A theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers, Inc. (Publicerades i original 1986)

Davydov, V. V. & TSvetkovich, Z. (1991). On the Objective Origin of the Concept of Fractions. Focus on Learning *Problems in Mathematics*, vol. 13, nr. 1, ss. 13-64.

Eriksson, H. (2015). *Rationell tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller* *som medierande redskap.* (lic.-avh.) Stockholm: Stockholms universitet.

Eriksson, I. & Jansson, A. (i tryck). *Designing algebraic tasks for 7-year-old students – a pilot project inspired by Davydov's learning activity.* (kommer att publiceras i the International Journal for Mathematics Teaching and Learning våren 2016).

Erlwanger, S. (1973). Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*, vol. 1, nr. 2, ss. 87-107.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: Murray.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1986). Procedures over Concepts: The acquisition of Decimal Number Knowledge. i J. Hiebert, *Conceptual and Procedural Knowledge; The case of Mathematics*. New Jersey: Erlbaum.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. Ingår i J. Hiebert & M. Behr (red.), *Number-conceptions and operations in the middle grades,* ss. 53-92. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kinard, A. & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund: Studentlitteratur.

Kozulin, A. (2003). Psychological Tools and Mediated Learning. Ingår i A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev & M. Miller (red), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*, ss. 15-38. Cambridge: Cambridge University Press.

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, nr. 25, ss. 547-567.

Lamon, S. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. NY: Routledge.

Mack, N. (1993). Learning Rational Numbers With Understanding: The Case of Informal Knowledge. Ingår i T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (red.), *Rational Numbers. An Integration of Research*, ss. 85-107. US: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F. (2014). *Necessary Conditions of Learning*. NY: Routledge.

McIntosh, A. (2008). *Att förstå och använda tal*. Göteborg: NCM.

Morris, A. (2000). A Teaching Experiment: Introducing Fourth Graders to Fractions from the Viewpoint of Measuring Quantities Using Davydov´s Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 22, nr. 1, ss. 33-84.

Niemi, D. (1996). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications and Explanations. *The Journal of Educational Research*, vol. 89, nr. 6, ss. 351-363.

Repkin, V. (2003). Developmental Teaching and Learning Activity. J*ournal of Russian and East European Psychology*, vol. 41, nr. 5, ss. 10-33.

Roth, W.-M. & Hwang, S. W. (2006). Does mathematical learning occur in going from concrete to abstract or going from abstract to concrete? *Journal of Mathematical Behavior*, nr. 25, ss. 334-344.

Schmittau, J. (2003). Cultural-Historical Theory and Mathematics Education. Ingår i A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyey & M. Miller (red.), *Vygotsky´s educational theory* *in cultural context*, ss. 225-245. Cambridge: Cambridge University Press.

Schmittau, J. (2005). The Development of Algebraic Thinking - A Vygotskian Perspective. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik ZDM*, vol. 37, nr. 1, ss. 16-22.

Schmittau, J. & Morris, A. (2004). The development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, vol. 8, nr. 1, ss. 60-87.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. NY: Springer.

Van Dijk, I., van Oers, B., Terwel, J. & van den Eeden, P. (2003). Strategic Learning in Primary Mathematics Education: Effects of an Experimental Program in Modelling. *Educational Research and Evaluation*, vol. 9, nr. 2 ss. 161-187.

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, vol. 19, nr. 1, ss. 9-18.

Zuckerman, G. (2007). Supporting Children's Initiative. *Journal of Russian and East European Psychology*, vol. 45, nr. 3, ss. 9-42.