FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

Att skapa förutsättningar för elevers teoretiska arbete med bassystemet

Orginalartikel

Marie Björk[1]* & **Diana Berthén**[1]

Sammanfattning

Syftet med artikeln är att beskriva och exemplifiera matematiska aspekter som mellanstadieelever behöver urskilja för att utforska bassystemets struktur. Datamaterialet är hämtat från en learning study i årskurs 4 med 44 elever, där en iterativt utvecklad lektion har utformats inspirerad av learning activity och El'konin-Davydov-programmet (ED-programmet). Avsikten var att skapa förutsättningar för eleverna att utforska och pröva relationen mellan olika bastal och övergången till successivt större respektive mindre talenheter. I analysen framträder *bastalet*, *entalets representation* och *tal som mätetal* som centrala aspekter för elevernas utforskande av strukturen i bassystemet. Resultatet presenteras med exempel från det iterativa arbetet med att revidera uppgifterna och från de lektioner där uppgifterna prövades.

Nyckelord: bassystemets struktur, ED-programmet, learning activity, learning study, låg- och mellanstadieelever, matematikundervisning, positionssystem

Abstract

The purpose of the article is to describe and exemplify mathematical aspects that middle school students need to discern in order to explore the structure of the base system. The data material is taken from a Learning study in grade 4 with 44 students, where a lesson was designed inspired by Learning activity and the El'konin-Davydov curriculum (ED curriculum). The purpose of the lesson was to create conditions for students to explore and test the relationship between different base numbers and the transition to successively larger and smaller number units. In the analysis, *the base number*, *the representation of ones* and *numbers as measurements* emerge as central aspects for the students' exploration of the structure of the base system. The results are presented with examples from the iterative work of revising the tasks and from the lessons where the tasks were tested.

Keywords: Learning activity, Learning study, Mathematics teaching, Primary and secondary students, The ED curriculum, The positional system, The structure of the base system

[1] Specialpedagogiska institutionen vid Stockholms universitet.

*Korresponderande författare:
Marie Björk
marie.c.bjork@edu.stockholm.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 1, 2024, s. 69–88
DOI: 10.61998/forskul.v12i1.22924
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-03-13

Introduktion

I denna artikel riktas uppmärksamheten mot grundskolans undervisning om bassystemet[1] som en övergripande struktur för tiobassystemet (det decimala positionssystemet). Bakgrunden är de påvisade svårigheter som många elever, både i grundskolan och högre upp i utbildningssystemet, har att förstå och använda tiobassystemet (Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Svårigheterna framträder exempelvis när eleverna ska jämföra rationella tal i decimalform (Lortie-Forgues m.fl., 2015) och göra beräkningar där det krävs växlingar och grupperingar mellan hundratal, tiotal och ental (Vermeulen m.fl., 2020).

Att elever inte alltid utvecklar en förståelse av tiobassystemet, som de kan använda vid arbete med tal i decimal form – decimaltal, har konstaterats sedan tiotals år i forskning. Ett exempel på detta är att grundskoleelever vid jämförelse av decimaltal kan uppfatta 0,123 som ett större tal än 0,45 eftersom heltalet 123 är större än 45 (Ni & Zhou, 2005) eller att 0,471 är ett mindre tal än 0,2 eftersom det innehåller mindre delar, som hundradelar och tusendelar (Steinle, 2004). Även i TIMMS 2015 (Trends in International Mathematics and Science Study[2]) framgår att många av de deltagande eleverna i årskurs 8 har svårt att jämföra decimaltal (Mullis m.fl., 2016). I TIMSS 2019 framgår att elever i årskurs 8 har svårt att jämföra storleken på exempelvis talet 0,92 och 9/10 (Fishbein m.fl., 2021). Av samtliga deltagande elever klarade 74 procent den uppgiften medan 68 procent av svenska elever klarade uppgiften. Dessa resultat bekräftar tidigare forskning där det framgår att eleverna inte alltid förstår vad siffrorna i de olika positionerna i ett tal betyder.

Det värde som siffror i ett tal representerar i ett bassystem bestäms av den bas som talet skrivs i. Vanligen används bas tio[3], både till vardags och i grundskolans undervisning. Bassystemet bygger på en struktur där det finns en relation mellan bastalet och vad siffrorna betyder i positionerna i ett tal på så vis att storleken på successivt större respektive mindre talenheter[4] bestäms som potenser av bastalet (jfr Latif m.fl., 2011). Talet 2 1 1, 2 1 i godtycklig bas (*b*) betyder exempelvis $2{\cdot}b^2 + 1{\cdot}b^1 + 1{\cdot}b^0 + 2{\cdot}b^{-1} + 1{\cdot}b^{-2}$. I bas tre betyder detta tal $2{\cdot}3^2 + 1{\cdot}3^1 + 1{\cdot}3^0 + 2{\cdot}3^{-1} + 1{\cdot}3^{-2}$, det vill säga $2{\cdot}9 + 1{\cdot}3 + 1{\cdot}1 + 2{\cdot}1/3 + 1{\cdot}1/9$. I bas tio benämns successivt större talenheter ental, tiotal, hundratal och så vidare. Successivt mindre talenheter än ental benämns tiondelar, hundradelar och så vidare. I bas tre skulle motsvarande talenheter benämnas ental, tretal, niotal och så vidare samt tredjedelar, niondelar och så vidare.

Enligt Thomas (1998) behöver elever utveckla förståelse för strukturen i tiobassystemet som en del i ett sammanhängande och oändligt expanderande system. Ma (2020) lyfter fram att elever både behöver förstå och kunna genomföra gruppering till en större talenhet och dela upp en större talenhet i mindre talenheter vid exempelvis växlingar mellan positionerna i subtraktionsalgoritmer. I en svensk studie där uppgifter utvecklades för att elever i de tidiga skolåren skulle förstå platsvärde, definierat som "det värde en siffra representerar i ett tal, utifrån var i talet den står" (Hansson, 2019, s. 50) prövades bas fem som variation till bas tio. Även om resultatet i den studien indikerar att en variation av bas inte automatiskt leder till att eleverna urskiljer aspekter av tiobassystemet lyfts användning av olika baser fram som en möjlighet för att eleverna ska urskilja att övergången till nästa position sker vid tio i bas tio.

Vygotsky beskrev redan på 30-talet att elever behöver förstå tiobassystemet på en övergripande eller teoretisk nivå, det vill säga att förstå tiobassystemet som ett av andra bassystem

---

1 Begreppet *bassystemet* är synonymt med positionssystemet och används här för att betona att strukturen bygger på en bas (jfr Kiselman & Mouwitz, 2008).

2 TIMSS är en internationell kunskapsmätning som genomförs i årskurs 4 och 8 vart fjärde år.

3 I texten används omväxlande benämningen bas tio och tiobassystemet beroende av kontext.

4 Benämningen talenhet är en översättning från "numeration unit" (Chambris, 2018, s. 188) och avser ett övergripande begrepp för talenheter i godtycklig bas.

(Vygotsky, 1934/1986). Med utgångspunkt i Vygotskys (1997) antagande om undervisningens avgörande betydelse för elevers utveckling av "higher mental functions" utformade Davydov (1990) med kollegor en vad som kan beskrivas som ämnesdidaktisk teori. Denna teori behandlar elevers utveckling av teoretiska begrepp och innefattar principer för hur undervisning kan utformas för att skapa förutsättningar för eleverna att engageras i en lärandeprocess – en så kallad *learning activity* (Davydov, 1986/2008).

Davydov (2008) beskriver hur en learning activity byggs upp av olika *learning actions* genom vilka eleverna tillsammans med läraren utforskar olika ämnesinnehåll. Exempel på ämnesinnehåll är livscykel som teoretiskt begrepp (Broman m.fl., 2022), hållbarhet i samhällsplanering (Bengtsson, 2021) och rationella tal i bråkform (H. Eriksson, 2021). Det utforskande arbetet består av ”analyser, problemformulering, prövanden, reflektion och värdering" (I. Eriksson, 2017, s. 68) riktade mot det aktuella begreppets konstituerande struktur, det vill säga begreppets inre centrala relationer (Davydov, 1986/2008; se även Zuckerman, 2022). El'konin och Davydov utvecklade, med stöd av principerna för learning activity, ett undervisningsprogram som i väst ofta benämns ED-programmet (Davydov, 1986/2008). Programmet utformades för att organisera en undervisning där eleverna ges möjlighet att utveckla förståelse för centrala strukturer hos bland annat matematiska begrepp.

Ett exempel på en studie där principer för learning activity har använts i matematikundervisning är en studie av Venenciano och hennes kollegor (2015). Eleverna i studien, som under sitt första skolår hade arbetat enligt ED-programmet i en kontext av mätning, klarade när de testades med specifika uppgifter i årskurs 2 exempelvis att visa talet 1 3 2 i bas fyra med representationer för talenheter som de själva konstruerade i form av kvadratiska areor. I en svensk studie inspirerad av learning activity (H. Eriksson, 2015) studerades, med elever i årskurs 4, relationen mellan undervisningen och elevernas förståelse av rationella tal som tal. Uppgiften som eleverna fick arbeta med var att mäta längden av en trästav med en annan kortare stav, benämnd mätenhet. Stavens längd kunde dock inte mätas med ett jämnt antal av den kortare staven. Uppgiftens konstruktion och lärarens utmanande frågor och påståenden bidrog till att eleverna identifierade att de behövde ett sätt att uttrycka längden av den ”bit" som inte kunde mätas med den kortare staven (s. 68). Eleverna utvecklade tillsammans med läraren en lärandemodell, med algebraiska symboler, för tal i bråkform som de använde för att reflektera över relationen mellan heltalsdelar och bråkdelar i tal i blandad form. I dessa studier (H. Eriksson, 2015; Venenciano m.fl., 2015) fördjupas innebörden av elevers teoretiska förståelse av strukturen i bassystemet och av rationella tal som tal.

Med grund i ovanstående forskningsresultat, som visar på elevers svårigheter att förstå tiobassystemet, och resultat som lyfter fram elevers förståelse för bassystemets struktur som en grund för att förstå tiobassystemet, framstår ett behov av kunskap om vilka förutsättningar elever behöver för att kunna utforska och förstå denna struktur. Mer specificerat är syftet att, med en undervisning utformad med inspiration av learning activity, och en uppgift från ED-programmet, beskriva och exemplifiera matematiska aspekter som mellanstadieelever behöver urskilja för att utforska bassystemets struktur, avgränsat till relationen mellan bastalet och talenheterna. Följande frågeställning adresseras:

- Vilka matematiska aspekter behöver eleverna urskilja för att kunna pröva relationen mellan olika bastal och övergången till successivt större respektive mindre talenheter?

Learning activity

I det följande beskrivs centrala principer för hur den ämnesspecifika undervisningen behöver utformas i avsikt att skapa betingelser för att en learning activity ska uppstå.

En princip för learning activity är, som ovan nämnts, att eleverna tillsammans och under guidning av läraren, utforskar de inre centrala relationer som konstituerar det aktuella begreppet (Davydov, 1986/2008; jfr Zuckerman, 2022). Ett ofta refererat exempel på en inre central relation är vad som konstituerar en cirkel, det vill säga relationen mellan en fixerad punkt (mittpunkt) och ett oändligt antal punkter på ett konstant avstånd från denna punkt, vilka tillsammans utgör cirkelbågen (Davydov, 1986/2008). Denna relation är generell och giltig för alla cirklar, oavsett storlek. Läraren behöver alltså genomföra en noggrann analys av vad som konstituerar det valda begreppet för att utforma uppgifter och guida eleverna med frågor och påståenden (jfr Zuckerman, 2022).

En annan princip är att det utforskande arbetet drivs av ett i uppgiften inbyggt problem av en sådan art att det motiverar ett utforskande och prövande av begreppets inre centrala relationer (Davydov, 1986/2008). Läraren behöver, med utgångspunkt i analysen av begreppet och den teoretiska förståelse som eleverna förväntas utveckla, designa uppgiften så att det exempelvis saknas information eller tillräckligt utvecklade redskap för att kunna lösa den (Zuckerman, 2004, 2022). Uppgiften skapar därigenom incitament för ett undersökande arbete.

Ytterligare en princip är arbetet med så kallade lärandemodeller, medierande redskap med vilka begreppets generella struktur synliggörs och prövas (Davydov, 1986/2008; Radford, 2014). Lärandemodeller utvecklas av läraren och eleverna tillsammans och kan se olika ut, beroende på vilket begrepp som utforskas. Lärandemodeller kan bestå av ritningar, grafer, tabeller, tallinjer och algebraiska uttryck eller fysiska objekt såsom Cuisenairestavar. I exempelvis ämnet biologi utarbetar elever och lärare bland annat en lärandemodell med vilken de utforskar hur en organism är utformad för att skydda sig mot uttorkning och samtidigt vara utformad så att andningen fungerar (Egorova, 2006). I ED-programmet i matematik utforskar elever och lärare exempelvis strukturen i tal i bråkform genom mätning av olika kvantiteter (Davydov, 1986/2008; Schmittau, 2003) som ett led i att utveckla en fördjupad förståelse för tal. Lärandemodeller som använts i dessa studier är bland annat linjer, bågar och algebraiska uttryck. Också i svensk undervisningspraktik har lärandemodeller använts som medierande redskap i undervisning som riktas mot algebraiska uttryck (I. Eriksson m.fl., 2019).

Metod

I innevarande artikel har en efteranalys genomförts av ett datamaterial från en studie där learning study (jfr Marton, 2015) har använts som forskningsansats. Learning study som forskningsansats ger ett starkt fokus på kunskapsinnehållets behandling och elevernas förståelse (Carlgren, 2012). Strukturen i en learning study bygger på ett iterativt arbete i cykler, där undervisningsupplägg och uppgifter utformas i en så kallad forskningslektion, vilken genomförs med en elevgrupp för att sedan analyseras och revideras för att sedan genomföras med en ny elevgrupp. En learning study genomförs vanligen i tre sådana cykler och forskningslektionerna filmas för att underlätta analys- och revideringsarbetet.

I föreliggande learning study designade en forskargrupp (Björk m.fl., 2019), bestående av förstaförfattaren till artikeln och tre matematiklärare, en lektion där avsikten var att skapa möjligheter för eleverna att kollektivt utforska de relationer som bassystemets struktur bygger på. Gruppen träffades 1,5 timme två gånger per vecka under ett läsår, för att arbeta med design, genomförande, analys och revidering av lektionen.[5] Den ursprungliga designade lektionen genom-

5 De medverkande lärarna hade under två år 13 procent i sina tjänster för att arbeta med projektet, som efter att ha genomförts i årskurs 4 även omfattade ett utprövande av en lektion i årskurs 7.

fördes, reviderades och prövades i sammantaget tre forskningslektioner vilka dokumenterades genom filmning och fältanteckningar.

Uppgifternas utformning och revidering

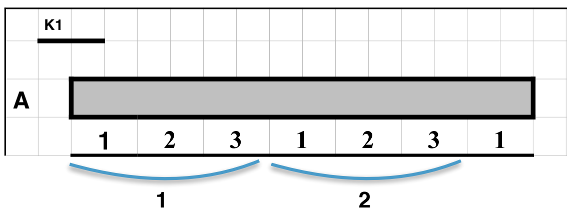
Den designade lektionen innehöll tre uppgifter som utvecklades och genomfördes med inspiration av learning activity (Davydov, 1986/2008). Uppgifterna utformades så att det skulle vara möjligt för eleverna att identifiera att det saknades en större respektive mindre talenhet för att kunna ange längden av en sträcka. Vidare utformades uppgifterna för att eleverna i sitt utforskande skulle kunna ta i bruk och expandera lärandemodeller, bestående av bågar som markerade successivt större och mindre talenheter, och tabeller. Eleverna arbetade tillsammans i helgrupp under guidning av läraren, med avbrott för kortare diskussioner i mindre grupper. Instruktionen till läraren utformades med fokus på att läraren skulle rikta elevernas uppmärksamhet mot strukturen i bassystemet genom att dels fånga upp deras frågor och påståenden för gemensam reflektion, dels ställa framåtsyftande frågor och ge påståenden som bidrog till att de kunde identifiera ett problem.

Idén till uppgifterna är hämtad från en uppgift i läromedlet Matematikka (Davydov m.fl., 2012, s. 52).[6] Denna uppgift, fortsättningsvis benämnd ED-uppgiften, handlar om en fiktiv elev (Kristina) som har mätt en sträcka i bas tre och noterat längden med talenheterna K_1 och K_2 i en tabell där kolumnerna motsvarar positionerna K_1 och K_2 i bassystemet. Elevernas uppgift är att förklara vad Kristina har gjort när hon har mätt sträckan och vad hon har skrivit i tabellen (figur 1). Vid mätningen används representationer för talenheter, det vill säga inte standardiserade måttenheter.

Figur 1
Den justerade ED-uppgiften.

Uppgift 1

Kristina kunde bara räkna till tre. Ta reda på hur hon gjorde när hon mätte längden och vad det var hon skrev ner i tabellen!



		K2	K1		
A		2	1		
B					
C					

Not: I ED-uppgiften har sträcka A längden 2 1 i bas tre. Talenheten K_1 representeras av två av enheten en ruta och talenheten K_2 är lika med 3 K_1. Eleverna ska förklara vad siffrorna 2 och 1 i tabellen betyder. I ED-uppgiften har tabellen två kolumner, en för K_2 och en för K_1. För den iscensatta learning study där uppgiften utvecklades och användes justerades tabellen genom tillägg av ytterligare kolumner på var sida om K_2 och K_1.

Talenheten K_1 (ental) representeras av längden av två av enheten en ruta och talenheten K_2 (en successivt större talenhet jämfört med entalet) representeras av längden av sex av enheten en ruta (figur 1). Den längd som representerar K_2 står i relation till den längd som representerar K_1 på så vis att K_2 i bas tre är tre gånger längre än K_1. ED-uppgiftens text ger eleverna informationen

6 En av matematiklärarna på skolan översatte texten i Davydovs uppgift från ryska till svenska.

att Kristina, som kan räkna endast till tre, har mätt A och angivit längden genom att skriva talet 2 1 i tabellen (figur 1) vilket i bas tre betyder $2 \cdot 3^1 K_1 + 1 \cdot 3^0 K_1$ eller $6K_1 + 1K_1$ (sju K_1 omräknat i bas tio).

Som lärandemodell fungerar större och mindre bågar som symboliserar talenheter eller grupperingar av talenheter (bågmodellen) och tabellen där resultatet av mätningarna noteras. Kolumnerna i tabellen motsvarar positioner i ett tal och tabellen fungerar oavsett bas.

Uppgift 1 i forskningslektionerna och ED-uppgiften är lika, förutom att tabellen i uppgiften justerades genom tillägg av ytterligare kolumner för att möjliggöra ett utforskande av relationen mellan bastalet och successivt större respektive mindre talenheter (figur 1). Eleverna skulle beskriva relationen mellan de två talenheterna K_1 och K_2 som ett första led i att ta i bruk och utforska strukturen i bassystemet.

Uppgift 2 och 3 utformades som mätningar av sträckor i olika baser. Sträckornas längd dimensionerades så att talenheterna K_1 och K_2 inte räckte till för att kunna ange sträckornas längd i aktuell bas. I uppgift 2 saknades en successivt större talenhet (K_3) än K_2. I uppgift 3 saknades även en successivt mindre talenhet (K_0) än K_1. Avsikten var att eleverna skulle upptäcka att det saknades lämpliga talenheter och formulera detta som ett problem samt pröva strukturen i bassystemet för att, med utgångspunkt i aktuell bas och representationen för entalet, konstruera representationer av successivt större respektive mindre talenheter.

Revideringarna av uppgifterna och deras genomförande byggde på forskargruppens diskussioner och analys av såväl elevernas som lärarens handlingar såsom förslag, frågor, påståenden och hur läraren och eleverna visade och pekade i uppgifternas illustrationer (jfr Roth & Radford, 2011). Revideringarna fokuserade främst på att skapa möjligheter för eleverna att identifiera att det saknades talenheter och att beskriva relationen mellan bastalet och talenheterna, samt för att konstruera nya (större eller mindre) talenheter med stöd av bågar under sträckorna.

Deltagare

Studien genomfördes i en skola i Stockholm där majoriteten av eleverna har svenska som förstaspråk. Totalt tre lärare och 44 elever i tre klasser från årskurs 4 deltog. Informerat samtycke för att filma och analysera forskningslektionerna inhämtades skriftligen från samtliga vårdnadshavare och muntligen från eleverna. För att säkerställa elevernas frivilliga deltagande, vilket kan vara svårt enligt Lillvist (2022), fanns det – även om vårdnadshavarna hade givit tillstånd – möjlighet för elever som inte ville delta i den filmade forskningslektionen att ansluta till en ordinarie lektion i en av skolans parallellklasser. Vidare lades vikt vid att bevaka eleverna som kompetenta deltagare i forskningslektionerna (Quennerstedt m.fl., 2014) genom att kontinuerlig dialog fördes med eleverna om projektets genomförande. Känsliga personuppgifter förekommer inte. I det transkriberade materialet har elevers och lärarens namn ersatts med fingerade namn. Datamaterialet lagras vid Stockholms universitet enligt gällande regler (jfr Vetenskapsrådet, 2017).

Eleverna delades in i grupp A, B och C med 15, 14 respektive 15 elever. De tre grupperna var samma som vid undervisningen i praktiskt-estetiska ämnen. Grupperna var inte nivågrupperade. Forskningslektion 1 genomfördes med elevgrupp A och var 60 minuter lång. Forskningslektion 2 som genomfördes med elevgrupp B och forskningslektion 3 som genomfördes med elevgrupp C delades båda upp i tre tillfällen, om vardera cirka 60 minuter, för att få mer tid till undervisningsmomenten. Samtliga elever fick papperskopior av uppgifterna för att kunna peka, rita och fylla i tabellen tillsammans när de diskuterade i smågrupper. Under samtliga lektioner diskuterade eleverna och läraren uppgifternas lösning, mestadels i storgrupp med avbrott för kortare diskussioner i fyra till fem grupper med två till fyra elever i respektive grupp.

Datamaterial

Datamaterialet består av film från samtliga forskningslektioner (ca 420 min) som har transkriberats, uppgifter och elevlösningar, samt anteckningar från revideringsdiskussionerna. Forskningslektionerna filmades på två sätt, dels med kamera placerad längst bak i klassrummet riktad mot whiteboardtavlan. Dels med en handkamera med vilken artikelns förstaförfattare rörde sig mellan grupperna och filmade på nära håll elevernas pekningar, ritande, skrivande och diskuterande. Strävan var att samtliga gruppers arbete skulle filmas under varje forskningslektion. Transkriptionerna genomfördes ordagrant enligt Linell (1994). Delar av forskningslektionerna där läraren hanterar praktiska frågor, exempelvis vilka elever som ska sitta bredvid varandra, transkriberades inte. Beskrivningar av elevernas och lärarens gester samt betydelsebärande tonfall noterades inom hakparenteser.

Databearbetning och analys

Analys av data från forskningslektionerna har genomförts av innevarande artikels försteförfattare och en forskarkollega. För att bringa ordning och skapa en förtrogenhet med datamaterialet (jfr Rennstam & Wästerfors, 2011) gjordes först en datasammanställning, uppgift för uppgift, för respektive forskningslektion. Sammanställningarna strukturerades enligt följande: beskrivning av uppgiften, transkription från den del av forskningslektionen där uppgiften behandlades och anteckningar från analys- och revideringsarbetet av uppgiften. En kvalitativ analys genomfördes sedan i tre steg.

I ett första analyssteg lästes datasammanställningarna igenom flera gånger för att få en förståelse av vad som framstod som tecken på att uppgifterna inte fungerade som avsett, det vill säga att de inte möjliggjorde för eleverna att identifiera problemet att det saknades talenheter eller att pröva och reflektera över relationen mellan bastalet och övergången till successivt större respektive mindre talenheter.

I analyssteg ett ställdes följande analysfrågor: Vilka problem med uppgiftens konstruktion hade forskargruppen fokuserat på i revideringsarbetet, vilka revideringar gjordes och varför? Revideringarna var av intresse eftersom de pekade ut svårigheter som uppstod när eleverna arbetade med uppgifterna. Exempelvis hade uppgifterna och deras genomförande reviderats när forskargruppen upptäckte att eleverna fastnade i ett räknande av antal rutor och inte använde talenheter. Dessa svårigheter tolkades som tecken på att det fanns någon, för uppgifterna, betydelsebärande aspekt som eleverna inte kunde förstå eller uppfatta. Beskrivningar av elevernas svårigheter i arbetet med uppgifterna och vidtagna revideringar sammanställdes därefter forskningslektion för forskningslektion och uppgift för uppgift. Denna sammanställning utgjorde underlag för analyssteg två.

I steg två i analysarbetet färgkodades och grupperades svårigheter som var lika eller liknande och som återkom i flera uppgifter under flera forskningslektioner. I grupperingarna urskildes mönster av svårigheter vilka kunde relateras till matematiska aspekter och var av betydelse för att kunna pröva relationen mellan olika bastal och övergången till successivt större respektive mindre talenheter. Exempelvis framträdde vid analysen av elevernas svårigheter i uppgift 1 och 2, både i forskningslektion 1 och 2, att de inte förstod att övergången till en successivt större talenhet skulle göras vid bastalet. Detta visade att eleverna inte uppfattade bastalets funktion. Denna aspekt etiketterades "bastalet". Sammantaget framträdde tre aspekter som centrala för elevernas möjlighet att arbeta utforskande med bassystemets struktur.

Slutligen gjordes ett urval av konkreta exempel att presentera i resultatavsnittet, som visar på när elever urskilt respektive inte urskilt de tre aspekterna, genom att jämföra forskningslektion 1 och 3. Forskningslektion 1 och 3 valdes eftersom problemen med uppgifterna och elevernas svårigheter att urskilja aspekterna var mest synliga i forskningslektion 1 emedan tecken på elevernas förståelse och användning av aspekterna oftare kom till uttryck i forskningslektion 3.

Resultat

I analysen framträder att eleverna i studien behövde urskilja tre matematiska aspekter – *bastalet*, *entalets representation* och *tal som mätetal* – för att de skulle kunna pröva relationen mellan olika bastal och övergång till successivt större respektive mindre talenheter. Aspekterna är ömsesidigt beroende av varandra men har analytiskt skiljts åt av tydlighetsskäl. I det följande redovisas varje aspekt med några konkretiserande exempel. Först beskrivs varför aspekten är viktig att urskilja, sedan redovisas exempel på problem som kan uppstå om eleverna inte urskiljer aspekten och slutligen följer utvalda exempel på uppgifter där eleverna urskiljer aspekten.

Bastalet

Eleverna i studien behövde urskilja bastalet som en gräns för vilket tal de kan räkna upp till för att kunna pröva och reflektera över relationen mellan bastalet och övergången till både successivt större respektive mindre talenheter.

Ett exempel på svårigheter, som uppstod när eleverna inte kunde urskilja bastalet, kom till uttryck vid uppgift 1 under forskningslektion 1, när eleverna (elevgrupp A) inte kunde urskilja bastalet tre utan i stället använde bas tio. Enligt planeringen visade läraren uppgift 1 projicerad på tavlan (figur 1) och läste uppgiftstexten där det framgick att en fiktiv elev som hette Kristina kunde räkna endast till tre. Uppgiften var att ta reda på hur Kristina hade gjort när hon mätte sträckan och vad hon hade skrivit i tabellen. Eleverna diskuterade först i små grupper. När diskussionen fortsatte i storgrupp föreslog eleven Anna[7] att sträckan var sex meter (excerpt 1).

Excerpt 1

Uppgift 1: forskningslektion 1, elevgrupp A.

Anna:	Om hon [Kristina] skulle mäta till exempel sex meter och hon bara kunde räkna till tre så kanske hon visste att 3 plus 3 är 6 och att hon mätte då, tre meter plus tre meter och då blir det sex meter …
Läraren:	Berätta, vad säger ni?
August:	Nej men, jag fattar vad Anna menar, men den där ettan i slutet? Då blir det sju [K_1]?! För det är ett, två, tre och sen ett, två, tre. Då blir det tre plus tre och plus den där ettan som är i slutet.

Excerpt 1 visar att eleverna inte verkar urskilja bastalet tre utan verkar försöka ange längden av sträcka A som 7 K_1. Vi tolkar elevernas resonemang som att de inte urskiljer bastalet tre som en gräns för hur långt de kan räkna utan i stället använder bas tio, vilken de sedan tidigare är vana vid. En konsekvens blir då att eleverna inte kan identifiera problemet att det fattas en successivt större talenhet för att ange sträckans längd. Denna situation uppstår eftersom det, i bas tio, inte krävs någon större talenhet än entalet K_1 när längden är 7 K_1 vilket medför att eleverna inte kan pröva eller reflektera över relationen mellan bastalet tre och en successivt större talenhet.

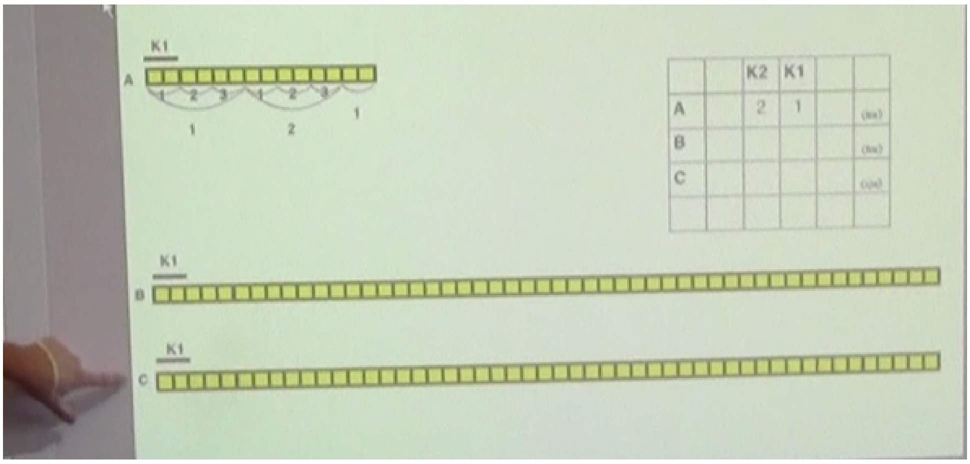
Redan till forskningslektion 2 hade uppgift 1 reviderats för att eleverna i elevgrupp B skulle uppmärksamma att de inte kunde räkna längre än till tre och att de skulle formulera ett uttryck för relationen mellan K_1 och K_2 i bas tre, det vill säga att K_2 är lika med tre K_1. Illustrationen revi-

7 Elevernas namn är fingerade. För elevgrupp A i forskningslektion 1 används namn som börjar på A, för elevgrupp B i forskningslektion 2 namn som börjar på B och för elevgrupp C i forskningslektion 3 namn som börjar C.

derades så att det under sträcka A fanns totalt sju små bågar, numrerade 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1 (figur 2). Dessutom hade sträckorna B och C lagts till i illustrationen så att eleverna fick en översikt över vilka sträckor som senare skulle mätas i uppgift 2. Läraren skulle räkna (högt) “ett, två, tre, ett, två, tre, ett” och samtidigt peka på siffrorna under de små och stora bågarna under sträcka A. Läraren skulle också vara beredd att hejda eleverna om de använde bas tio.

Figur 2

Uppgift 1: forskningslektion 2 och 3, elevgrupp B och C.



Not: Syftet med uppgiften är att eleverna ska reflektera över relationen mellan talenheterna K_1 och K_2. De små bågarna markerar K_1. De stora bågarna markerar K_2.

Följande exempel synliggör hur elevgruppen C, under forskningslektion 3 i arbetet med uppgift 1, tog i bruk bastalet tre för att pröva relationen mellan bastalet tre och talenheten K_2 som en successivt större talenhet än K_1 (figur 2) och reflekterade över hur K_1 bestäms som en tredjedel av K_2.

Eleverna i elevgrupp C föreslog inledningsvis, precis som eleverna i elevgrupp A vid forskningslektion 1, att sträcka A var sju K_1. Enligt planeringen uppmärksammade då läraren ännu tydligare uppgiftens kontext för eleverna genom att fråga “Om hon [Kristina] inte kan räkna till något annat än tre?”. Eleven Christer utbrast ”Då får hon gå i skolan!”. Läraren pushade Christer ytterligare genom att säga ”Ja, just det, men den här skolan lär ut att man kan räkna endast till tre … om du tänker så!”. Eleven Cajsa som lyssnade på Christer och läraren förklarade ”Då sätter man max tre [K_1] i varje sån där [K_2]. Man delar upp den [K_2] i tre [K_1] …”.

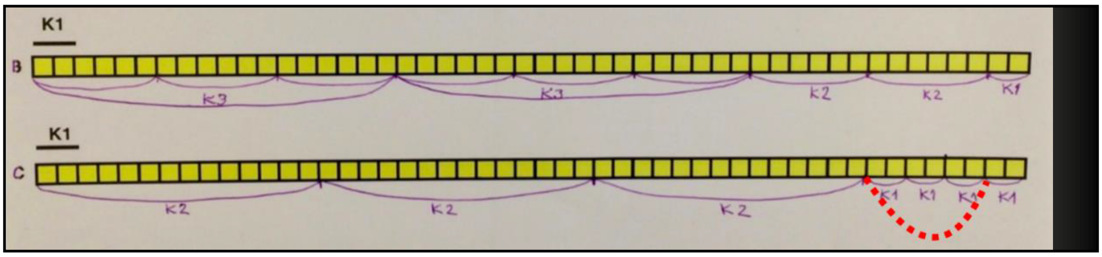
Cajsas uttalande indikerar att hon kunde urskilja och ta i bruk bastalet när läraren betonade att bastalet är tre. Vi tolkar också Cajsas uttalande som att hon med stöd av bågarna i illustrationen (figur 2) prövar och reflekterar över relationen mellan bastalet tre och K_2.

Ett annat exempel visar hur eleverna i elevgrupp C, efter revidering av uppgift 2 inför forskningslektion 3, urskilde och tog i bruk bastalet och prövade relationen mellan bastalet och successivt större talenheter. Redan inför forskningslektion 2 hade uppgift 2 reviderats så att eleverna i elevgrupp B skulle mäta två lika långa sträckor (B och C) i bas tre och fyra i stället för att (som vid forskningslektion 1) mäta två sträckor med olika längd i bas tre. Syftet med revideringen till forskningslektion 2 var att eleverna, enligt Davydovs teori, skulle pröva den övergripande strukturen i bassystemet i två olika baser. Eftersom sträckorna B och C var 50 rutor och K_1 representerades av längden av två rutor skulle längden av sträcka B vid forskningslektion 2 noteras 2 2 1 i bas tre och sträcka C (med samma längd) skulle noteras 1 2 1 i bas fyra. När eleverna noterade längden av sträcka C i bas fyra gjorde de dock en gruppering av tre K_1, vilket innebar att de använde talenheter från både bas tre och fyra i samma tal.

Till forskningslektion 3 reviderades uppgift 2 så att sträckorna denna gång skulle mätas i bas tre och sju (figur 3). Syftet med den större skillnaden mellan bastalen var att det skulle behövas tre talenheter (K_1, K_2 och K_3) vid noteringen i bas 3 och två talenheter (K_1 och K_2) vid noteringen i bas sju. Resultatet skulle noteras 2 2 1 i bas tre och 3 4 i bas sju.

Figur 3

Exempel på elevsvar på uppgift 2: forskningslektion 3, elevgrupp C.



Not: I uppgiften skulle sträcka B mätas i bas tre och sträcka C i bas sju. Talenheten K_1 representeras av två av enheten en ruta. Blåa bågar visar på korrekt svar där B har längden 2 2 1 i bas tre och C har längden 3 4 i bas sju. Röd båge visar exempel på elevsvar där bas tre användes även om sträckan skulle mätas i bas sju.

När eleverna i elevgrupp C, i forskningslektion 3, i arbetet med uppgift 2 skulle notera längden av sträcka C skrev tre elever 3 1 1 i sina tabeller. Dessa elever hade först grupperat sju K_1 till tre K_2 därefter tre K_1 till en K_2 (se röd båge, figur 3) vilket innebar att de (precis som eleverna vid forskningslektion 2) använde talenheter från två baser, denna gång från bas sju och bas tre. Två elever i elevgrupp C, Calle och Cilla, skrev däremot 3 4 i kolumnerna för K_2 och K_1, vilket är korrekt när bas sju används. När eleverna och läraren diskuterade de två förslagen i storgrupp gav Calle uttryck för att han ansåg att noteringen 3 1 1 var felaktig och förklarade ”När man kan räkna till sju ska man använda den kunskapen”. Calle förklarade också ”man behöver sju K_2:or för att få en K_3:a”.

Calles förklaring till varför Cilla och han hade skrivit 3 4 i tabellen visar att han kan urskilja bastalet sju och att han tar det i bruk för att pröva relationen mellan bastalet och en successivt större talenhet än K_1 i den specifika basen sju och mellan bastalet och en ytterligare större talenhet (K_3). Calles påstående “man ska använda den kunskapen” indikerar att han reflekterar över att kamraterna har gjort en övergång till K_2 redan vid tre K_1 trots att övergången ska göras vid sju i bas sju. Att uppgiften är utformad som en mätning av två lika långa sträckor, först i bas tre och sedan i bas sju, tycks kunna möjliggöra för elever att urskilja bastalet både som en gräns för när övergången till en successivt större talenhet tidigast kan göras och när denna övergång senast måste göras.

Exemplen ovan indikerar att elever behöver kunna urskilja bastalet som något vilket kan variera (det vill säga att bastalet inte alltid är tio), som en gräns för när en övergång till en annan talenhet tidigast och senast kan göras, och som en konstant för alla positioner i ett tal.

Entalets representation

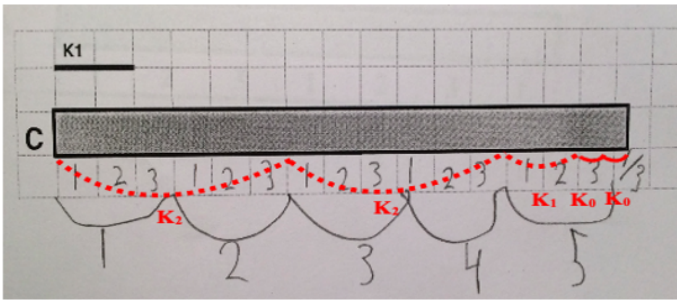
Eleverna behövde urskilja entalets representation för att använda den i ett prövande av relationen mellan bastalet och successivt större respektive mindre talenheter.

Ett exempel på svårigheter, som uppstod när eleverna inte kunde urskilja entalets representation kom till uttryck i uppgift 3 under forskningslektion 1, när eleverna i elevgrupp A inte uppfattade att entalet representerades av bokstavsbeteckningen K_1 (bestående av längden av två av enheten en ruta). Sträcka C skulle mätas i bas tre (figur 4). Avsikten var att eleverna skulle upptäcka att det saknades en successivt större och en successivt mindre talenhet än K_1 för att kunna ange den exakta längden och konstruera de saknade talenheterna och ta dem i bruk för att notera sträckans längd till 2 1, 2 i bas tre.

Enligt den planerade introduktionen projicerade läraren uppgiften på tavlan och uppmanade eleverna att beskriva vad de såg. Läraren pekade på sträckan och sa "/…/ C ska mätas med samma system [som i uppgift 1] och här har vi C. Och vad är det vi ser här? [pekar på sträcka C]". Eleverna diskuterade i grupper och använde papperskopior av uppgiften med sträcka C och tabellen. Alla utom fyra elever skrev siffrorna 1, 2 och 3 upprepade gånger under rutorna längs sträckan, grupperade och markerade rutorna tre och tre med bågar under sträckan (figur 4).

Figur 4

Exempel på elevsvar på uppgift 3: forskningslektion 1, elevgrupp A.



Not: Sträcka C skulle mätas i bas tre. Talenheten K_1 representeras av två av enheten en ruta. Exempel på elevlösning i svart (blyerts) där rutor har grupperats tre och tre i fem grupper och den sista biten av sträckan noterats som en tredjedels ruta. Korrekt lösning markerad i rött, det vill säga 2 1, 2.

Eleven Aron ritade fem bågar (tre rutor långa) och beskrev den kvarstående delen av sträckan som "typ en tredjedel av en ruta" (se excerpt 2 och elevernas anteckning av 1/3 i figur 4). Därefter skrev Aron och hans grupp 1/3 under den sista delen av sträcka C (figur 4).

Excerpt 2

Uppgift 3: forskningslektion 1, elevgrupp A

Aron:	Det är konstigt.
Läraren:	Vad är det som är konstigt?
Aron:	B, den har en extra ruta [går fram och pekar på sträcka B i uppgift 2] men den här [sträcka C] har bara typ [ungefär] en tredjedel av en ruta och det blir konstigt för att om det inte är … [tystnar]

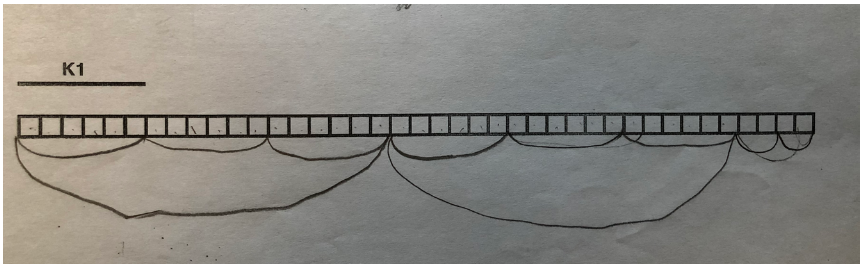
Arons numrering (1,2,3…1,2,3) av rutor under sträcka C (figur 4) visar att denna elev inte urskilde representationen för entalet (K_1) utan räknade rutor. Vidare beskrev Aron den kvarstående delen av sträcka C som "typ [ungefär] en tredjedel" (excerpt 2), vilket indikerar att han använde sitt ögonmått för att benämna hur stor del av en ruta den kvarstående delen av sträckan motsvarade.

I forskningslektion 3 hade uppgift 3 reviderats, dels så att sträcka C var 40 rutor lång, dels så att K_1 hade längden av 6 rutor. Detta innebär att representationen för en successivt mindre talenhet (K_0) än K_1 skulle ha längden av två rutor och att sträckans längd skulle noteras 2 0, 2 i bas tre. Längden av sträcka C var utformad så att den sista delen inte gick att mäta jämnt ut med talenheten K_1 och att eleverna därmed skulle uppleva ett behov av en successivt mindre talenhet än entalet. Denna talenhet skulle kunna konstrueras genom att dela K_1 i tre lika stora delar i enlighet med bas tre (figur 5).

Följande exempel visar hur eleverna i elevgrupp C, i uppgift 3 där sträcka skulle mätas i bas tre, när de urskiljer att entalet (K_1) representeras av längden sex rutor, konstruerade den successivt större talenheten till längden tre gånger sex rutor och den successivt mindre till längden två rutor, det vill säga en tredjedel av sex rutor.

Figur 5

Exempel på elevsvar på uppgift 3: forskningslektion 3, elevgrupp C.



Not: Sträcka C skulle mätas i bas tre. Talenheten K_1 representeras av sex av enheten en ruta. Bågarna visar exempel på ett korrekt elevsvar. Eleverna noterade längden 2 0, 2 i tabellen.

När eleven Christer och hans grupp skulle mäta den sista delen av sträckan i uppgift 3 ritade de två små bågar, till längden två rutor längst till höger under sträckan (figur 5). Christer utropade ”Det blev aldrig en K_1:a!”. I påföljande storgruppsdiskussion förklarade Calle att han och kamraterna hade skrivit K_0 i tabellhuvudet till höger om K_1 (excerpt 3 och figur 6) för att ange två successivt mindre talenheter (K_0) som de markerat med två bågar under sträcka C (figur 5).

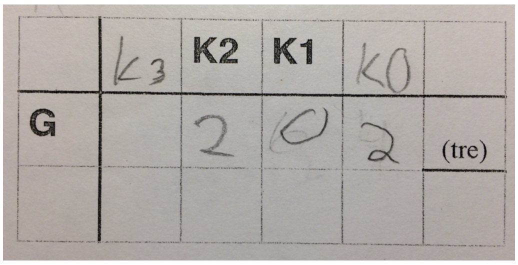
Excerpt 3

Uppgift 3: forskningslektion 3, elevgrupp C.

Calle: Ni kanske ser att det står K_0 där uppe [i tabellhuvudet], det är dom här två i slutet [pekade på siffran 2 i tabellen under rubriken K_0] (figur 6).

Figur 6

Exempel på elevsvar på uppgift 3: forskningslektion 3, elevgrupp C.



	K3	K2	K1	K0	
G		2	0	2	(tre)

Not: Sträcka C skulle mätas i bas tre. Talenheten K_1 representeras av sex av enheten en ruta. Noteringen i tabellen visar exempel på korrekt elevsvar. Eleverna konstruerade en successivt mindre (K_0) respektive större (K_3) talenhet.

Christer lyssnade på hur Calle och hans grupp hade löst uppgiften och förklarade att deras grupp hade fyllt i tabellen på samma sätt som Calles grupp. Christer förklarade att de ansåg att tre K_0:or var lika med en K_1:a eftersom ”den där [Kristina] kunde räkna till tre och då kan man köra tre sådana [K_0:or] i varje [K_1].”

Christers beskrivning av att tre K_0 är lika med en K_1 visar att han och kamraterna i gruppen urskiljer och tar i bruk representationen för entalet (K_1) och konstruerar en successivt mindre talenhet, K_0. Christer och hans grupp bestämmer K_0 till längden två rutor (se små bågar i figur 5) och ställer K_0 i relation till K_1 genom att förklara att tre K_0 är lika med en K_1. Christers och Calles förklaringar och det resultat av mätningen av sträcka C som de skriver i tabellen 2 0, 2 (figur 6) indikerar att när de urskiljer K_1 till längden av sex rutor kan de pröva och reflektera över relationen mellan bastalet (tre) och den successivt mindre talenheten (K_0) som en basdel av K_1. Även Calles beskrivning av hur han och kamraterna använde tabellen och hur de införde beteckningarna K_0 och K_3 till höger och vänster i tabellhuvudet (excerpt 3 och figur 6) indikerar att de har urskilt representationer för en successivt större respektive mindre talenhet.

Exemplen ovan synliggör att eleverna (elevgrupp A) under forskningslektion 1 inte uppfattade att entalet (K_1) representeras av en specifik längd eller att den successivt mindre talenheten (K_0) kan konstrueras genom att dividera entalet (K_1) med tre. Exemplen från forskningslektion tre synliggör hur eleverna i elevgrupp C, när de urskilde entalets representation i uppgiften, kunde konstruera nya successivt större och mindre talenheter.

Tal som mätetal

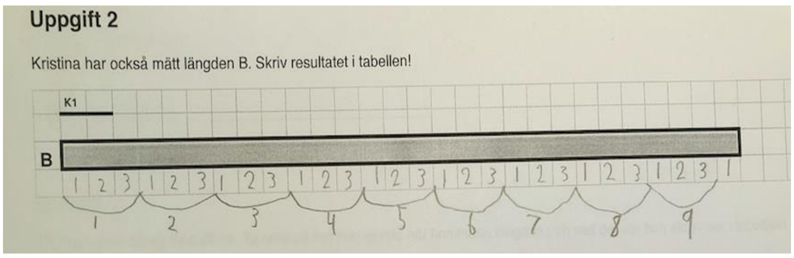
Eleverna i studien behövde kunna urskilja tal som mätetal[8] för att kunna lösa uppgifterna i forskningslektionerna och pröva relationen mellan bastalet och successivt större respektive mindre talenheter. Att förstå tal som mätetal kan kontrasteras mot att förstå tal som räknetal, det vill säga tal som beskriver ett antal uppräkningsbara föremål av något slag.

Ett exempel på svårigheter, som uppstod när eleverna inte kunde urskilja tal som mätetal, kom till uttryck vid uppgift 2 under forskningslektion 1, när de löste uppgiften genom att räkna och gruppera rutor (figur 7) i stället för att pröva relationen mellan bastalet tre och successivt större talenheter.

Uppgiften var utformad så att sträcka B skulle mätas i bas tre. Entalet K_1, representerad av längden av två av enheten en ruta, var den enda talenhet som presenterades för eleverna. Sträckan var dimensionerad till 28 rutor och dess längd skulle noteras 1 1 2 i bas tre vilket innebar att både ental och de successivt större talenheterna ”tretal” (K_2) och ”niotal” (K_3) skulle användas.

Figur 7

Exempel på elevsvar på uppgift 2: forskningslektion 1, elevgrupp A.



Not: Sträcka B, 28 rutor lång, skulle mätas i bas tre. Talenheten K_1 representeras av två av enheten en ruta. Korrekt lösning är 1 1 2. Exempel på elevlösning där rutor har numrerats 1, 2, 3, 1, 2, 3 och så vidare och grupperats tre och tre i nio grupper samt en etta (1) noterats under den sista rutan.

Syftet, med uppgift 2 i forskningslektion 1, var att eleverna (elevgrupp A), efter att de hade identifierat att det saknades två successivt större talenheter (K_2 och K_3) för att kunna notera sträckans längd, skulle engageras i ett utforskande av hur dessa talenheter kan utvecklas genom gruppering.

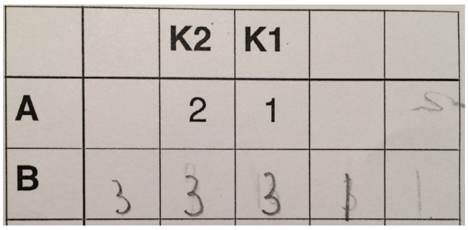
8 Mätetal är “tal som anger hur stor en viss storhet är uttryckt i en viss enhet” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 72). Exempelvis i 2,3 meter är storheten längd, mätetalet 2,3 och enheten meter.

Läraren introducerade uppgiften genom att projicera den på tavlan och bad en av eleverna att läsa uppgiftstexten högt. Eleverna arbetade först två och två. De flesta räknade och grupperade rutor tre och tre genom att rita bågar under sträckan (se elevexempel i figur 7). Detta visar att dessa elever förstod uppgiftens inbyggda regel, att man inte kan räkna längre än till tre.

Fler än hälften av eleverna skrev 3 3 3 1 på raden för sträcka B i tabellen (figur 8) och använde inte positionerna för att visa antal av olika talenheter. Vi tolkar detta som att eleverna i stället redovisar antalet 28 rutor i form av en multiplikativ addition (3·3 + 3·3 + 3·3 + 1).

Figur 8

Exempel på elevsvar på uppgift 2, forskningslektion 1, elevgrupp A.



		K2	K1		
A		2	1		
B	3	3	3	1	1

Not: Sträcka B är 28 rutor lång och längden skulle mätas i bas tre. Talenheten K_1 representeras av två av enheten en ruta. Det korrekta svaret är 1 1 2. Exempel på elevlösning i tabellen är 3 3 3 1.

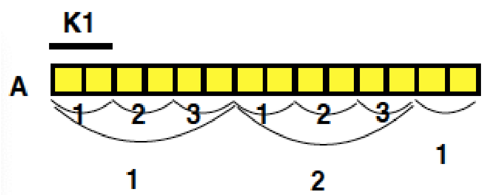
Vår tolkning av elevernas upprepning av 1, 2 och 3 under rutorna (figur 7), deras fokus på räkning av enskilda rutor (28 stycken) och redovisningen i tabellen av antalet rutor (figur 8) är att de använde tal i uppgiften som räknetal snarare än att de använde tal som redskap för att ange resultatet av en mätning med stöd av talenheter av successivt växande storlek. Vi menar att exemplet visar att när eleverna använde tal som räknetal, hindrades de från att identifiera att det behövs successivt större talenheter och därmed från att pröva relationen mellan bastalet och sådana talenheter.

Även i forskningslektion 2 fastnade eleverna (elevgrupp B) i ett räknande av enheter, denna gång i form av ett antal K_1 som motsvarade sträckans längd. Följande exempel (excerpt 4) visar hur eleverna Cilla och Cajsa (elevgrupp C), efter revideringen av uppgift 1 inför forskningslektion 3, tog i bruk tal som mätetal och beskrev relationen mellan entalet och en successivt större talenhet. Introduktionen av uppgift 1 hade reviderats så att läraren initialt visade samtliga sträckor (A, B och C) som skulle mätas i uppgifterna (1, 2 och 3) och tydligt pekade ut sträckorna.

Vid introduktionen av uppgift 1 under forskningslektion 3 betonade läraren (enligt beslutad revidering) att det var en mätning som skulle göras genom att peka längs samtliga sträckor i uppgift 1, 2 och 3 (se figur 2). Läraren sa "Den här längden heter A [pekar på sträcka A]. Den här längden heter alltså B och den här längden heter C [pekar på sträckorna]."

Figur 9

Uppgift 1: forskningslektion 3, elevgrupp C.



Not: Syftet med uppgiften är att eleverna ska reflektera över relationen mellan talenheterna K_1 och K_2. De små bågarna markerar K_1. De stora bågarna markerar K_2.

Efter lärarens introduktion beskrev Cilla och Cajsa K_2 som den yttre bågen och relaterade den till K_1 – den inre bågen (figur 9 och excerpt 4).

Excerpt 4
Uppgift 1, forskningslektion 3, elevgrupp C.

Cilla:	Det finns ju två, det finns tre stora [långa], tre bågar om man ser på dom yttre bågarna [pekar mot den projicerade illustrationen av sträcka A på tavlan och ritar med fingret i luften längs med de två längre bågarna och den korta bågen].
Läraren:	Menar du de här då? [pekar längs de två långa bågarna och den korta bågen i illustrationen på tavlan]
Cilla:	Ja, det finns två stora [långa] och en liten [kort]. Då antar jag att K_2 är de två stora [långa] och K_1 är den lilla [korta].
Läraren:	Hur tänker du Cajsa? Vad var det Cilla sa?
Cajsa:	Den ena [bågen] är K_2 och den andra [bågen] är K_1.

Cillas ritande i luften av de två långa bågarna (K_2) och den korta bågen (K_1) och hennes beskrivning "om man ser på dom yttre bågarna" samt hennes antagande "K_2 är de två stora och K_1 är den lilla" indikerar att hon beskrev längden av K_2 genom att mäta ut den med längden av tre K_1. Vi tolkar därmed Cillas och Cajsas beskrivningar som att de urskilde och tog i bruk tal som mätetal genom att mäta ut sträcka A med längden av två stycken K_2 och ett stycke K_1.

Exemplen ovan synliggör att många av eleverna, i den här typen av uppgifter, behövde kunna urskilja tal som mätetal för att inte fastna i ett uppräknande av ett antal enheter och för att kunna pröva relationen mellan bastalet och en successivt större eller mindre talenhet.

Diskussion och slutsatser

Avsikten i den learning study varifrån datamaterialet är hämtat var att designa en lektion där eleverna kunde utveckla förståelse för strukturen i bassystemet. Forskargruppen utformade lektionen, med inspiration av learning activity, bestående av tre uppgifter där eleverna skulle kunna engagera sig i ett utforskande av framförallt relationen mellan bastalet och successivt större respektive mindre talenheter. I artikelns efteranalys framgår tre aspekter av betydelse för eleverna att urskilja: bastalet, entalets representation och tal som mätetal. Resultatet kompletterar tidigare forskning som exempelvis lyfter fram att elever behöver förstå strukturen i tiobassystemet som oändligt expanderande Thomas (1998) och kunna gruppera talenheter till en större talenhet och dela upp en talenhet i mindre talenheter vid växlingar i subtraktionsalgoritmer Ma (2020).

Många av eleverna i studien hade svårt att förstå att bastalet kan variera, att ett bastal gäller för alla positioner i ett tal och att bastalet utgör en gräns för när övergången till en annan talenhet tidigast respektive senast kan göras, det vill säga att bastalet styr gruppering till successivt större talenheter och delning i successivt mindre talenheter. En sådan förståelse kan antas vara särskilt viktig för att elever ska förstå de växlingar och grupperingar mellan hundratal, tiotal och ental som ibland krävs vid subtraktion (t.ex. 223 – 165) eller addition (147 + 24) och vid jämförelse av och beräkningar med decimaltal.

Förståelse för bastalets funktion är också viktig för att elever ska kunna göra generaliseringar över hur strukturen i bassystemet fungerar (Slovin, 2011; Slovin & Dougherty, 2004). I studien av Slovin och Dougherty (2004) framgår exempelvis att elever i årskurs 2, med hjälp av bastalet, kan ge en generell förklaring till varför och när övergången till en successivt större talenhet sker: "It depends on what base you're in. You can't go to the base number. You can go up to one less." (Slovin, 2011, s. 45). Att elever, såsom vår studie visar, ännu i årskurs 4 kan ha svårt att förstå bastalet och dess funktion, framstår problematiskt i relation till att elever i de tidiga skolåren anses behöva utveckla en fördjupad förståelse för tiobassystemet (t.ex. Ma, 2020; McIntosh, 2008).

Enligt Davydov (2008) behöver elever, för att utveckla en fördjupad förståelse för tiobassystemet, redan i de tidiga skolåren arbeta även med andra baser än bas tio. Vad gäller undervisning om olika bassystem i svensk grundskola framgår av kommentarmaterialet till Lgr22 (Skolverket 2022) att elever under de första skolåren ska ges möjlighet att "utveckla kunskaper om hur man under olika tider har representerat tal på skilda sätt – till exempel hur man har använt olika föremål eller tecken för att representera ental, tiotal, hundratal och tusental innan nollan infördes" (s. 12). Det är först under årskurs 4 till 6 som undervisningsinnehållet ska behandla "olika talsystem och några talsystem som använts i olika kulturer genom historien" (Skolverket 2022, s.12). I kommentarmaterialet anges det binära talsystemet och det romerska talsystemet som exempel på talsystem. Det framgår inte att eleverna behöver förstå att tiobassystemet är ett av flera system i ett övergripande system eller förstå bastalets generella funktion. Utifrån idén att elever behöver förstå bassystemet som en övergripande struktur för tiobassystemet (Vygotsky, 1934/1986; Davydov, 1986/2008; Slovin, 2011; Slovin & Dougherty, 2004; Venenciano m.fl., 2015) och studiens resultat som visar att det kan vara svårt för elever att förstå bastalet menar vi att undervisningen även i den svenska skolan, redan i de tidiga skolåren, behöver göra det möjligt för elever att arbeta med olika baser.

De flesta elever i studien hade också svårt att förstå symbolen för entalet (K_1) och dess visuella representation, trots att den visualiserades i uppgifternas illustrationer (figur 1) och verbaliserades av läraren och att elevgrupperna arbetade manipulativt med bågmodellen och tabellen. Många elever förstod inte att entalet representerades av längden av *ett antal* rutor (i lektion 1, två rutor) utan uppfattade ett ett-till-ett förhållande mellan en enhet (längden av en ruta) och entalet. Detta fick till följd att de inte, som förväntat, kunde ta i bruk representationen för att konstruera den successivt mindre talenheten (K_0) genom att dividera längden (av det antal rutor) som representerar K_1 med bastalet. Elevernas svårigheter att förstå att ett antal enheter (rutor) representerar entalet framstod alltså hindra dem från att förstå en successivt mindre talenhet som en basdel av entalet.

Att elever kan ha svårigheter att urskilja en representation för entalet kan beskrivas som att de har otillräcklig representationell kompetens (jfr Rau, 2017). Förståelse för representationer ses som något centralt i matematiken och representationer har sedan lång tid tillbaka pekats ut som "the heart of the content of mathematics" (Kaput, 1987, s. 22). Ett behov av ökat fokus på explicit undervisning om representationer lyfts fram i tidigare studier (Collins, 2011; Desai m.fl., 2021; Goldin, 2014; Mainali, 2021; Rau, 2017). Collins (2011) argumenterar för att lärare ska fokusera på elevers representationella kunnande i stället för att lägga stor möda på att lära elever algoritmer – "the time might be better spent in helping students build a strong representational competence" (s. 108).

Att använda representationer kan dock vara utmanande om eleverna inte förstår dem, särskilt om avsikten är att de med stöd av dessa representationer ska förstå något som är svårt för dem, till exempel rationella tal. Rau (2017) beskriver en sådan situation som "a representation dilemma" (s. 717) eftersom elevernas förutsättningar att förstå kunskapsinnehållet hindras, trots att avsikten är att de med hjälp av representationerna ska förstå innehållet. I tidigare forskning problematiseras användningen av representationer vid undervisning om positionssystemet och hur dessa kan utformas för att eleverna ska förstå representationernas struktur och kunna använda dem (Lafay m.fl., 2023; Osana m.fl., 2017). Med utgångspunkt från vårt resultat, som visar att elever kan ha svårt att förstå att ett antal enheter kan representera entalet, menar vi att det är viktigt att lärare uppmärksammar elevernas förståelse av representationen för entalet oavsett om den utgörs av längden av ett antal rutor, ett antal pärlor, en area eller en specifik volym (jfr Davydov, 1986/2008; Davydov m.fl., 2012).

Ytterligare ett resultat av studien är att det var svårt för de flesta elever att förstå tal som mätetal. När elever, som i vår studie, arbetar med uppgifter där syftet är att de ska identifiera att det behövs successivt större respektive mindre talenheter för att kunna notera resultatet av en mätning, inte urskiljer att tal kan användas som mätetal kan det hindra deras utforskande av relationen mellan bastalet och successivt större respektive mindre talenheter än entalet. Att elever behöver förstå tal som mätetal för att kunna identifiera att det saknas en successivt större eller mindre talenhet och därigenom utveckla förståelse för talenheter går i linje med Davydovs argument för arbete med mätning under de första skolåren (Davydov, 1986/2008). Också Venenciano med kollegor (2015) argumenterar för att undervisning som genomförs i en kontext av mätning ger elever möjlighet att utveckla förståelse för talenheter "as units themselves rather than as counted collections of discrete pieces" (s. 581). Vi menar att elevers förståelse för tal som mätetal och särskilt förståelse för hur successivt mindre talenheter kan användas för att precisera en mätning, även kan främja förståelse för decimaltal.

Studiens resultat begränsas av att forskningslektionerna genomfördes med ett mindre antal elever där varje grupp deltog i en learning study-cykel. Dock utgör learning study en väl beprövad forskningsansats där det iterativa arbetet ger kvalitativa data som kan generera nyanserad och specificerad kunskap om det aktuella kunskapsinnehållet och relationen mellan undervisning och lärande (Carlgren, 2012). Att uppgifterna utformades och genomfördes med inspiration från ED-programmet och fokuserade på arbete med mätning i andra baser än bas tio var nytt för eleverna, vilket kan ha förvirrat dem eftersom de inte var vana vid denna typ av undervisning. Dock kan ED-programmet, där eleverna får arbeta utforskande med andra baser än bas tio, ha bidragit till att andra aspekter synliggjordes än vad som är möjligt när elever arbetar avgränsat till bas tio.

Studiens resultat är generaliserbart till vissa delar av matematikundervisningen, särskilt på låg- och mellanstadiet. Kunskap om att elever kan ha problem med att urskilja de tre aspekterna kan användas för att skapa förutsättningar för elever att utveckla en fördjupad förståelse för tiobassystemet. Resultatet kan också användas i undervisning i andra matematiska områden. Exempelvis kan kunskap om att elever kan ha svårt att urskilja bastalet användas vid undervisning om addition och subtraktion där det förväntas att eleverna ska förstå växling och gruppering mellan olika talenheter. Kunskap om elevers svårigheter att förstå representationen för entalet kan användas vid undervisning där bokstavsbeteckningar eller andra symboler används och där eleverna behöver förstå dessa representationer för att kunna arbeta med kunskapsinnehållet. Kunskap om att elever inte alltid uppfattar tal som mätetal kan användas vid exempelvis geometri där det förväntas att elever ska behandla mätningar av olika slag.

Tack

Ett stort tack riktas till medverkande lärare medverkande lärare Åsa Nikula, Paul Stensland och Anna Stridfält från Sjöstadsskolan, Stockholm Teaching & Learning Studies (STLS) och Utbildningsförvaltningen i Stockholm, samt den av Vetenskapsrådet finansierade forskarskolan i Learning study.

Referenser

Bengtsson, H. (2021). *Att utveckla mellanstadieelevers kritiska och temporala tänkande: En lärandeverksamhetsteoretisk studie rörande hållbar utveckling.* [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. https://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:1536041/FULLTEXT01.pdf

Björk, M., Stensland, P. & Stridfält, A. (2019). Tecken på framväxande teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet. *Forskning om undervisning och lärande*, *7*(2), 26–49.

Broman, A., Waermö, M. & Chudinova, E. (2022). The modelling in developmental education: A condition for theoretical abstraction and generalization. *Revista Educativa – Revista de Educação*, *25*(1). https://doi.org/10.18224/educ.v25i1.12762

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(2), 1–18. https://doi.org/10.1108/20468251211224172

Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(2), 185–207. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9790-3

Collins, A. (2011). Representational competence: A commentary on the Greeno analysis. I T. Koschmann (Red.), *Theories of learning and studies of instructional practice* (s. 105–112). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7582-9

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (J. Teller, Övers.). National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study* (P. Moxhay, Övers.). Nova Science Publishers. (Originalutgåvan publicerad 1986)

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G. & Saveleva, O. V. (2012). *Matematikka 2*. Vita Press.

Desai, S., Bush, S. B. & Safi, F. (2021). Mathematical representations in the teaching and learning of geometry: A review of the literature from the United States. International Consortium for Research in Science and Mathematics Education (ICRSME). *Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education*, *25*(4), 6–22.

Egorova, A. (2006). Modeling as a condition for creating sensible hypotheses in adolescents (using living creatures organization and functioning hypotheses as an example). *Cultural-Historical Psychology*, *2*(2), 105–117.

Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap.* [Licentiat-uppsats, Stockholms universitet].

Eriksson, H. (2021). *Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksamhet: En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klasser i grundskolans tidigaste årskurser.* [Doktorsavhandling, Stockholms universitet].

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en Learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning: exemplet Learning study* (s. 61–84). Gleerups Utbildning AB.

Eriksson, I., Wettergren, S., Fred, J., Nordin, A.-K., Nyman, M. & Tambour, T. (2019). Materialisering av algebraiska uttryck i helklassdiskussioner med lärandemodeller som medierande redskap i årskurs 1 och 5. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *24*(3–4), 81–106.

Fishbein, B., Foy, P. & Yin, L. (2021). *TIMSS 2019 Item Percent Correct Statistics – Grade 8. TIMSS 2019 User Guide for the International Database* (2 uppl.) [Dataset]. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website. https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-database/

Goldin, G. A. (2014). Mathematical representations. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education*, (s. 409–413). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_103

Hansson, H. (2019). Betydelsen av att variera innehållsliga aspekter för yngre elevers lärande av platsvärde. *Forskning om undervisning och lärande*, *7*(3), 48–74.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 19–26). Lawrence Erlbaum Associates.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan. Nationellt centrum för matematikutbildning* (NCM). Göteborgs universitet.

Lafay, A., Osana, H. P. & Levin, J. R. (2023). Does conceptual transparency in manipulatives afford place-value understanding in children at risk for mathematics learning disabilities? *Learning Disability Quarterly*, *46*(2), 92–105. https://doi.org/10.1177/07319487221124088

Latif, S., Qayyum, J., Lal, M. & Kahn, F. (2011). Novel approach to the learning of various number systems. *International Journal of Computer Applications*, *26*(7), 0975–8887. https://doi.org/10.5120/3116-4283

Lillvist, A. (2022). Från forskningsetiska principer i praktiknära forskning till en praktiknära etik? I I. Eriksson & A. Öhman-Sandberg (Red.), *Praktikutvecklande forskning mellan skola och akademi. Utmaningar och möjligheter vid samverkan* (s. 69–81). Nordic Academic Press.

Linell, P. (1994). *Transkription av tal och samtal: teori och praktik*. Linköpings universitet, Tema kommunikation.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Ma, L. (2020). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1–21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok*. Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Hooper, M. (2016). *Percent correct for the TIMSS 2015 items mathematics eighth grade* [Dataset]. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website. https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-database/

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Osana, H. P., Adrien, E. & Duponsel, N. (2017). Effects of instructional guidance and sequencing of manipulatives and written symbols on second graders' numeration knowledge. *Education Sciences*, *7*(2), 52. https://doi.org/10.3390/educsci7020052

Quennerstedt, A., Harcourt, D. & Sargeant, J. (2014). Forskningsetik i forskning som involverar barn: Etik som riskhantering och etik som forskningspraktik. *Nordic Studies in Education*, *34*(2), 77–93.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Rau, M. A. (2017). Conditions for the effectiveness of multiple visual representations in enhancing STEM learning. *Educational Psychology Review*, *29*, 717–761. https://doi.org/10.1007/s10648-016-9365-3

Rennstam, J. & Wästerfors, D. (2011). Att analysera kvalitativt material. I G. Ahrne & P. Svensson (Red.), *Handbok i kvalitativa metoder* (s. 194–210). Liber AB.

Roth, W. M. & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and Learning*. SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-564-2

Schmittau, J. (2003). Beyond constructivism and back to basics: a cultural historical alternative to the teaching of the base ten positional system. I B. Rainforth & J. Kugelmass (Red.), *Cur-*

riculum and instruction for all learners: Blending systematic and constructivist approaches in inclusive elementary schools (s. 113–132). Brookes Publishing.

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science*, *26*(4), 346–351. https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Skolverket. (2022). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Grundskolan. Reviderad 2022.

Slovin, H. (2011). Revelations from counting: A window to conceptual understanding. *Investigations in Mathematics Learning*, *3*(2), 35–51. https://doi.org/10.1080/24727466.2011.11790302

Slovin, H. & Dougherty, B. J. (2004). Children´s conceptual understanding of counting. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (4), 209–216.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers.* [Doktorsavhandling, University of Melbourne].

Thomas, N. D. (1998). *Children's understanding of the number system*. [Doktorsavhandling, Macquarie University].

Venenciano, L., Slovin, H. & Zenigami, F. (2015). Learning place value through a measurement context. I X. H. Sun, B. Kaur & J. Novotná (Red.), *Proceedings of the international commission on mathematical instruction Study 23. Primary Mathematics Study on Whole Number* (s. 575–582). University of Macau.

Vermeulen, J. A., Béguin, A., Scheltens, F. & Eggen, T. J. H. M. (2020). Diagnostic assessment in third-grade subtraction: the relation between bridging errors, number of errors and mathematical ability. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *27*(6), 687–706. https://doi.org/10.1080/0969594X.2020.1856038

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. [Elektronisk resurs]

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (E. Hanfmann & G. Vakar, Översätt.; 2 uppl.). MIT Press. (Originalutgåvan publicerad 1934)

Vygotsky, L. S. (1997). The problem of the development of higher mental functions. I R. W. Rieber (Red.), *The collected works of L. S. Vygotsky: The history of the development of higher mental functions, Vol. 4* (s. 1–26) (M. J. Hall, Övers.). Plenum Press.

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, *19*(1), 9–18. https://www.jstor.org/stable/23421398

Zuckerman, G. (2022). Learning task as the heart of learning activity. *Revista Educativa-Revista de Educação*, *25*(1). https://doi.org/10.18224/educ.v25i1.12644

Författarpresentationer

Marie Björk

Marie Björk är fil. lic. i specialpedagogik, arbetar som specialpedagog och förstelärare vid Sjöstadsskolan i Stockholm, är handledare i learning study och arbetar f.n. till 25 procent i det av Skolforskningsinstitutet finansierade PLUS-projektet.

Diana Berthén

Diana Berthén, universitetslektor på Specialpedagogiska institutionen, Stockholms universitet. Hon forskar bland annat om förutsättningar för lärande för elever med intellektuell funktionsnedsättning.