FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 1, 2024, S. 47–68

Kartläggning av förskoleklassens matematikundervisning om tal – kvalitativa skillnader och lärandemöjligheter

Orginalartikel

Jessica Elofsson[1]*, Ulla Runesson Kempe[2], Anna-Lena Ekdahl[2] & Camilla Björklund[3]

[1] Linköpings universitet

[2] Jönköping University

[3] Göteborgs universitet

*Korresponderande författare:
Jessica Elofsson
jessica.elofsson@liu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 1, 2024, s. 47–68
DOI: 10.61998/forskul.v12i1.22918
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-03-13

Sammanfattning

Under hösten 2021 gjordes en kartläggning av matematikundervisningen i 95 förskoleklasser i syfte att bidra med kunskap om vad kvalitet i undervisning kan innebära och vad elever ges möjligheter att lära om tal, tals egenskaper och dess användning. Analysverktyget "Mediating Primary Mathematics" användes för att identifiera skillnader i undervisningens kvalitet, det vill säga hur ett matematiskt innehåll behandlades och medierades i undervisningen. Resultatet visar på en variation i hur innehållet medieras och därmed vad elever ges möjligheter att lära. Goda undervisningsexempel har observerats, samtidigt som utvecklingsområden identifierats. Artefakter förekommer ofta, men används inte alltid på sätt som synliggör matematiska samband och innebörder. Lösningsmetoder får sällan stå i centrum för undersökning, jämförelse och värdering i undervisningen. Elevinspel bekräftas ofta, samtidigt som det blir tydligt att undervisningen sällan erbjuder utveckling och bearbetning av dessa.

Nyckelord: förskoleklass, matematik, undervisning, kvalitet, lärandemöjligheter, tal, tals del-helhetsrelationer

Abstract

During the autumn of 2021, an observational study was conducted in 95 Swedish preschool classes with the aim of mapping and describing the quality of teaching. The framework "Mediating Primary Mathematics" was utilized to identify and assess variations in the quality of teaching about numbers, their properties, and usage, that is, how the mathematical content was treated and mediated in the teaching situation. The result revealed variations in how the mathematical content was mediated, which impacted the learning opportunities provided to students. While several examples of high-quality mathematics teaching were observed, areas for improvement were also identified. Artifacts were frequently used in teaching, although their usage did not consistently emphasize mathematical relationships and meanings. Furthermore, teaching rarely emphasized comparison and evaluation of different solution methods. Student contributions were often acknowledged, but it became evident that their input was rarely elaborated upon.

Keywords: Preschool class, Mathematics, Teaching, Quality, Learning opportunities, Numbers, Part-whole relations of numbers

Introduktion

Förskoleklassen har en unik ställning i det svenska utbildningssystemet i övergången mellan förskola och grundskola. Här möts förskolans och grundskolans pedagogik, traditioner och arbetssätt vilket ska ”bidra till kontinuitet och progression i elevernas utveckling och lärande samt förbereda eleverna för fortsatt utbildning” (Skolverket, 2022, s. 21). Sedan 2018 är året i förskoleklass obligatoriskt för alla sexåringar i Sverige. Förskoleklassens syfte och det centrala innehållet i undervisningen framgår av del 3 i läroplanen (Skolverket, 2022), och utgör ett komplement till del 1 och 2 där grundskolans värdegrund och uppdrag samt övergripande mål och riktlinjer presenteras. Genom läroplanen tydliggörs en strävan att skapa nationell likvärdighet samt att erbjuda alla elever förskoleklassundervisning av god kvalitet. Skrivningarna i läroplanen öppnar för att ta tillvara elevers tidigare erfarenheter i planering och genomförande av undervisning, samtidigt som stor frihet ges till läraren att utforma sin undervisning utifrån det centrala innehållet. Denna frihet skapar utrymme för olika val och tolkningar, vilket gör att undervisningen kan komma att skilja sig mycket åt i olika förskoleklasser, både vad gäller form och innehåll. Vi ser därför ett behov av att rikta uppmärksamhet mot kvaliteten i undervisningen och mer specifikt mot variationen i kvalitet i matematikundervisningen om tal, tals egenskaper och dess användning i förskoleklass och vad denna betyder för vad elever ges möjlighet att lära, men också att lyfta fram potentiella utvecklingsområden som kan ge en undervisning som bättre kan bidra till att förbereda eleverna för fortsatt utbildning.

I denna artikel redovisas resultatet av en kartläggning av matematikundervisning om tal, tals egenskaper och dess användning i förskoleklass. Vårt fokus är innehållsligt, det vill säga vi studerar hur ett matematiskt innehåll behandlas och medieras i undervisningen och därmed vad elever ges möjlighet att lära. Syftet är att bidra med kunskap om vad kvalitet i matematikundervisningen kan innebära. Vår specifika forskningsfråga är:

- Vilken variation i mediering och därmed vilka lärandemöjligheter framträder i undervisning om tal, tals egenskaper och dess användning i förskoleklass?

Forskningsöversikt

Forskningen om tidigt matematiklärande och undervisning om tal är i ett internationellt perspektiv omfattande och har under flera decennier fokuserat på yngre elevers kunskapsutveckling i aritmetik, elevers användning av strategier samt vilka områden i matematik som ofta visar sig svåra att lära (se t.ex. Baroody & Purpura, 2017; Carpenter m.fl., 1982). Denna forskning grundar sig ofta i kognitionsforskning och psykologiskt orienterade paradigm (se t.ex. Clements & Sarama, 2021), vilket inte nödvändigtvis innebär att forskningen bidrar till att utveckla kunskaper om hur undervisningen bör utformas för att på bästa sätt främja elevers matematiklärande. Därför höjs röster för att forskning om undervisningspraktiken, sett ur ett utbildningsvetenskapligt perspektiv, behöver stärkas för att driva fram såväl teoriutveckling som utveckling av undervisning på vetenskaplig grund (se t.ex. Björklund m.fl., 2020).

Den svenska förskoleklassen

Förskoleklassens särställning i gränslandet mellan förskola och grundskola gör det svårt att sätta kunskaper om förskoleklassen som fenomen i relation till internationell forskning. Endast de nordiska länderna har eller har haft motsvarande form av övergång mellan förskola och grundskola. Ett sådant unikt fenomen i utbildningssystemet skulle kunna förväntas ge upphov till ett stort forskningsintresse kring den undervisning som bedrivs, men det finns en begränsad rapportering av forskning inom detta område. Tidigare studier har främst utvärderat hur förskoleklassen förmår uppfylla målsättningen om att utgöra en bro mellan förskola och grundskola (Sandberg, 2012; Simeonsdotter Svensson, 2009), lärares professionella identiteter (Ackesjö, 2010; se även Alatalo, 2017), samt elevers perspektiv på övergången mellan skolformerna (Ackesjö, 2014; Lago, 2014). En slutsats som kan dras från dessa studier är att förskoleklassens verksamhet inte med självklarhet blir den tänkta bron mellan förskola och grundskola i termer av kontinuitet i undervisning, utan istället i högre grad fokuserar förberedelse och tyngdpunkt på kunskap om skolan och inte grundläggande kunskaper för skolan att bygga vidare på. Med andra ord tycks undervisningens innehåll och form hamnat i skymundan.

Arnell (2021) har genomfört en av få studier som beskriver vad autentiska undervisningsaktiviteter i förskoleklass erbjuder elever att utveckla sitt kunnande om. Arnell beskriver i sin avhandling att matematikundervisningen i förskoleklass karakteriserades av begreppsövningar, lösningsorienterad matematikverksamhet samt fritt utforskande av matematik, där elevernas intressen var grund för den matematik som erbjöds att lära. Undervisningen i förskoleklass skiljde sig från matematikundervisningen i årskurs 1 som i högre grad hade fokus på ett matematiskt innehåll samt metoder och strategier för att lösa problem.

Även om forskningen om matematikundervisning i förskoleklass är sparsam, finns utvecklingsprojekt där pedagogiska program har prövats och där elevernas kunskapsutveckling har utvärderats. Ett sådant program är Tänka, Resonera, Räkna (TRR) (se t.ex. Sterner m.fl., 2020; Vennberg, 2020). TRR är en undervisingsmodell som har fokus på taluppfattning och tals användning och är ett systematiskt upplagt undervisningsprogram där representationer utgör en bärande aspekt för elevers utveckling av talförståelse. Ett annat projekt är TalUppFattningFörskoleklass (TUFF), där ett interventionsprogram om heltal, talrelationer och operationer har testats i förskoleklass (Westerholm & Samuelsson, 2020). Både TRR och TUFF är forskningsgrundade och studier där dessa program har använts visar att elever som deltagit i interventionerna utvecklas inom det område som interventionen har behandlat (se Sterner m.fl. 2020; Vennberg, 2020; Westerholm & Samulesson, 2020). I en annan studie (Wettergren m.fl., 2021) undersöks förskoleklasselevers kunnande och uppfattningar av matematiska uttryck och dessa används som utgångspunkt för att diskutera vad som kan utgöra kritiska aspekter för att elever ska ges möjlighet att utveckla mer kvalificerade uppfattningar av matematiska uttryck, samt hur detta kan beaktas när undervisning utformas. På liknande sätt tar även Wästerlid (2020) utgångspunkt i elevers kunnande (i detta fall genom eye-tracking för att identifiera subitiseringsförmåga) för att planera interventioner i förskoleklass. De projekt som beskrivs ovan är således av två slag; interventioner av programtyp respektive att med utgångspunkt i elevers kunnande planera undervisning. I detta sammanhang kan även projektet Problemlösning i Förskoleklass (PIF, se t.ex. Van Bommel & Palmér, 2021) nämnas, vilket befinner sig i gränslandet mellan dessa, i och med att de genomför mer explorativa cykler av interventioner och prövar undervisningsprinciper och deras effekter på elevers kunnande kontinuerligt i en designbaserad forskning med fokus på problemlösning.

Sammantaget visar forskning om svensk förskoleklass att utbildningen har potential att utgöra den tänkta bron mellan förskola och grundskola. Vidare har olika forskningsprojekt, där pedagogiska program har prövats i matematikundervisningen, visat positiva resultat för förskoleklasselevers lärande. Däremot har forskningen inte i någon större utsträckning fokuserat på och studerat den matematikundervisning som eleverna faktiskt får ta del av i förskoleklass, det vill säga om och hur de goda intentionerna som skrivs fram i läroplanen tillämpas på ett framgångsrikt sätt för att stötta elevernas lärande.

Matematikundervisning och -lärande

I det sociokulturella perspektivet utgör interaktionen mellan individen och dess sociala och kulturella kontext grunden för lärandet (Vygotsky, 1978). Begreppet "mediering" är centralt i detta perspektiv och är den process där mening och innebörd som är kulturellt etablerade medieras till den lärande (Vygotsky, 1978; Wertsch, 1998). Kozulin (2003) beskriver att medieringen sker på två sätt; via kulturell, artefaktbaserad mediering och via mänsklig mediering. Venkat och Askew (2018) har utformat ett ramverk för att studera lärares matematikundervisning i vilket de har förfinat Kozulins (2003) beskrivning av artefaktbaserad mediering. För att på en mer detaljerad nivå komma åt kvalitetsskillnader i matematikundervisning, har de förfinat artefaktbegreppet genom att särskilja fysiska artefakter (exempelvis plockmaterial och tioramar) och notationer (skrivna symboler, exempelvis siffror) när de har studerat hur matematikinnehållet medieras i undervisningen. Askew (2019) och Venkat och Askew (2018) har med hjälp av detta ramverk visat att lärares sätt att mediera ett matematikinnehåll, via artefakter, notationer och gester (kroppsspråk och språk) i undervisningssituationen är avgörande för elevers lärande. Mer specifikt har forskning visat att det särskilt är lärarens sätt att framställa samband, struktur och generalisering som antas bidra till att elever utvecklar hållbara och utvecklingsbara sätt att förstå och använda tal (bl.a. Coles, 2017; Ellemor-Collins & Wright, 2009; Venkat m.fl. 2019). Watson och Mason (2006a) argumenterar för att uppmärksamhet riktad mot strukturer hos tal, till exempel att se tal som del-helhetsrelationer, stöttar elevers förståelse för hur aritmetikuppgifter kan lösas på effektiva sätt. Abstrakta fenomen som tal, tals egenskaper och dess användning behöver emellertid representeras för att synliggöras för eleverna. Därför blir valet av exempel, uppgifter, artefakter och notationer samt sättet varpå dessa används och medieras genom gester och verbala uttryck, viktiga medel i undervisningen (se Venkat & Askew, 2018). För vårt forskningsintresse är därför forskning om hur artefakter, notationer och gester genom lärarens undervisningshandlingar kan mediera innebörder, samt hur samband, strukturer och generalisering görs synliga och begripliga för eleverna, särskilt relevant.

Artefakter, notationer och gester

Med artefakter avser vi, i enlighet med Venkat och Askew (2018), konkret material och föremål som kan användas i undervisningssyfte (till exempel pärlor på snöre, äggkartonger eller klossar) och som läraren har planerat hur det ska användas för att synliggöra undervisningsinnehållet. Artefakterna har därmed ett medierande syfte, de ska förmedla eller visa på något specifikt (Wertsch, 1998) och utgör ett stöd för att vidga vad som är möjligt att göra och föreställa sig. Om exempelvis pärlor i två färger har ordnats i grupper om fem på ett snöre (strukturerad artefakt), underlättar det att perceptuellt hålla ordning på ett större antal, men också att snabbt och säkert räkna samman ett större antal genom att nyttja femgrupperna istället för att behöva räkna pärlorna en och en. Detta kan jämföras med ett pärlband där pärlor i olika färger är slumpmässigt ordnande och ingen tydlig struktur kan urskiljas (ostrukturerad artefakt) och användas för att hålla ordning på ett större antal. Vilken innebörd artefakten kan bidra med att mediera, så som samband, struktur och generalisering, är relaterat till hur läraren väljer att använda artefakten.

Notationer är sådant som läraren skriver eller ritar i stunden, såsom symboler, bilder eller diagram. De används för att illustrera och tydliggöra innebörder av det innehåll som behandlas i undervisningen. Notationerna kan vara spontana eller planerade, men de görs i stunden (Venkat & Askew, 2018). Notationer innebär till exempel att konkreta objekt som används i en undervisningssituation (t.ex. fem klossar som delas i två delmängder med tre och två eller fyra och en i varje) kan lyftas till en mer abstraherad nivå, såsom symboler (5=3+2 och 5=4+1) skrivna på en tavla. På så sätt görs själva talen (5, 3 och 2 respektive 5, 4 och 1) till tankeobjekt och samband inom och mellan tal kan synliggöras (Sfard, 2008).

Kommunikativa handlingar som ord och gester, kan rikta uppmärksamhet mot samband, strukturer och generaliseringar och på så sätt synliggöra vissa innebörder för eleven (Alibali m.fl., 2013; Askew & Venkat, 2018). Medierande gester är sådant som läraren gör för att, till exempel, visa på samband eller representera innebörder i och mellan begrepp och principer som inte självklart framträder i användningen av artefakter eller notationer. Detta sker oftast tillsammans med förklarande verbala uttryck. Ju yngre eleverna är, desto viktigare blir lärarens medierande gester och ord för att skapa ett gemensamt fokus och peka ut centrala aspekter i undervisningens innehåll (Ekdahl, 2019).

Metoder för att generera lösningar på problem

Att skapa möjligheter att förstå olika lösningsmetoder och att kunna se deras styrkor och begräsningar beror inte på uppgiften och problemet i sig, utan på vad som fokuseras i undervisningen (Schifter, 2011). Om fokus enbart riktas mot att lösa uppgiften och få fram ett svar eller om det ges möjligheter till reflektion över lösningsmetoder och tillvägagångssätt kan ha avgörande betydelse för vad eleverna lär sig, både i och om matematik (Askew, 2019). Lärares gester och verbala uttryck kan användas, dels för att visa på möjliga lösningsmetoder för eleverna, dels för att jämföra och värdera metoder och deras lämplighet i förhållande till en viss uppgift. Det handlar därmed inte bara om att erbjuda eleverna en repertoar av metoder, utan också om att ge stöd för att eleverna utvecklar förståelse för metoders tillämpning så att dessa kan användas på ett flexibelt och framgångsrikt sätt (Gray, 1991; Heinze m.fl., 2009). Interventioner med yngre elever har visat att metoder som har lärts i tidig ålder är svåra att ändra, även om eleverna deltar i undervisning och får tillgång till mer avancerade och utvecklingsbara metoder (Cheng, 2012).

Synliggöra matematiska samband

Att kunna se samband, relationer och generella principer är utmärkande för den som har en utvecklad matematisk förmåga. Elever som kan se bortom specifika exempel, metoder eller representationer lyckas oftare bättre i matematik än de som enbart fokuserar på processer och inte kan se mönster och samband (Gray m.fl., 1999). Om undervisningen lyfter fram samband och relationer, ger den eleverna möjlighet att kunna göra generaliseringar vilket är centralt inom matematiken (se Venkat & Askew, 2018). Men medan en lärare kan se det generella i ett enstaka exempel, att det är ett exempel *på* något, kanske eleven bara har det specifika exemplet i fokus (Mason & Pimm, 1984). Valet av exempel och hur dessa behandlas blir därför avgörande för om eleverna ska kunna generalisera (Rowland, 2008; Zazkis m.fl, 2008). Antalet exempel är emellertid inte avgörande (även om det behövs minst två). Istället är det karaktären i den ”serie” eller grupp av exempel och om dessa behandlas som enskilda exempel eller jämförs som blir viktigt för om mönster och samband ska framträda (Goldenberg & Mason, 2008; Schifter, 2011; Watson & Mason, 2006b;).

När lärare använder olika medierande redskap görs matematiken mer begriplig för eleverna. Detta grundar sig i en syn på matematik som ett nätverk av begrepp som är sammanflätade och som behöver pekas ut för eleverna (Vygotsky, 1987). Watson och Mason (2006b) har bland annat visat betydelsen av att lärare systematiskt väljer och pekar ut strukturella likheter mellan exempel vilket bidrar till att lyfta blicken från en enskild uppgift till att se generella drag och principer som kan tillämpas utanför det aktuella problemet. Ekdahl m.fl. (2016) har visat hur kopplingar som samtidigt görs både inom och mellan representationer öppnar upp för en begreppsligt djupare förståelse. För att möjliggöra detta menar de att läraren bör använda gester, verbala uttryck (och notationer) för att peka ut kopplingarna för eleverna.

Stöttning av elevinspel och matematiskt resonemang

Att bli deltagare i en praktik (se Lave, 1993; Lave & Wenger, 1991), som i vårt fall handlar om att ingå i ett sammanhang där eleven förväntas utveckla matematikfärdigheter, går i linje med den svenska läroplanen som betonar kommunikativa former för lärande i syfte att eleverna ska lära sig att argumentera och resonera om ett kunskapsinnehåll (se Skolverket, 2022). Detta kan inkludera, men också gå utanför, ett så kallat IRE-mönster i interaktionen mellan lärare och elev (IRE = Initiera, Respondera, Evaluera). Elevers möjligheter att lära sig grundar sig då både i lärarens förmåga att ställa frågor och i att följa upp och utveckla elevers svar och inspel i undervisningssituationen (Murata, 2015). De frågor som används i undervisningen kan ha olika syften De kan användas för att kontrollera faktakunnande, men de kan också ha ett utvecklande syfte, det vill säga att frågorna leder till resonemang och nyansering av innebörder, vilket gynnar elevernas lärande och fördjupade förståelse för innehållet (DeJarnette m.fl., 2020). Frågor som bjuder in eleverna till diskussion kring ett matematiskt innehåll anses vara ett sätt att stötta och utveckla elevers lärande (DeJarnette m.fl., 2020; Murata, 2015). Detta hänger nära samman med att värdera och erbjuda lösningsmetoder, det vill säga att ta vara på de metoder som eleverna använder och erbjuda sådana som är mer hållbara och generaliserbara. Likaså är lärarens stöttning av elevinspel knutet till de matematiska resonemang som kan härledas och även utvecklas utifrån elevernas förslag viktigt (Venkat & Askew, 2018). Det vill säga, att läraren bekräftar och stöttar elevers resonemang med förklaringar eller värderar svaren utifrån deras ändamålsenlighet.

Sammanfattningsvis framgår det i tidigare forskning att en undervisning där artefakter och exempel eller uppgifter är valda så att mönster av likheter och skillnader framträder, ger elever möjlighet att lära sig om matematiska samband och relationer. På samma sätt kan en undervisning som erbjuder matematiska problem som öppnar för en variation av lösningsmetoder, och därmed erbjuder en mångfald av tillvägagångsätt, visa på metodernas olika generella karaktär. En undervisning som erbjuder detta antas lägga grunden för progression i elevernas lärande och förbereda dem för fortsatt matematikutbildning (Schifter & Russell, 2022). Detta kräver emellertid att läraren, med hjälp av verbala eller andra språkliga uttryck, visar på samband och egenskaper (Ekdahl, 2019) samt att olika lösningsförslag och metoder granskas utifrån lämplighet (Kullberg m.fl., 2014; Lannin, 2005).

Metod

Denna studie bygger på en analys av undervisningsobservationer i förskoleklass, vilka har kodats med hjälp av analysverktyget ”Mediating Primary Mathematics” (MPM) (Venkat & Askew, 2018), utvecklat för att identifiera kvalitativa skillnader i aspekter relaterade till undervisningsinnehållets mediering.

Deltagare och genomförande

Inför genomförandet av studien kontaktades skolhuvudmän och rektorer i tolv kommuner i södra Sverige, vars skolor erbjöds att delta i kartläggningen. Sammanlagt valde 56 skolor i tio av dessa kommuner att tacka ja. Skolorna är belägna i städer av varierande storlek och på mindre orter på landsbygden. Efter att skolhuvudmän och rektorer hade gett tillstånd svarade 105 lärare i förskoleklass ja till att medverka i observationsstudien, varav 10 senare avstod av olika skäl. Totalt kom vi att observera matematikundervisning i 95 förskoleklasser under höstterminen 2021. Antalet elever som deltog i den undervisning som observerades i dessa klasser varierade mellan 4 och 28 barn.

Fem forskare genomförde observationerna. Varje förskoleklass har besökts av en av forskarna vid ett undervisningstillfälle som den undervisande läraren själv hade valt ut. Lärarna hade på förhand informerats om att vi ville ta del av undervisning som syftade till att utveckla elevernas förståelse för tal, tals egenskaper och dess användning. Vid observationstillfället dokumenterades undervisningen genom fältanteckningar. Fokus riktades mot användningen av artefakter och notationer samt mot lärarens gester och verbala uttryck för att hantera (lösnings)metoder, matematiska samband och elevinspel i undervisningen. Vid några tillfällen togs också foton som komplement till fältanteckningarna. Vid databearbetningen av fältanteckningarna har varje undervisningstillfälle (n=95) delats in i en eller flera undervisningsepisoder. En ny undervisningsepisod definierades av att läraren markerade att ett nytt innehåll skulle behandlas i undervisningen, till exempel genom att säga: ”Nu går vi över till något annat”, eller på annat sätt signalerat ett byte av innehåll eller aktivitet. Vårt empiriska material består av totalt 145 sådana undervisningsepisoder som analyserats med MPM-verktyget.

MPM-verktyget som analysverktyg

MPM-verktyget har använts som analysverktyg för att studera och urskilja kvalitativa skillnader i aspekter relaterade till undervisningsinnehållets mediering. MPM-verktyget har utvecklats i en sydafrikansk kontext i syfte att beskriva kvaliteter i undervisningen om tal och aritmetik (Venkat & Askew, 2018). MPM-verktyget har sin grund i ett sociokulturellt perspektiv, vilket innebär att lärares handlande i undervisningssituationen samt hur läraren hanterar artefakter ses som centrala för att mediera innebörder till eleverna. Verktyget innehåller aspekter som används för att analysera undervisningen. Dessa är: I) artefakter, II) notationer och III) lärarens gester och verbala uttryck för att hantera a) metoder, b) matematiska samband och c) elevinspel [1]. Varje aspekt är indelad i fyra kvalitativt skilda nivåer (0–3), från den lägsta nivå (0) till den högsta nivån (3), där den högsta nivån karakteriseras av matematikundervisning med fokus på struktur och generalisering. Med hjälp av verktyget kan undervisningen beskrivas på en relativt detaljerad nivå (se t.ex. Askew, 2019) och identifiera matematikundervisning som fokuserar på struktur och generalisering (Venkat & Askew, 2018).

För att anpassa MPM-verktyget till den svenska förskoleklasskontexten med dess förutsättningar och målsättningar har vi gjort en justering i aspekt IIIc) genom att lägga till ”Stöttning av elevinspel och matematiska resonemang”. Justeringen innebär ett ökat fokus på hur läraren tar tillvara på elevinspel i undervisningen, bekräftar och stödjer elevernas resonemang med förklaringar samt värderar svar med hänsyn till deras relevans och ändamålsenlighet. Detta grundar sig i att matematikundervisningen i förskoleklass ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmågan att ”använda matematiska begrepp och resonemang för att kommunicera och lösa problem” (Skolverket, 2022, s.23). Vi har också valt att benämna de ursprungliga fyra kvalitativa nivåerna 0–3, inom respektive aspekt, för kategori A–D där kategori A motsvarar nivå 0 och kategori D motsvarar nivå 3. Ursprungligen användes MPM-verktyget för både kvalitativ och kvantitativ analys (t.ex. Askew, 2019), men eftersom vårt främsta intresse ligger i att beskriva kvalitativa skillnader, har vi valt att beteckna dem med bokstäverna A–D. I bilaga 1 finns den version av MPM-verktyget som vi har använt i denna studie. Där finns också empiriska exempel för samtliga kvalitativa kategorier för respektive aspekt framskrivna.

Fältanteckningarna från varje observerad undervisningsepisod (n=145) har kodats med hjälp av MPM-verktyget. Kvaliteten i undervisningen har kategoriserats enligt skalan A–D för respektive aspekt i MPM-verktyget (se bilaga 1). I de fall där undervisningen i en och samma undervisningsepisod har kodats i flera kvalitativa kategorier inom samma aspekt har detta dokumenterats i protokollet, men i denna studie redovisas enbart den kvalitativt “högsta” kategorin för respektive aspekt.

1 För en mer detaljerad beskrivning av dessa aspekter (strands), se Askew, 2018 s. 5.

Eftersom observationerna och analyserna har gjorts av flera forskare har vi arbetat kontinuerligt med att stämma av och kalibrera våra tolkningar och kodningar av undervisningsepisoderna. För att nå så hög överenstämmelse som möjligt i våra bedömningar har vi inför studiens genomförande vid flera tillfällen tittat på inspelad matematikundervisning från tidigare forskningsprojekt och Skolverkets Matematiklyftet[2] och dokumenterat det vi har sett individuellt. Därefter har vi gemensamt diskuterat våra dokumentationer och analyserat fältanteckningarna med hjälp av MPM-verktyget. Detta arbete har varit viktigt för att säkerställa tillförlitlighet i våra analyser och slutsatser.

Etiska överväganden

Vi har följt Vetenskapsrådets etiska riktlinjer (2017).[3] Skolhuvudmän, rektorer och lärare har fått skriftlig information om syftet med studien och att deltagandet är frivilligt. De lärare vars undervisning vi har observerat har gett informerat samtycke. All data som samlats in behandlas konfidentiellt och projektdatamaterialet förvaras i enlighet med Göteborgs universitets riktlinjer för hantering av forskningsdata. Deltagande lärare och skolor nämns inte vid namn i vetenskaplig rapportering och datamaterialet används enbart för forskningsändamål.

Resultat

Resultatet från kartläggningen av förskoleklassens matematikundervisning om tal, tals egenskaper och dess användning redovisas i två delar; 1) utfallet från analysen av de 145 undervisningsepisoderna med fokus på kvalitativa skillnader i hur det matematiska innehållet medieras i undervisningen och 2) ett empiriskt exempel som illustrerar de lärandemöjligheter vi har identifierat i en specifik undervisningssituation där det matematiska innehållet behandlas med högre kvalitet enligt analysen.

Kvalitativa skillnader i matematikundervisningen

Resultat av analysen visar på kvalitativa skillnader i hur det matematiska innehållet medieras utifrån hur I) artefakter och II) notationer används samt hur III) gester och verbala uttryck används för att hantera a) lösningsmetoder, b) matematiska samband och c) elevinspel i undervisningen om tal, tals egenskaper och dess användning.

I) Artefakter

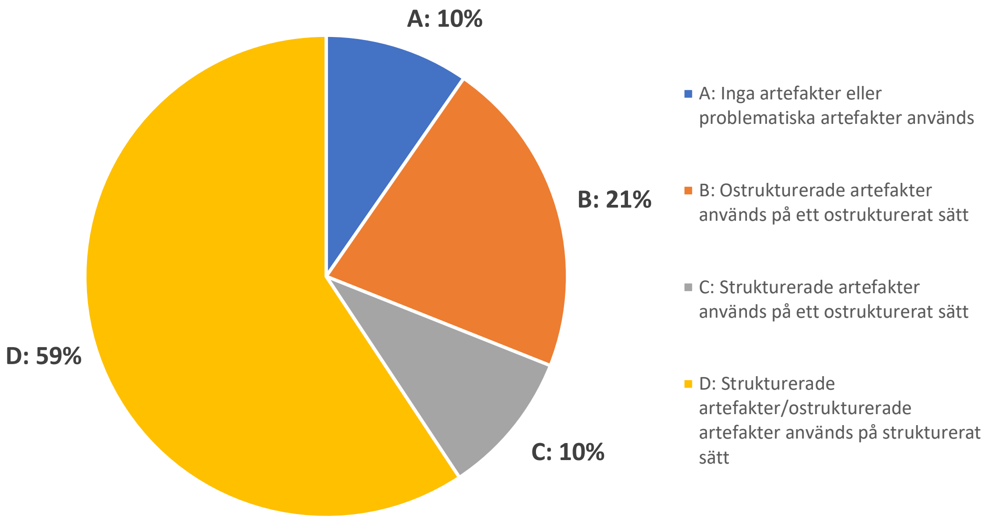
Analysen visar att artefakter är vanligt förekommande i matematikundervisningen om tal, tals egenskaper och dess användning. Artefakter används i 90 procent av de 145 analyserade undervisningsepisoderna (se figur 1, kategori B-D). Samtidigt visar analysen att det finns kvalitativa skillnader i *hur* artefakterna används för att mediera det matematiska innehållet. Drygt hälften (59%) av undervisningsepisoderna är kategoriserade som D, vilket innebär att strukturerade och/eller ostrukturerade artefakter som exempelvis pärlband och plockmaterial används på ett strukturerat sätt i undervisningen. Användningen av artefakterna öppnar upp för att strukturera tal så att matematiska samband och innebörder framträder. Det kan exempelvis innebära att plockmaterial ordnas i grupper om två, fem eller tio så att föremålen inte behöver räknas en och en. I cirka en femtedel (21%) av undervisningsepisoderna används ostrukturerade artefakter på ett ostrukturerat sätt (kategori B). I 10 procent av undervisningsepisoderna används istället

2 Se https://larportalen.skolverket.se, Förskoleklassen matematik (reviderad april 2018).

3 Rådgivande yttrande gällande studien har också inhämtats från Etikprövningsmyndigheten, diarienr. 2021-01055.

strukturerade artefakter på ett ostrukturerat sätt (kategori C). Både kategori B och C (tillsammans 31% av episoderna) innebär att artefakter används på ett sätt som inte skapar möjlighet att se matematiska strukturer. Det kan exempelvis handla om att plockmaterial inte ordnas i rader eller grupper så att en synlig struktur kan nyttjas för att bestämma antal.

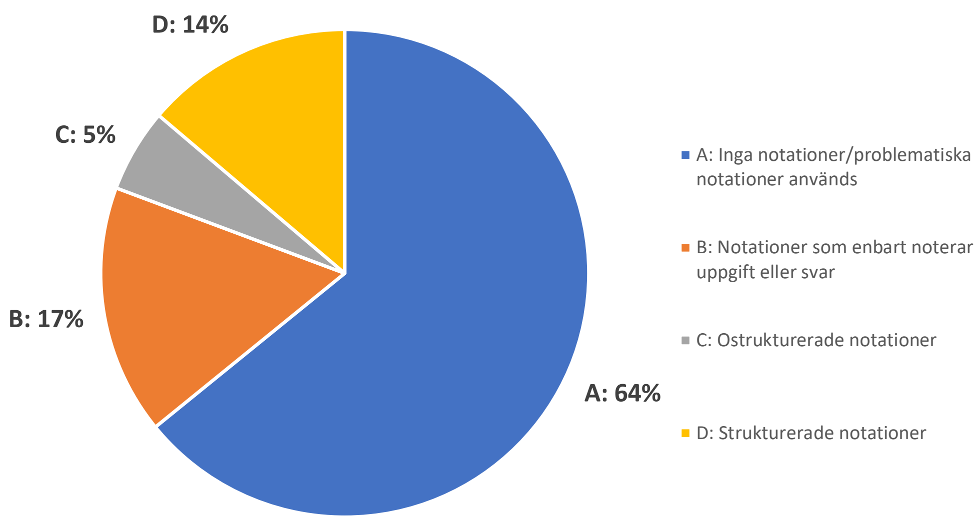
Figur 1
Användning av artefakter för att mediera det matematiska innehållet. Procentuell fördelning av andelen undervisningsepisoder inom respektive kategori A–D, n=145.



II) Notationer

Resultatet av analysen visar att det är vanligt att lärare inte gör några notationer alls i undervisningen. I cirka två tredjedelar (64%) av de 145 undervisningsepisoderna görs inga notationer (kategori A, se figur 2). Notationer förekommer endast i drygt en tredjedel (36%) av de analyserade undervisningsepisoderna (kategori B–D).

Figur 2
Användning av notationer för att mediera det matematiska innehållet. Procentuell fördelning av andelen undervisningsepisoder inom respektive kategori A–D, n=145.



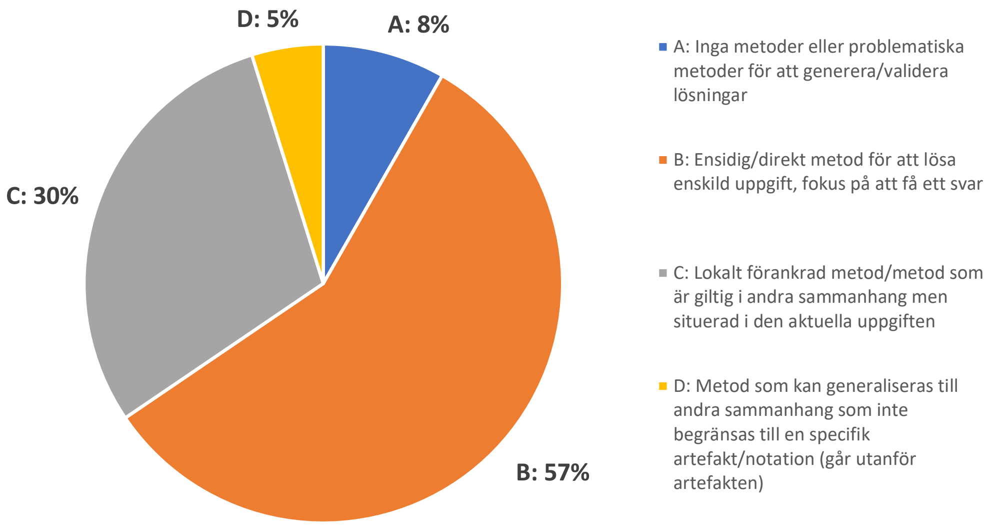
Hur notationerna görs och används av lärarna i dessa episoder skiljer sig åt. I 14 procent av undervisningsepisoderna används notationer på ett strukturerat sätt (kategori D), det vill säga att lärarna använder notationer för att illustrera och tydliggöra det matematiska innehållet genom att exempelvis räkna poäng och notera dessa på ett strukturerat sätt i grupper om fem på tavlan. I 17 procent av de analyserade undervisningsepisoderna använder lärarna notationer enbart för att dokumentera ett elevsvar eller förslag på tavlan (kategori B). Det finns också episoder (5%) där läraren använder notationer på ett ostrukturerat sätt (kategori C), exempelvis genom att räkna poäng och notera dessa som streck i en lång rad, vilket inte öppnar upp för att se antalet som en femstruktur.

IIIa) Lösningsmetod

Analysen visar att i endast drygt en tredjedel (35%) av de 145 undervisningsepisoderna lyfts lösningsmetoder fram på ett sådant sätt att olika metoder kan jämföras och värderas utifrån hur väl de fungerar eller om det finns mer eller mindre lämpliga sätt att hantera ett matematiskt problem (kategori C och D, se figur 3). I mer än hälften (57%) av undervisningsepisoderna används ensidiga eller direkta metoder, där fokus tycks ligga i att få fram ett korrekt svar för enskilda uppgifter och problematisering av metoder uteblir (kategori B). Ett exempel är när en grupp elever ombeds att bestämma antalet föremål på bildkort. Läraren frågar ”Hur många är det?” och samtliga elever bestämmer antalet genom att räkna föremålen ett och ett. Läraren stannar vid att bekräfta deras metod och utmanar dem inte att bestämma antalet på något annat sätt. Det förekommer också undervisningsepisoder där lösningsmetoder inte alls uppmärksammas eller där problematiska metoder används (kategori A, 8% av episoderna, se bilaga 1 för empiriskt exempel).

Figur 3

Hur metoder lyfts fram i undervisningen. Procentuell fördelning av andelen undervisningsepisoder inom respektive kategori A–D, n=145.

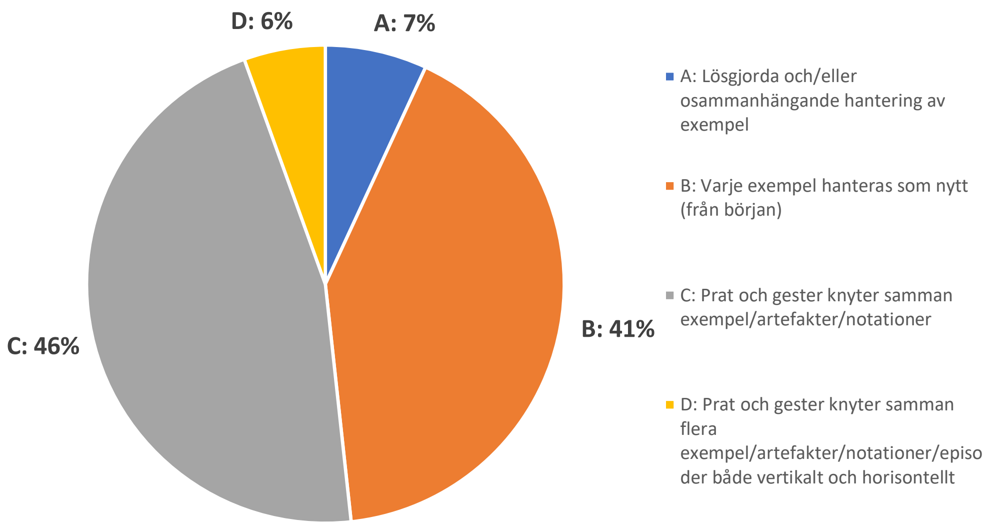


IIIb) Matematiska samband

Resultatet av analysen visar att i nästan hälften av de 145 undervisningsepisoderna (46%) uppmärksammas och pekas matematiska samband ut genom en systematisk variation av exempel, artefakter och notationer (kategori C, figur 4). Ett exempel är när en lärare använder talblock (1–10) och börjar med att visa talblocken för fyra och fem. Läraren frågar eleverna vad som är skillnaden mellan de två talblocken. En elev svarar att det ena är udda och det andra är jämnt. Läraren bekräftar detta och frågar hur man kan göra om man vill göra talblocken lika. Eleverna föreslår att man kan ta bort en på femman eller lägga till en på fyran. Läraren tar talblocket för ett och placerar ovanför fyran. Hon visar också att ett kan täckas över på femman för att få fyra. Genom att jämföra talblocken och både synliggöra och uttrycka på vilket sätt de skiljer sig åt, men också hur de är lika, synliggörs samband mellan fyra och fem. I en nästan lika stor andel av undervisningsepisoderna (41%) skulle matematiska samband ha *kunnat* uppmärksammas, men istället används exempel eller uppgifter isolerat utan kopplingar dem emellan (kategori B, se bilaga 1 för empiriskt exempel). Det förekommer också episoder där exempel hanteras som lösgjorda eller osammanhängande från varandra (kategori A, 7% av episoderna), vilket gör att det inte är möjligt att uppmärksamma eller visa på matematiska samband för eleverna. Endast i 6 procent av undervisningsepisoderna (kategori D) uppmärksammar lärare matematiska samband genom att knyta samman flera exempel så att samband både inom och mellan exempel och uppgifter lyfts fram. Ett exempel är från en undervisningssituation som handlar om tals del-helhetsrelationer. Läraren dokumenterar elevernas uppdelningar av fem med systematik på tavlan (0+5, 1+4, 2+3...). Läraren pekar ut relationen mellan talen för respektive kombination och jämför sedan de olika sätten att dela fem.

Figur 4

Hur matematiska samband lyfts fram i undervisningen. Procentuell fördelning av andelen undervisningsepisoder inom respektive kategori A–D, n=145.

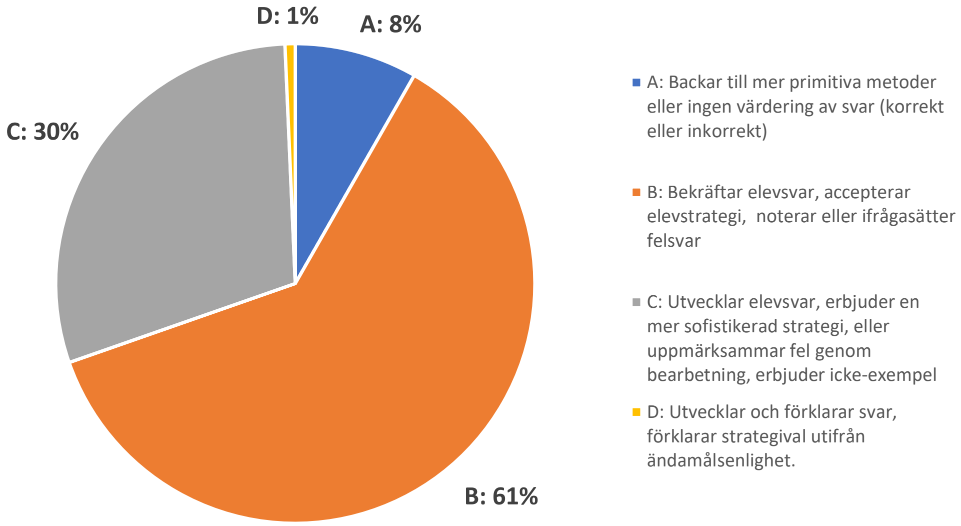


IIIc) Elevinspel

Elevinspel är vanligt förekommande i undervisningen, men tas till vara på olika sätt. I nästan två tredjedelar (61%) av de 145 undervisningsepisoderna (kategori B, se figur 5) ges eleverna begränsade möjligheter att bidra med inspel i annan form än kortare svar eller lösningsförslag. Dessa bekräftas kort av läraren som exempelvis nickar, upprepar svaret eller säger ”Bra”, men vidare bearbetning av det matematiska innehållet uteblir. Endast i knappt 1% av undervisningsepisoderna tar läraren till vara på elevinspel och utvecklar och förklarar dessa, samt motiverar strategival utifrån ändamålsenlighet för eleverna (kategori D, se bilaga 1 för empiriskt exempel). I 30 procent av undervisningsepisoderna tas elevinspel tillvara, bekräftas och utvecklas som del i undervisningen genom att läraren exempelvis erbjuder bearbetning av felsvar, en mer sofistikerad lösningsstrategi eller visar på icke-exempel (kategori C). I en undervisningsepisod ombeds eleverna visa åtta med fingrarna och eleverna gör det på lite olika sätt. Läraren upprepar, jämför sätten och resonerar tillsammans med eleverna (som får motivera sina svar) om vilket sätt som är lättast att ”se åtta” utan att man ska behöva kontrollräkna att det är åtta. Därefter visar läraren fem fingrar på en hand och fyra på den andra som ett icke-exempel och frågar om det också är åtta fingrar. I 8 procent av undervisningsepisoderna (kategori A) ser vi att värdering av elevinspel helt uteblir, oavsett om dessa är korrekta eller ej.

Figur 5

Hur elevinspel tas tillvara i undervisningen. Procentuell fördelning av andelen undervisningsepisoder inom respektive kategori A–D, n=145.



Konklusion

Med stöd i MPM-verktyget har vi kunnat identifiera kvalitativa skillnader i undervisning om tal, tals egenskaper och dess användning. Sammantaget framträder en bild som visar på en stor variation i hur detta matematiska innehåll medieras i undervisningen. Artefakter förekommer ofta, men de används inte alltid på ett sätt som öppnar upp för att synliggöra matematiska samband och innebörder. Vidare visar resultatet av analysen att lösningsmetoder sällan får stå i centrum för undersökning, jämförelse och värdering i undervisningen. Kartläggningen har också visat att elevinspel ofta bekräftas, samtidigt som det blir tydligt att undervisningen sällan erbjuder utveckling och bearbetning av dessa. Flera goda undervisningsexempel har observerats samtidigt som vi också har identifierat flera potentiella utvecklingsområden.

Identifiering av lärandemöjligheter

I det följande beskrivs vilka lärandemöjligheter som framträder i en av de undervisningssituationer som har observerats och kodats med stöd i MPM-verktyget. Vår avsikt är att konkret illustrera hur en undervisning, där det matematiska innehållet enligt analysen behandlas med högre kvalitet, kan vara utformad. Exemplet som har valts visar hur undervisningshandlingar som gynnar utveckling av elevernas förståelse för lösningsmetoder och matematiska samband kan vara utformade. Vi kommer att beskriva hur artefakter och notationer nyttjas av läraren för att mediera det matematiska innehållet. Vidare beskriver vi hur läraren genom verbala uttryck och gester hanterar och gör metoder och matematiska samband till del i undervisningen, samt hur elevinspel tas tillvara av läraren.

Undervisning om talet fems del-helhetsrelationer – ett empiriskt exempel

I undervisningen undersöktes talet fems del-helhetrelationer, det vill säga hur helheten fem kan delas upp i två delar på olika sätt. Läraren inledde med att introducera uppdelning av fem i två aktiviteter i helklass. De inledande aktiviteterna följdes av en paruppgift där eleverna skulle hitta samtliga uppdelningar för fem. I en avslutande gemensam aktivitet redovisades och summerades sedan de olika uppdelningarna som eleverna hade hittat.

1.) Att undersöka olika sätt att dela upp fem

> Fem elever ställer sig vid läraren. De får i uppgift att själva välja om de vill stå eller sitta. Läraren frågar övriga elever hur många elever som står respektive sitter, samt hur många de är tillsammans. Övningen upprepas med olika antal elever som står och sitter, men alltid med totalt fem elever.

I denna första aktivitet involverades eleverna genom att själva välja om de ska stå eller sitta. Läraren hade därmed inte kontroll över vilka sätt att dela upp fem som kom att undersökas, de genererades slumpvis och flera av uppdelningarna upprepades vid ett flertal tillfällen. Vid varje uppdelning frågade läraren efter de antal som skapades av elevernas val att stå eller sitta: ”Hur många står upp?” eleverna gav unisont rätt svar: ”Fyra”. Läraren frågade vidare ”Hur många sitter ner?” och fick unisont rätt svar: ”En”. Om läraren hade stannat vid detta, det vill säga om eleverna endast hade bestämt och benämnt antalet elever som stod respektive satt, skulle visserligen talen framträda som bestämning av antal, men inte att de hade en relation till varandra och till helheten fem. Läraren fortsatte emellertid med att fråga: ”Vad blir fyra och en?”. Eleverna svarar: ”Fem”. Uppmärksamheten riktades då mot hur talen (representerade av elever som står/sitter) kan ses som delar i en större helhet (fem). Det finns ett matematiskt samband vilket pekades ut med utgångspunkt i elevernas förslag. På detta sätt tas elevernas inspel tillvara, utvecklas och förklaras som talens del-helhetsrelation. Proceduren upprepades tills alla uppdelningar av fem hade gestaltats av eleverna. Att de hade hittat alla uppdelningar tydliggjordes däremot inte av läraren och eftersom varje uppdelning hanterades som ny, medierades inte sambandet mellan de olika uppdelningarna av fem explicit i aktiviteten.

2.) Att identifiera alla sätt att dela upp fem

> Fem grodor delas upp mellan en elev och ”lilla Kanin”. Eleven väljer själv uppdelning. Läraren uppmärksammar att dela fem i två delar på olika sätt. Läraren poängterar att delarna alltid är fem tillsammans. Aktiviteten avslutas när alla sätt att dela upp fem har prövats.

I denna andra aktivitet fortsatte undersökandet av olika sätt att dela upp fem, men denna gång mer systematiskt i och med att läraren uppmanade eleverna att en åt gången (men gärna med hjälp av varandra) dela fem grodor på olika sätt mellan sig och ”lilla Kanin”. Varje elev fick bestämma vilken uppdelning de ville göra. Det blev därmed ingen planerad systematik i de enskilda undersökningarna, men däremot låg de olika uppdelningarna av grodor kvar på mattan och kunde på så sätt jämföras med varandra (till skillnad från uppdelningen stå-sitta i föregående aktivitet), vilket gav stöd för eleverna att genom artefakterna, hitta nya sätt att dela helheten fem. Även i denna aktivitet synliggör läraren genom gester och verbala uttryck att uppdelningen i två tal tillsammans är fem. En elev delade tre grodor till sig och två grodor till “lilla Kanin”. Läraren sa: ”Tre och två, vad är tre och två?” Eleven svarade: ”Fem”. Läraren kunde ha nöjt sig med att bekräfta elevens svar, men utvecklade svaret vidare genom att knyta an till del-helhetsrelationen då hon konstaterade att ”Ni har fem grodor tillsammans”. Läraren både bekräftar och utvecklar elevsvaret genom att poängtera ”tillsammans”. Betoningen på det matematiska sambandet mellan delarna och helheten är återkommande i aktiviteten. Det finns ett begränsat antal sätt som fem kan delas i och elevernas förslag undersöktes inom dessa ramar tills alla alternativ hade gestaltats. När alla sätt att dela upp fem hade hittats, knöt läraren samman alla exempel genom att uttrycka: ”Nu har vi kommit på alla sätt man kan dela grodorna på”.

3.) Att systematisk undersöka alla sätt att dela upp fem i två delar

> Läraren demonstrerar artefakterna som ska användas i aktiviteten: en röd och en blå cirkel (symboliserar skålar) samt fem identiska frukter. Eleverna delas in i par och får i uppgift att dela upp de fem frukterna på olika sätt i skålarna och notera uppdelningarna i sina skrivhäften.

I denna tredje aktivitet fick eleverna på egen hand undersöka uppdelningar av fem genom att använda artefakter. Figur 6 visar en av uppdelningarna som ett av elevparen gjorde där tre frukter placerats i den blå skålen och två frukter i den röda skålen.

Figur 6

En uppdelning av fem skapad av ett elevpar. Tre frukter har placerats i en ring formad av ett blått snöre (symbliserar en blå skål) och två frukter i en ring av rött snöre (symbilserar en röd skål).

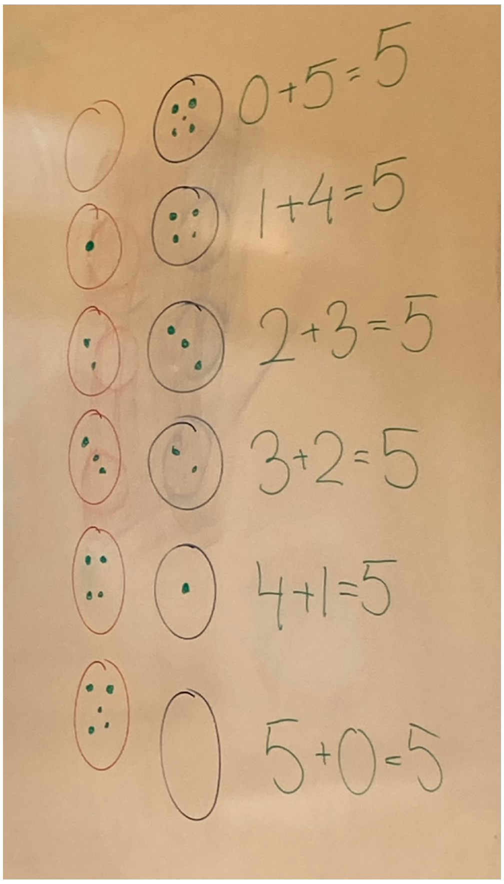
Att dela fem på olika sätt tedde sig inte särskilt svårt för de flesta eleverna, så läraren utmanade dem att hitta samtliga uppdelningar av fem. Detta kräver någon form av systematisk metod för att pröva och kontrollera om alla sätt är funna. Läraren var aktiv när elevparen arbetar tillsammans och erbjöd dem lösningsmetoder som pekade på systematik. Exempelvis, en elev hade ritat skålarna i oordning i sitt häfte för att dokumentera de sätt att dela fem i två delar som hade hittats och hade därför svårt att se vilka kombinationer som hen har hittat och om det fanns fler lösningar som ännu inte hade prövats. Läraren uppmärksammade eleven på problemet som kan uppstå: ”Hur vet du vilka fruktskålar som hör ihop?” och gav sedan förslag på en mer sofistikerad lösningsmetod baserad på elevernas lösning: ”Rita skålarna bredvid varann så är det lätt att se sen”. Förslaget innehöll en motivering ”så är det lätt att se”, det vill säga en förklaring till varför den föreslagna metoden är användbar för att lösa uppgiften. Genom att motivera varför en mer systematisk metod, som kan generaliseras till andra sammanhang, är att föredra, pekar läraren också ut mindre lämpliga lösningsmetoder. Läraren visade ett annat elevpar hur de systematiskt kunde kontrollera om de hade prövat alla sätt att dela upp frukterna, genom att nyttja artefakterna på ett strukturerat sätt och flytta en frukt åt gången från en skål till den andra: ”Har ni ritat så, har ni ritat så…? Om vi testar att flytta en åt gången, vad är det för skillnad?” Läraren stannade särskilt upp vid att flytta en frukt fram och tillbaka flera gånger mellan skålarna i uppdelningen 3+2 och 2+3. Lärarens föreslagna lösningsmetod utgjorde en kontrast till elevernas ostrukturerade undersökande. Skillnaden mellan metoderna framträdde när eleverna såg möjligheten att kontrollera sina svar och huruvida någon uppdelning saknas. Genom det systematiska överflyttandet av frukter och att särskilt stanna upp vid 3+2 och 2+3, där läraren uppmanade eleverna att se vad skillnaden var, pekas också principen om kommutativitet ut, men utan att detta benämns som sådan.

4.) Att skapa en systematisk överblick över alla sätt att dela upp talet fem

> I helgrupp ger eleverna förslag på de uppdelningar av fem som de funnit och dokumenterat i sina skrivhäften under paraktiviteten. Läraren noterar elevernas förslag på tavlan, dels med prickar ordnade i tärningsmönster i blå och röda cirklar, dels med symboler. Uppdelningarna skrivs på tavlan så att de bildar en ordning uppifrån och ner: 0+5, 1+4, 2+3, 3+2, 4+1, 5+0.

I denna sista aktivitet knöt läraren samman de uppdelningar av fem som hade gjorts i de föregående aktiviteterna tillsammans med eleverna. Läraren utgick från den tidigare konstaterade begränsningen, att det finns totalt sex olika sätt att dela upp fem. På tavlan ritade läraren sex par med cirklar (en röd och en blå i varje par) ordnade under varandra. Läraren frågade: ”Hjälp mig, hur många kan det vara i den röda?”. En elev föreslog: ”En i blåa och fyra i andra, men nu bytte jag tvärtom”. Läraren sa: ”En i röda, fyra i blåa”, noterade med prickar och symboler på tavlan och sa: ”Och ett plus fyra är lika med?” Eleverna svarade i kör: ”Fem”. För kommunikationen är skålarnas färg viktig. Den hjälper till att särskilja delarna från varandra och sätta ord på vilken del man avser. Läraren frågade efter fler förslag och noterade dessa både som prickmönster i cirklarna och med siffersymboler bredvid på ett strukturerat sätt (se figur 7). Genom att använda prickar och siffersymboler ges uppdelningarna en mer abstrakt framtoning, vilket vidgar elevernas konkreta fruktdelning till semiabstrakta (prickar i form av tärningsmönster) och abstrakta (siffror och symboler) representationer. Elevernas förslag på delningar noterades av läraren som samtidigt sorterade dem så att systematik framträder. Läraren tog fasta på elevinspelen och utvecklade dem för att synliggöra de sex möjliga uppdelningarna. När eleverna hade givit förslag på fyra uppdelningar uppmanade läraren eleverna att ”Titta på dom röda” och pekade samtidigt på en cirkel i taget i kolumnen med röda cirklar där prickar var inritade. Eleverna sa i talkör: ”noll, två, fyra, fem”. Läraren frågade: ”Vad saknar vi? [någon elev ger förslag]. Tre i den röda, hur många i den blå då?”. Läraren använde gester och verbala uttryck för att visa att det fanns ett samband mellan uppdelningarna, som kunde urskiljas när de hade ordnats systematiskt. Det är emellertid inte självklart att notationerna på tavlan gjorde att systematiken framträdde för alla elever, varför läraren riktade uppmärksamheten mot den ordning som talen hade placerats i där ”luckor” i talraden kunde upptäckas. Hon sa: ”Titta på dom röda”. Läraren pekade alltså ut en metod för att eleverna skulle få syn på de uppdelningar som saknas. Att nöja sig med att eleverna hade givit förslag tills alla uppdelningar hade sagts eller noterats utan systematik på tavlan skulle knappast ha varit tillräckligt för de flesta elever för att upptäcka detta samband. Istället behövde sambandet mellan de föreslagna uppdelningarna pekas ut och knytas ihop vilket blev möjligt tack vare att notationerna fanns kvar på tavlan under hela aktiviteten och byggdes på så att alla förslag var synliga samtidigt. På så sätt skapades en översikt av alla sätt att dela upp helheten fem. För även om läraren föreslog för eleverna att använda en systematisk metod för att kontrollera sina uppdelningar av fem i paruppgiften, saknades en strukturerad översikt i de flesta av elevhäftena. Avslutningsvis sammanfattade läraren: ”Nu har vi kommit på alla sätt. Ni skulle kunna skriva i era häften vid fruktskålarna också”. Det sistnämnda gjorde att det som systematiskt hade noterats på tavlan också har koppling till det som eleverna tidigare hade undersökt med artefakterna och dokumenterat i sina skrivhäften. Sammantaget gav läraren vid flera tillfällen förslag på (lösnings)metoder som gav stöd för ett mer systematiskt utforskande av del-helhetsrelationer för fem i undervisningen. Det fanns även inslag av motivering – varför en metod är att föredra framför en annan.

Figur 7
Lärarens dokumentation på tavlan över elevernas förslag på hur fem kan delas på olika sätt.



Konklusion

Sammantaget var undervisningen sådan att, när eleverna och läraren tillsammans undersökte hur helheten fem kan delas i två delar på olika sätt och satte uppdelningarna i relation till varandra, blev nödvändiga matematiska samband tydliggjorda. Förutom att läraren utvecklade och förklarade elevernas svar, gjordes de matematiska sambanden synliga genom att olika artefakter användes. Lärarens nyttjade verbala uttryck och systematiska notationer för att synliggöra den gemensamma innebörden.

Diskussion

I denna studie har vi riktat uppmärksamhet mot kvaliteten i förskoleklassens matematikundervisning och vad elever ges möjlighet att lära om tal, tals egenskaper och dess användning. Genom att analysera matematikundervisningen med MPM-verktyget har vi kunnat beskriva kvaliteten i den mediering som identifierats. Undervisningskvalitet kan givetvis bedömas utifrån olika kriterier. Vår utgångspunkt har varit de kriterier som MPM-verktyget erbjuder. Dessa fokuserar på aspekter som har att göra med i vilken utsträckning elever erbjuds och engageras i en undervisning om tal, tals egenskaper och dess användning som involverar metoders styrkor, begränsningar och generella egenskaper samt lyfter fram matematiska samband och relationer. En sådan undervisning, menar vi, bidrar till progression och förbereder eleverna för fortsatt utbildning, men utan att det innebär en "skolifiering" av förskoleklassens verksamhet (se t.ex. Ackesjö & Persson, 2010). Vår studie visar att elevernas utforskande inte behöver stå i motsats till en undervisning som lyfter fram innehållsliga aspekter på ett sätt som lägger grund för en progression av matematisk förståelse.

Resultatet av kartläggningen av ett stort antal undervisningsepisoder, avtäcker en stor variation i hur det matematiska innehållet medieras och därmed vad elever ges möjlighet att lära. Ur likvärdighetssynpunkt ser vi detta som ett problem. Den bild av förskoleklassens matematikundervisning som vi har beskrivit, visar emellertid också att det finns en utvecklingspotential i de aktiviteter som eleverna möter. Det behöver därför inte handla om att skapa nya aktiviteter, utan om att nyttja väl valda artefakter och mediera det matematiska innehållet på ett sådant sätt att metoder, samband, struktur och generalisering blir synliga för eleverna. Exempelvis, istället för att i en undervisningssituation behandla varje exempel eller uppgift var för sig, kan kopplingar mellan dessa göras och matematiska samband kan lyftas fram. En sådan undervisning bidrar till elevers utveckling av hållbara och utvecklingsbara sätt att förstå tal. Genom att rikta uppmärksamhet mot strukturer hos tal (t.ex. del-helhetsrelationer) stöttas elevernas förståelse av hur aritmetikuppgifter kan lösas på effektiva sätt med lämpliga (och hållbara) metoder (Watson & Mason, 2006a). De val av exempel, uppgifter, artefakter och notationer som görs och sättet som dessa används på är således av stor betydelse för de lärandemöjligheter som eleverna erbjuds i matematikundervisningen.

Det empiriska exempel som har presenterats i resultatdelen är valt för att exemplifiera en undervisning som har denna karaktär, men som också ger utrymme för eleverna att pröva och upptäcka matematiken. I fyra aktiviteter uppmanades eleverna att skapa uppdelningar av talet fem. Det fanns en tydlig progression mellan aktiviteterna, och fokus riktades mot de relevanta matematiska sambanden för att synliggöra talets del-helhetsrelationer. Även om de fyra aktiviteterna kan ses som separata undervisningsmoment, utgör de tillsammans en helhet där matematiska samband hos talet fem undersöks på olika sätt och leder fram till en sammanhållen och systematisk undersökning av dess del-helhetsrelationer. Eleverna utmanades att hitta samtliga uppdelningar och att pröva sig fram, samtidigt som läraren erbjöd och motiverade alternativa och mer generaliserbara lösningsmetoder. Eleverna stöttades i att ett problem kan hanteras och lösas på olika sätt, med metoder som är mer eller mindre lämpliga och hållbara. Resultatet av kartläggningen visar dock att lösningsmetoder sällan uppmärksammas på ett sådant sätt att de blir föremål för undersökning, jämförelse och värdering i undervisningen. Därmed finns en risk att fokus hamnar på att få fram rätt svar och att eleverna inte ges stöd i att utveckla förståelse för metoders tillämpning och hur dessa kan utvecklas och användas på ett flexibelt och framgångsrikt sätt. Tidigare forskning har visat att metoder som befästs i tidig ålder är svåra att ändra (Cheng, 2012). Därför är det viktigt att även de yngsta eleverna får möta och utveckla effektiva och hållbara metoder för att lösa problem.

Förskoleklassen är relativt ny som en obligatorisk del av svenska elevers utbildning och skrivningen i dess styrdokument är delvis av annan karaktär än grundskolans. Vad läroplanens skrivning om kontinuitet och progression i lärandet i förskoleklass kan innebära och hur det ska kombineras med att ta vara på elevernas nyfikenhet och intresse framgår inte. Vi ser därför detta som en stor utmaning för förskoleklassens lärare och något som måste uppmärksammas och diskuteras. Denna studie kan ses som ett inspel i denna diskussion.

Kartläggningens styrka ligger i att ett stort antal förskoleklassers (n=95) undervisning (totalt 145 undervisningsepisoder) har undersökts. Bredden på skolornas karaktär, geografiska och demografiska spridning är tillräckligt stor för att ge en god bild av matematikundervisningen om tal, tals egenskaper och dess användning i förskoleklassen. Lärarna har själva valt och på förhand planerat den undervisningssituation som observerades. Det är möjligt att förberedelse och planering påverkades av vetskapen om att undervisningen skulle observeras, och att den därför kan skilja sig från det sätt som den vanligen genomförs. Men den bild som vi tecknar, visar hur matematikundervisning i förskoleklass *kan* se ut och hur den kan variera.

MPM-verktyget visade sig vara ett användbart och kraftfullt verktyg för att fånga innehållsliga delar av undervisningen och kvalitativa aspekter av denna. Den variation som vi har funnit kan givetvis diskuteras. Att varje undervisningsepisod under en lektion skulle kunna kategoriseras som kategori C eller D är inte troligt. Exempelvis kan (och bör kanske) inte alla elevinspel alltid följas upp och utvecklas och ibland är det givetvis relevant att uppmärksamma en metod utan att dra generella slutsatser om den, vilket vårt empiriska exempel har visat. Men om eleverna möter undervisning där metoder och matematiska samband sällan eller aldrig görs till föremål för undervisning, menar vi, att elevernas lärandemöjligheter blir begränsade. Vad de elever som har deltagit i den matematikundervisning som vi har kartlagt och analyserat faktiskt har lärt sig har vi inte undersökt, inte heller deras upplevelser av undervisningen. Detta är något som kommande forskning skulle kunna studera.

Tack

Studien är genomförd inom projektet SATSA som finansieras av Vetenskapsrådet (diarienummer 2020-03712).

Referenser

Ackesjö, H. (2010). Förskoleklasslärare som gästarbetare. Gränsmarkeringar via sociala stängningar. *Nordisk barnehageforskning*, *3*(1), 1–16. https://doi.org/10.7577/nbf.253

Ackesjö, H. (2014). *Barns övergångar till och från förskoleklass. Gränser, identiteter och (dis-) kontinuiteter.* [Doktorsavhandling, Linnéuniversitetet]. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:738484/FULLTEXT01.pdf

Ackesjö, H. & Persson, S. (2010). Skolförberedelse i förskoleklass: Att vara lärare-i-relation i gränslandet. *Pedagogisk forskning i Sverige*, *15*(2/3), 142–163.

Alatalo, T. (2017). Förskollärares och grundskollärares uppfattningar om undervisning och lärande i förskoleklass. *Pedagogisk forskning i Sverige*, *22*(1–2), 79–100.

Alibali, M. W., Young, A. G., Crooks, N. M., Yeo, A., Wolfgram, M. S., Ledesma, I. M., Nathan, M. J., Church, R. B. & Knuth, E. J. (2013). Students learn more when their teacher has learned to gesture effectively. *Gesture*, *13*(2), 210–233. https://doi.org/10.1075/gest.13.2.05ali

Arnell, S. (2021). *Elevers möten med matematik: En studie om elevers möten med matematik i förskoleklass och årskurs 1.* [Doktorsavhandling, Linköpings universitet]. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1581189/FULLTEXT02.pdf

Askew, M. (2019). Mediating primary mathematics: measuring the extent of teaching for connections and generality in the context of whole number arithmetic. *ZDM Mathematics Education*, *51*(1), 213–226. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0065-9

Baroody, A. & Purpura, D. (2017). Early number and operations: Whole numbers. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 308–354). National Council of Teachers of Mathematics.

Björklund, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kullberg, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 1–13, https://doi.org/10.1007/s11858-020-01177-3

van Bommel, J. & Palmér, H. (2021). Enhancing young children's understanding of a combinatorial task by using a duo of digital and physical artefacts. *Early Years*, *41*(2–3), 218–231. https://doi.org/10.1080/09575146.2018.1501553

Carpenter, T. P., Moser, J. M. & Romberg, T. A. (Red.). (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Lawrence Erlbaum.

Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 29–47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.002

Clements, D. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach* (3:e uppl.). Routledge.

Coles, A. (2017). A relational view of mathematical concepts. I E. de Freitas, N. Sinclair & A. Coles (Red.), *What is a mathematical concept?* (s. 205–222). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781316471128.013

DeJarnette, A., Wilke, E. & Hord, C. (2020). Categorizing mathematics teachers' questioning: The demands and contributions of teachers' questions. *International Journal of Educational Research*, *104*, 101690. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2020.101690

Ekdahl, A.-L. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections.* [Doktorsavhandling, Jönköping University]. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1372663/FULLTEXT01.pdf

Ekdahl, A.-L., Venkat, H. & Runesson, U. (2016). Coding teaching for simultaneity and connections. Examining teachers' part-whole additive relations instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 293–313. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9700-0

Ellemor-Collins, D. & Wright, R. B. (2009). Structuring numbers 1 to 20: Developing facile addition and subtraction. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 50–75. https://doi.org/10.1007/BF03217545

Goldenberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with examples spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 183–194. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9143-3

Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 551–574. https://doi.org/10.1007/BF00312715

Gray, E., Pitta, D. & Tall, D. (1999). Objects, actions, and images: A perspective on early number development. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 401–413. https://doi.org/10.1007/s11858-018-1010-9

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. I A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev & S. S. Miller (Red.), *Vygotsky´s educational theory in cultural context* (s. 15–38). Cambridge University Press.

Kullberg, A., Runesson, U. & Mårtensson, P. (2014). Different possibilities to learn from the same task. *PNA*, *8*(4), 139–150.

Lago, L. (2014). *Mellanklass kan man kalla det: Om tid och meningsskapande vid övergången från förskoleklassen till årskurs ett*. [Doktorsavhandling, Linköpings universitet]. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:713228/FULLTEXT01.pdf&sa=U&ei=ANdwU7j8GIf8ywPqoYGYAg&ved=0CCMQFjAB&usg=AFQjCNGl2eAClqY5--kPLCPvH8JhE43R3A

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231–258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lave, J. (1993). The practice of learning. I S. Chaiklin & J. Lave (Red.), *Understanding practice. Perspectives on activity and context* (s. 3–32). Cambridge University Press.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277–289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Murata, A. (2015). Interactions between teaching and learning mathematics in elementary classrooms. I D. Scott & E. Hargreaves (Red.), *The SAGE Handbook of learning* (s. 233–242). SAGE Publications Ltd.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 149–163. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9148-y

Sandberg, G. (2012). *På väg in i skolan. Om villkor för olika barns delaktighet och skriftspråkslärande*. [Doktorsavhandling, Uppsala universitet]. http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:561240/FULLTEXT01

Schifter, D. (2011). Examine the behavior of operations noticing early algebra ideas. I M. G. Sherin, V. R. Jacobs & R. A. Philipp (Red.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (s. 204–202). Routledge.

Schifter, D. & Russell, S. (2022). The centrality of student generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM Mathematics Education*, *54*(6), 1289–1302. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.

Simeonsdotter Svensson, A. (2009). *Den pedagogiska samlingen i förskoleklassen. Barns olika sätt att erfara och hantera svårigheter.* [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet]. https://gupea.ub.gu.se/bitstream/handle/2077/19098/gupea_2077_19098_2.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Skolverket. (2022). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet – Lgr22*. https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Sterner, G., Wolff, U. & Helenius, O. (2020). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *64*(5), 782–800. https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579

Venkat, H. & Askew, M. (2018). Mediating primary mathematics: Theory, concepts, and a framework for studying practice. *Educational Studies in Mathematics*, *97*, 71–92. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9776-1

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 13–17.
Vennberg, H. (2020). *Att räkna med alla elever. Följa och främja matematiklärande i förskoleklass*. [Doktorsavhandling, Umeå universitet]. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1413144/FULLTEXT01.pdf
Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.* [Elektronisk resurs]
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
Vygotsky, L. S. (1987). *The collected works of L. S. Vygotsky, Vol. 1: Problems of general psychology, including the Volume Thinking and speech* (R. W. Rieber & A. S. Carton (Red.), översatt av N. Minick). Plenum.
Watson, A. & Mason, J. (2006a). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 91–111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1
Watson, A. & Mason, J. (2006b). Variation and mathematical structure. *Mathematics Teaching*, *194*, 3–5.
Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. Oxford University Press.
Westerholm, K. & Samuelsson, J. (2020). Att utveckla god taluppfattning hos alla elever i förskoleklass - en interventionsstudie i matematik. *Forskning om undervisning och lärande*, *2*(8), 46–68.
Wettergren, S., Eriksson I. & Tambour, T. (2021). Yngre elevers uppfattningar av det matematiska i algebraiska uttryck, *LUMAT*, *9*(1), 1–28. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1377
Wästerlid, C. (2020). Conceptual subitizing and preschool class children's learning of the part-part-whole relations of number. *Problems of Education in the 21st Century*, *78*(6), 1038–1054. https://doi.org/10.33225/pec/20.78.1038
Zazkis, R., Liljedahl, P. & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 131–141.

Författarpresentationer

Jessica Elofsson
Jessica Elofsson är universitetslektor i pedagogik vid Linköpings universitet. Hon forskar om matematiklärande och undervisning i förskola, förskoleklass och grundskolans tidiga år.

Ulla Runesson Kempe
Ulla Runesson Kempe är professor emerita vid Jönköpings University.

Anna-Lena Ekdahl
Anna-Lena Ekdahl är universitetslektor i didaktik vid Jönköping University. Hon forskar om barns matematiklärande och hur lärare i samarbete med forskare utvecklar undervisningen.

Camilla Björklund
Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Göteborgs universitet och forskar bland annat om matematiklärande och undervisning i förskola och skolans tidiga år i praktiknära forsknings- och utvecklingsprojekt.

Bilaga 1

MPM-verktyget; undervisningsaspekterna I, II, III samt beskrivningar av kategori A– D med konkreta exempel.

MPM			
I. Medierande artefakter			
Inga artefakter eller problematiska artefakter används	Ostrukturerade artefakter används på ett ostrukturerat sätt	Strukturerade artefakter används på ett ostrukturerat sätt	Strukturerade /ostrukturerade artefakter används på strukturerat sätt
A	B	C	D
Verbalt utan material.	Plockmaterial (ex. knappar) som inte är ordnade i rader eller grupper och som räknas en och en.	Fingrar som räknas ett och ett/ pärlband (ex. 10 i grupper av fem i två färger) där pärlorna räknas en och en.	Fingermönster/pärlband som synliggör antal som grupper; plockmaterial (ex. knappar) ordnas i grupper om två/ fem/tio.
II. Medierande notationer			
Inga notationer/ problematiska notationer används	Notationer som enbart noterar uppgift eller svar	Ostrukturerade notationer	Strukturerade notationer
A	B	C	D
Läraren skriver inte på tavlan.	Klassen identifierar antalet föremål i en mängd "sju", läraren skriver 7 på tavlan.	Läraren markerar antal poäng med streck (ogrupperade) i en lång rad på tavlan.	Läraren markerar antal poäng i grupper av fem / gör en tabell / antecknar olika sätt att dela upp talet fem.
III. Medierande gester och verbala uttryck/prat			
III a. Metod för att generera/validera lösningar			
Inga metoder eller problematiska metoder för att generera/validera lösningar	Ensidig/ direkt metod för att lösa enskild uppgift, *fokus på att få ett svar*	Lokalt förankrad metod /metod som är giltig i andra sammanhang men situerad i den aktuella uppgiften	Metod som kan generaliseras till andra sammanhang som inte begränsas till en specifik artefakt /notation (går utanför artefakten)
A	B	C	D
Läraren iakttar när elever arbetar med talet 5. De skriver, ringar in rätt antal på arbetsblad, helt på egen hand.	Eleverna ombeds identifiera antal djur på bilder. L: "Hur många, hur såg du det?" Elev: "Jag räknade", läraren upprepar "Du räknade".	Eleven räknar en och en, svårt att identifiera antalet som saknas. L: "Ta hjälp av dina fingrar, kan du då se hur många som är gömda?"	Elever ska hitta alla sätt att dela upp fem frukter i två skålar. Tveksamheter uppstår. L: "Om ni testar att flytta en frukt åt gången …".
III b. Skapa matematiska samband			
Lösgjorda och/eller osammanhängande hantering av exempel	Varje exempel hanteras som nytt (från början)	Prat och gester knyter samman exempel/artefakter/ notationer	Prat och gester knyter samman flera exempel/ artefakter/ notationer, båda inom och mellan
A	B	C	D
Enskilda övningar om talet fem, som genomförs av elever på stationer utan att läraren pratar om talets egenskaper.	Läraren visar siffran 6, säger: "Visa lika många med fingrarna!" L: "Bra", visar sen siffran 5, säger: "Visa lika många!" När elever visat L: "Bra".	Läraren visar talblocken 4 och 5 och frågar: "Vad är skillnaden mellan 4 och 5?" (En elev resonerar). L: "Om man ska göra dem lika hur kan man göra då?"	Då alla sätt att dela upp talet fem gjorts, skriver läraren kombinationerna med systematik på tavlan (0+5;1+4; 2+3 ...) Läraren pekar ut relationen mellan talen i respektive kombination. Jämför sedan de olika uppdelningarna.
III c. Skapa/bygga lärande samband: förklaringar och värderingar av (fel)svar/ändamålsenlighet, med motiveringar av val. Stöttning av elevinspel och matematiskt resonemang			
Backar till mer primitiva metoder <u>eller</u> ingen värdering av svar (korrekt eller inkorrekt)	Bekräftar elevsvar, accepterar elevstrategi, noterar eller ifrågasätter felsvar	Utvecklar elevsvar/ erbjuder en mer sofistikerad strategi /uppmärksammar fel genom bearbetning/ erbjuder icke-exempel	Utvecklar **och förklarar** svar, förklarar och motiverar strategival utifrån ändamålsenlighet
A	B	C	D
Eleverna lägger talen 1–10 i ordning. Tian och sexan blir spegelvända, ingen kommentar från läraren.	L: "Bra!", "Rätt" / Läraren nickar eller upprepar elevens svar / L: "Blev det rätt? (vid felsvar), kolla igen!".	Eleverna visar åtta med fingrar på olika sätt. L: "Ni gör olika, det är helt okej". Läraren upprepar, förklarar och resonerar sedan om de olika sätten.	I diskussion om många streck på rad, ritar en elev fem streck och ett streck snett över dessa fem. L: "Du är på helt rätt väg. Det långa strecket är det femte. När det är så här är det alltid fem. Då kan vi räkna fem, tio …".