FORSKUL
FORSKNING OM
UNDERVISNING
& LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, 8–30
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Utveckling av matematikundervisning som främjar likvärdighet i förskoleklass

Orginalartikel

Maria Walla[1]* & Hanna Palmér[2]

Sammanfattning

I den här artikeln presenteras en designstudie med målet att utforma en likvärdig matematikundervisning i förskoleklass, i betydelsen att alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Designstudien är genomförd i en svensk kontext och tar utgångspunkt i den obligatoriska kartläggningen vid skolstart. Studien genomfördes av en förskoleklasslärare och två forskare, som tillsammans planerade, genomförde och utvärderade matematikundervisning. Vid studiens start identifierades tre utvecklingsområden: instruktion, elevlösningar och talutrymme. För att möta dessa utvecklingsområden introducerades tre designprinciper: låg tröskel, öppna matematikuppgifter och resonemangsfrämjande repliker. I artikeln presenteras hur dessa designprinciper påverkade utvecklingsområdena, i linje med designstudiens mål. Sammantaget visar resultaten på en utveckling av en matematikundervisning som möter elevers olikheter.

Nyckelord: tidig matematikundervisning, designforskning, förskoleklass, likvärdighet, designprinciper

Abstract

This article presents an educational design research study aiming to develop preschool class mathematics in line with equity. In the study, equity is defined as all students having access to mathematical content and opportunity to develop prosperous positions in and towards the subject. The design of the education was based on the mandatory assessment at the start of preschool class. One preschool class teacher and two researchers planned, carried out, and evaluated the mathematics education together. At the start of the study, three areas of development were identified: instruction, student solutions, and students' verbal contributions. To address these areas of development, three design principles were introduced: low threshold, open-ended mathematical tasks, and prompts for reasoning. This article presents how these design principles developed the areas of development, in line with the goals of the study, that is, mathematics education that meet the diverse needs of students.

Keywords: Early mathematics, Educational design research, Preschool class, Equity, Design Principles

1 Högskolan Dalarna

2 Linnéuniversitetet

*Korresponderande författare:
Maria Walla
wmr@du.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23887
SSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Introduktion

I denna artikel presenteras en designstudie med fokus på matematikundervisning i förskoleklass. Förskoleklassen är en skolform som ska fungera som en bro mellan förskola och grundskola, där kreativitet och lek framhålls som centralt (Ackesjö & Persson, 2019). Designstudien genomfördes i samarbete mellan en förskoleklasslärare och två forskare med utgångspunkt i den obligatoriska kartläggning, som sedan 2019, har genomförts vid skolstart i alla förskoleklasser. I jämförelse med andra nordiska länder är Sverige inte unikt vad gäller tidig kartläggning. I såväl Norge (Utdanningsdirektoratet, 2017) som Finland (Aunio m.fl., 2006) genomförs kartläggning av matematikkunskaper hos elever i samma åldersgrupp. Även internationellt ökar kartläggning av yngre elevers matematikkunskaper och därmed även mängden kartläggningsmaterial avsedda för yngre elever. Denna ökning förklaras med ett ökat intresse för tidig matematikundervisning eftersom tidiga insatser visats förebygga senare svårigheter (Dong m.fl., 2021).

Syftet med den svenska kartläggningen av alla elever i förskoleklass är att bidra till skolans kompensatoriska uppdrag och främja likvärdighet, genom att hjälpa lärare att identifiera elever i behov av extra stöd, extra anpassningar eller extra utmaningar. Kartläggningen ska fungera som ett stöd för lärarnas fortsatta undervisning, både gällande vilket matematiskt innehåll som ska fokuseras på i undervisningen samt hur undervisningen ska anpassas utifrån elevernas resultat (Skolverket, 2023). I en tidigare studie där lärare i förskoleklass har intervjuats om kartläggningen berättar lärare hur de, genom kartläggningen, får ny information om elever, information som de tidigare inte har haft tillgång till. De säger att denna nya information medför att de behöver anpassa både val av uppgifter och förväntningar till olika elever, utifrån resultatet av kartläggningen. Hur denna anpassning av undervisningen ska genomföras uttrycker de som en utmaning där det inte är självklart hur den matematikundervisning som utformas efter kartläggningen ska designas för att möta de olikheter i elevgruppen som kartläggningen synliggör (Walla, 2024).

Det är denna utmaning som utgör utgångspunkt för den designstudie som presenteras i denna artikel. Målet med studien var att designa en matematikundervisning där alla elever, oavsett resultat på det obligatoriska kartläggningsmaterialet, skulle få likvärdig tillgång till ett matematiskt innehåll samt möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Denna målsättning utgick ifrån forskning om likvärdig undervisning i heterogena elevgrupper (Schoenfeld, 2014; Boaler, 2008). I en likvärdig matematikundervisning i heterogena elevgrupper har alla elever likvärdig tillgång till det matematiska innehållet, vilket av Schoenfeld (2023) beskrivs som i vilken utsträckning klassrumsaktiviteter inbjuder till och stödjer alla elevers aktiva engagemang i det matematiska innehållet. Även när det finns produktiva aktiviteter och rika diskussioner i ett klassrum behöver det inte betyda att undervisningen är likvärdig, eftersom det kan finnas elever i klassrummet som inte har möjlighet att delta i dessa aktiviteter och diskussioner (Cohen & Lotan, 1997; Schoenfeld, 2014). Att alla elever har möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet innebär en relationell likvärdighet vilket enligt Boaler (2008) handlar om relationer i klassrummet, till exempel att elever och lärare behandlar varandra med respekt, att elever tar ansvar för sitt eget och andras lärande och att elevers olika svar och förklaringar beaktas som en tillgång i matematikklassrummet (Boaler, 2006, 2008; Xenofontos, 2019).

Utifrån ovanstående har följande forskningsfråga fokuserats i designstudien: Vilka designprinciper främjar en matematikundervisning i förskoleklass där alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet?

Tidigare forskning

I detta avsnitt presenteras tidigare forskning kopplat till tre olika områden: först beskrivs svensk forskning om matematikundervisning i förskoleklass, därefter nationell och internationell forskning om matematikundervisning som möter elevers olikheter och avslutningsvis den forskning som har utgjort utgångspunkt för utvecklingen av matematikundervisning i designstudien.

Matematikundervisning i förskoleklass

I tidigare studier, där svenska förskoleklassens matematikundervisning har studerats, har framför allt taluppfattning och problemlösning varit i fokus. Men det finns också studier där förskoleklassens matematikundervisning har jämförts med matematikundervisningen i årskurs 1. I en observationsstudie har Arnell (2021) jämfört elevers möten med matematik i förskoleklass och årskurs 1. Studiens resultat visar att, även om elevers möten med matematik ser olika ut inom förskoleklass respektive skolår 1, har elever generellt större handlingsfrihet i förskoleklassen, då mötet med matematik i årskurs 1 är mer formellt. Dessa skillnader kan enligt Arnell ge negativa konsekvenser för kontinuiteten i elevernas tidiga matematiklärande där eleverna inte känner igen sig i den matematikundervisning de möter i skolår 1.

Andra studier, där förskoleklassens matematikundervisning har studerats, visar att aktiviteter i syfte att främja elevers matematikfärdigheter redan i förskoleklass är av värde för deras fortsatta lärande i matematik och i andra ämnen. Sterner med flera (2019), Vennberg (2020) samt Sterner med flera (2023) har genomfört interventioner i förskoleklasser, där de har utgått ifrån undervisningsmaterialet ”Tänka, resonera och räkna i förskoleklass” (TRR), samt tillhörande fortbildningsmaterial (Sterner m.fl., 2014), och undersökt effekten av tidigt fokus på matematikfärdigheter. Studierna av Vennberg och Norqvist (2018) och Vennberg (2020) visar att ett systematiskt arbete med matematikundervisningen enligt TRR kan förbättra elevers långsiktiga prestationer i matematik, även lågpresterande elevers prestationer. En småskalig interventionsstudie av Sterner med flera (2019) visar att matematikundervisning enligt TRR har positiva effekter på elevers taluppfattning. När samma studie genomfördes i större skala blev effekterna större, något som förklaras genom att den storskaliga studien genomfördes under en längre tidsperiod (Sterner m.fl., 2023).

Björklund med flera (2022) har genomfört en kartläggning av undervisning om tal och räkning i förskoleklass, genom att observera matematikundervisning i 95 olika förskoleklasser. I kartläggningen identifieras goda undervisningsexempel, men även utvecklingsområden. Bland annat synliggörs hur undervisningen i förskoleklass riskerar att reduceras till ett ”görande” där matematikinnehållet glöms bort, samt att elevers svar och inspel sällan utvecklas vidare av lärarna. Som en del av samma projekt har Björklund och Elofsson (2023) genomfört en studie där lekfullhet studeras som en drifkraft i elevers matematiska processer. Enligt Björklund och Elofsson (2023) är det inte tillräckligt att bädda in matematikinnehållet i ett lekfullt sammanhang, de argumenterar i stället för att skapa en miljö som underlättar för elevernas strukturering av det matematiska innehållet. När det matematiska innehållet på så vis blir begripligt och användbart för eleven, bidrar detta till större möjligheter till lärande. Leken blir då ett värdefullt pedagogiskt verktyg där barns egna erfarenheter är av betydelse. I en annan studie utforskar Helenius med flera (2016) om och när lek i förskoleklass kan ses som matematisk. Studien visar att alla sexåringar, på grund av de sociala relationerna i lek, inte har samma möjligheter att delta i matematisk lek. Därför har läraren en viktig roll att uppmuntra barn till att i lek vara kreativa, deltagande och bidra till förhandlingen av lekens relger (Helenius m.fl., 2016).

Palmér och van Bommel har i en tioårig longitudinell designstudie utvecklat och studerat matematikundervisning i förskoleklass med utgångspunkt i problemlösning och problemformulering (Palmér & van Bommel, 2020, 2023; van Bommel & Palmér, 2021). Sammantaget visar resultaten från deras studier att elever både utvecklar goda kunskaper i olika matematikinnehåll och ett positivt förhållningssätt i och till matematikämnet. I en annan studie om problemlösning i förskoleklass, av Pramling och Pramling Samuelsson (2008), studerades problemlösning som del av sagoberättande. Studiens resultat visar att det var utmanande för eleverna att samordna egna förklaringar till en visuell illustration, samt att eleverna hade svårt att skilja mellan division som matematisk operation och som en praktisk aktivitet.

Sammantaget visar tidigare svensk forskning om förskoleklassen att den matematik som elever i förskoleklass ges möjlighet att lära har stor betydelse för deras fortsatta lärande i matematik. Dock är det främst taluppfattning och matematikundervisning genom problemlösning som majoriteten av forskningen har fokuserat på. Vidare visar den tidigare forskningen att elever generellt har större handlingsfrihet i förskoleklassens matematikundervisning än i årskurs 1, samt att leken kan vara ett värdefullt pedagogiskt verktyg där barns egna erfarenheter blir av betydelse.

Likvärdig matematikundervisning

Vid skolstart i förskoleklass genomförs, som tidigare nämnts, en obligatorisk kartläggning som enligt Skolverket (2023) syftar till att bidra till skolans kompensatoriska uppdrag och förbättra likvärdigheten. Kartläggningen syftar också till att främja likvärdighet genom att läraren får hjälp med att identifiera elever i behov av extra stöd, extra anpassningar och extra utmaningar (Skolverket, 2023). Att det obligatoriska kartläggningsmaterialet uppmanar lärare att ta hänsyn till elever i behov av extra utmaningar möjliggör att en tidigare ofta förbisedd elevgrupp nu uppmärksammas (Margrain & van Bommel, 2023). Annan forskning om det obligatoriska kartläggningsmaterialet visar att materialets olika framskrivna syften kan bidra till en otydlighet kring hur kartläggningens resultat ska användas. De olika syftena riskerar att hamna i konflikt med varandra och i kombination med att enbart delar av läroplanens matematikinnehåll ingår i materialet riskerar kartläggningen att begränsa snarare än främja elevernas möjligheter till utveckling och kunskap i matematik (Bagger m.fl., 2019; Walla, 2022).

En likvärdig undervisning, som efter kartläggningen ska möta alla elevers olikheter, kan utformas på olika sätt och inom matematikdidaktisk forskning definieras likvärdighet på många olika sätt. Dessa olikheter ger konsekvenser både för hur likvärdighet mäts och vad det innebär att utforma och sträva efter en likvärdig matematikundervisning som möter elevers olikheter (Llewellyn & Mendick, 2011). I denna studie definieras likvärdig matematikundervisning som en matematikundervisning där alla elever, oavsett förkunskaper, ges tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) och där alla elever ges möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008).

Alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll utgår ifrån matematikdidaktisk forskning om "Equitable Access to Content" (Schoenfeld, 2023, s. 166, översättning: likvärdig tillgång till innehåll) vilket beskrivs som lika möjligheter för alla elever att lära sig viktigt matematiskt innehåll (Burkhardt & Schoenfeld, 2018; Nortvedt & Buchholtz, 2018; Schoenfeld, 2023). Likvärdig tillgång till innehåll handlar om i vilken utsträckning klassrumsaktiviteter inbjuder till och stödjer alla elevers aktiva engagemang i det matematiska innehållet vilket är en förutsättning för att utveckla förståelse för matematiskt innehåll samt för att elever ska bygga produktiva matematiska identiteter (Schoenfeld, 2014). Kärnfrågan i forskning om likvärdig tillgång till matematiskt innehåll formuleras av Schoenfeld (2014, s. 409) som "Vem deltar och vem deltar inte i klassens matematiska arbete och hur?". Även om det finns matematiskt produktiva aktiviteter och matematiskt rika diskussioner i ett klassrum betyder det inte alltid att alla elever har möjligheter att delta i dem. Ett klassrum där enbart några få av eleverna har möjlighet att resonera kring ett matematikinnehåll är inte likvärdigt – oavsett hur rika matematikdiskussionerna är (Cohen & Lotan, 1997; Schoenfeld, 2014).

Alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet utgår ifrån matematikdidaktisk forskning om relationell likvärdighet vilket enligt Boaler (2008) innebär att alla elever ges möjlighet att utveckla framgångsrika sätt att agera i och relaterat till matematikämnet. Framgången i sätten att agera kopplas dels till att eleverna utvecklar en god värdegrund, dels till ökat lärande i matematik. Enligt Boaler innehåller relationell likvärdighet tre perspektiv: a) respekt för andras idéer, b) engagemang och ansvar för andras lärande och c) kunskap i metoder för kommunikation och stöd för andras lärande. Relationell likvärdighet flyttar därmed fokus från mätbara och jämförbara resultat till relationer, i betydelsen att elever behandlar varandra med respekt där olika elevers olika svar och förklaringar beaktas som en tillgång i matematikklassrummet (Boaler, 2006, 2008; Xenofontos, 2019). I studierna kring relationell likvärdighet har Boaler (2006, 2008) undersökt metoder för helklassundervisning i elevgrupper på gymnasiet där eleverna hade mycket olika matematikkunskaper vilket kan liknas vid utgångspunkten för denna studie, även om eleverna är i olika åldrar. De elever som i Boalers (2008) studie deltog i en matematikundervisning som designades utifrån relationell likvärdighet utvecklade i högre grad relationell kompetens och ökade sina matematikkunskaper markant jämfört med elever i kontrollklasser (Boaler & Staples, 2008). Relationell likvärdighet har utifrån Boalers definition även studerats i andra sammanhang, med både yngre elever, vuxna studenter och nyblivna lärare. I en studie av Gutiérrez med flera (2018) har relationell likvärdighet studerats när sju- till nioåringar arbetar parvis med att lösa matematiska problem. Scott (2019) har studerat relationell likvärdighet när nyblivna grundskollärare arbetar för att utforma en likvärdig matematikundervisning och Ruef and Shepard (2022) har studerat studenters erfarenheter av relationell likvärdighet i samband med en onlinekurs. Sammantaget visar de olika studierna att relationell likvärdighet kan vara ett mål att sträva mot för att etablera och upprätthålla en kultur av likvärdigt lärande där elever blir sedda, hörda och uppskattade i sina ansträngningar att lära sig.

Forskningen ovan har använts som utgångspunkt för studiens två dimensioner av likvärdighet, alla elevers tillgång till det matematiska innehållet och alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Dessa två dimensioner har tidigare studerats var för sig men de har inte tidigare studerats tillsammans och inte i relation till en förskoleklasskontext.

Tidigare forskning av vikt för design av studiens matematikundervisning

För att designa matematikundervisningen i den här studien utgjorde forskning om vad som kan främja alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll samt alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet utgångspunkt. En stor del av forskningen är inte genomförd i svensk förskoleklasskontext, varför resultaten av denna forskning behövde prövas i en svensk förskoleklasskontext.

I tidigare studier har öppna matematikuppgifter använts framgångsrikt i klassrum med elever med olika förkunskaper i matematik (Boaler, 2008; Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994). Öppna matematikuppgifter kan lösas med flera olika representationer och strategier och ibland kan det även finnas mer än ett möjligt svar (Sullivan m.fl., 2000). Det finns studier som visar att öppna matematikuppgifter främjar samarbete mellan elever, vilket i sin tur kan bidra till relationell likvärdighet och till att de kan utveckla en bättre förståelse för matematikinnehåll (Boaler, 1998). Men, även om elever arbetar med öppna matematikuppgifter finns ingen garanti att uppgifterna bidrar till ökade kunskaper hos alla elever. Om en elev inte är aktiv under problemlösningsarbetet, hjälper det inte att uppgiften är både välorganiserad och genomtänkt (Hagland m.fl., 2005). Om arbetet med öppna matematikuppgifter ska leda till matematikkunskaper hos alla elever behöver hänsyn tas till förkunskaper hos både klassen som helhet och enskilda individer, där en uppgift som är en problemuppgift för en elev kan vara en rutinuppgift för en annan elev (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Vidare visar tidigare svensk forskning att elever i förskoleklass, om de får möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar, utvecklar en djup kunskap om matematikinnehåll (Palmér & van Bommel, 2020, 2023).

Vid arbete med öppna problemuppgifter är klassrumsdiskussioner med fokus på matematikinnehållet centrala. Sådana klassrumsdiskussioner har dock visats vara svåra att iscensätta (Stein m.fl., 2008). Enligt Smith och Stein (2014) är det en utmaning att hitta en bra balans där lärare stödjer elevernas ansvar för att lära sig matematik, utan att undergräva elevers stolthet över de egna lösningarna. Även andra studier visar att elever lär när de blir uppmuntrade till att ta ansvar för sina egna matematiska idéer, samt resonera om och förstå olika matematiska idéer (Boaler, 2008; Engle & Conant, 2002). Å ena sidan finns det en risk att läraren blir för auktoritär och börjar visa hur eleverna kan lösa uppgifterna där eleverna blir passiva mottagare. Å andra sidan finns en risk att klassrumsdiskussionen blir en beskrivning, där en elev i taget presenterar sin lösning men lösningarna diskuteras eller jämförs inte, och därmed synliggörs inte matematiskt innehåll eller olika strategiers för- och nackdelar. Smith och Stein (2014, s. 22) har utvecklat en modell med fem praktiker för lärare för att främja alla elevers förståelse av det matematiska innehållet under klassrumsdiskussioner: ”förutse, överblicka, välja ut, ordna och koppla ihop”. Elevlösningar används då för att främja alla elevers förståelse av det matematiska innehållet genom att läraren inför problemlösningen *förutser* sannolika elevsvar, under problemlösningen *överblickar* läraren elevernas olika lösningar och väljer utifrån uppgiftens matematikinnehåll ut några elevlösningar som ska presenteras i helklass. Läraren planerar därefter i vilken *ordning* lösningarna bör presenteras under klassrumsdiskussionen för att på bästa sätt synliggöra matematiska idéer, strategier och representationer och under diskussionen hjälper läraren eleverna att *koppla ihop* de olika elevlösningarna till varandra och olika matematiska idéer, strategier och representationer.

Ytterligare ett sätt att främja matematiska resonemang i klassrumsdiskussioner är *talk moves* (Cazden & Beck, 2003; Chapin m.fl., 2009; Kazemi & Hintz, 2014; Michaels & O’Connor, 2015). Talk moves är ett antal fördefinierade frågor som lärare kan ställa för att starta och främja elevers resonemang under klassrumsdiskussioner (O’Connor & Michaels, 2017). I tidigare studier har talk moves använts framgångsrikt för att hjälpa lärare att bygga framgångsrika klassrumsnormer för klassrumsdiskussioner och för att möjliggöra en förändring från traditionell lärarledd kommunikation till elevorienterade resonemang (Cazden & Beck, 2003; Michaels & O’Connor, 2015). Talk moves har dock inte tidigare använts med yngre elever i en skolkontext motsvarande svensk förskoleklass varför de då behöver anpassas (Walla, 2023). Implementering av talk moves kan förstås som en strävan mot likvärdig matematikundervisning (O’Connor & Michaels, 2017).

Teoretiska utgångspunkter

För att analysera matematikundervisningen i designstudien har Wengers (1998) teori om praktikgemenskaper använts. En systematisk översikt över användandet av denna teori i forskning visar att den används i olika syften och därmed på olika sätt där olika delar och begrepp från teorin blir av relevans (Palmér & Roos, 2017). En olikhet i studier som använder Wengers teori är att vissa studier har praktikgemenskaper som förgrund medan andra har individers identitet som förgrund. I denna studie utgör en praktikgemenskap i form av matematikundervisningen i en förskoleklass förgrunden. En annan olikhet är att en praktikgemenskap, även om den alltid är en teoretisk konstruktion (Wenger, 1998), behandlas som ett objekt som studeras utifrån teorin, eller som ett objekt som skapas utifrån teorin (Palmér & Roos, 2017). I denna studie behandlas matematikundervisningen i förskoleklass som ett objekt som studeras utifrån teorin. De begrepp från Wengers teori som blir aktuella med denna utgångspunkt är *ömsesidigt engagemang*, *delad repertoar* och *gemensamt intresse*, vilka enligt Wenger är vad som definierar en praktikgemenskap.

En praktikgemenskap är inte homogen utan består av individer med olika roller, erfarenheter och ansvar (Wenger, 1998). I praktikgemenskapen matematikundervisning i förskoleklassen har lärare och elever olika roller, erfarenheter och ansvar och därmed även olika förhandlingsstyrka. Ömsesidigt engagemang avser relationen mellan deltagarna i praktikgemenskapen, hur lärare och elever deltar i och förhandlar innebörden av olika aktiviteter de är mer eller mindre engagerade i och de relationer som skapas mellan deltagarna. Den delade repertoaren kan antingen produceras inom en praktikgemenskap eller importeras från andra praktikgemenskaper och består av de gemensamma resurser som har utvecklats eller antagits i praktikgemenskapen, till exempel artefakter, gester, handlingar och rutiner. Den delade repertoaren är under ständig förhandling, där vissa delar är mer påverkbara (till exempel arbetsformer) än andra (till exempel matematikinnehållet). Den delade repertoaren skiljer sig därmed åt mellan olika matematikklassrum, till exempel avseende artefakter och rutiner. I praktikgemenskapen matematikundervisning i förskoleklassen är en stor del av den delade repertoaren importerad, till exempel det matematiska innehållet och representationer, medan andra delar som arbetsformer, samarbeten och uppgifters utformning förhandlas och formas inom praktikgemenskapen. Det gemensamma intresset innebär det ömsesidiga ansvar som deltagarna i en praktikgemenskap känner i förhållande till praktikgemenskapen. Det gemensamma intresset är inte gemensamt i den meningen att alla deltagare i praktikgemenskapen tycker och agerar lika om allt utan det gemensamma intresset förhandlas ständigt gällande vad som är viktigt och vad som ska göras, och vad som inte är viktigt och vad som inte behöver göras. I praktikgemenskapen matematikundervisning i förskoleklassen handlar det gemensamma intresset exempelvis om vad elever lägger vikt vid i arbetet med olika aktiviteter och vad lärare uppmärksammar och bekräftar i elevers arbete.

Att studera utveckling av matematikundervisning i förskoleklass utifrån Wengers teori innebär att studera hur förändringar i ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar kan främja alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) samt alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008). Wengers teori och förändringar i ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar kan kopplas till Schoenfelds (2014) frågor i arbetet inför, under och efter klassrumsundervisning som ska främja elevers likvärdiga tillgång till matematiskt innehåll. Dessa frågor handlar om vilka möjligheter som finns för varje elev att delta i klassens matematiska arbete och hur det går att skapa möjligheter för varje elev att delta i klassens matematiska arbete. Liknande kan utvecklingen av elevernas deltagande i en praktikgemenskap, i den här studien, jämföras med Boalers (2008) arbete med att utveckla elevers sätt att agera utifrån en helklassundervisning där eleverna har olika matematikkunskaper.

Wengers teori har använts på liknande sätt i andra studier för att studera matematikundervisning i klassrum. I en intervjustudie av Ewing (2006) användes teorin för att studera elevers beskrivningar av sina erfarenheter av att lära sig matematik i klassrummet med ett specifikt fokus på hur läroboken användes. I studien analyseras elevers deltagande med utgångspunkt i hur de talade om sig själva i relation till praktikgemenskapen i klassrummet. I en designstudie av NicMhuirí (2014), användes teorin för att studera en diskursiv gemenskap där eleverna genererade och utvärderade matematiska idéer. I båda dessa studier var elevers matematiska identiteter i relation till klassrummet som en praktikgemenskap i förgrund medan en designstudie av Gardesten och Palmér (2023), likt denna studie, har praktikgemenskapen som sådan i förgrund. I studien av Gardesten och Palmér (2023) användes teorin för att studera rumslig, social och matematisk inkludering i matematikklassrum utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar.

Metod

Studien är en designstudie vilket inte är en fast forskningsmetod utan snarare en genre av studier där lösningar på komplexa ”pedagogiska problem” utvecklas i iterativa designcykler i samarbete mellan forskare och lärare (McKenney & Reeves, 2019). Det finns således stora variationer i designstudier, både i inriktning och storlek, men gemensamt är avsikten att utveckla både undervisning och teorier som kan vägleda, informera och förbättra såväl praktik som forskning. Gemensamt är också en kvalitativ iterativ design där designprinciper för undervisning utvecklas och förfinas genom upprepade cykler av planering, genomförande och utvärdering (Anderson & Shattuck, 2012). Designstudier kan användas för att utveckla forskningsbaserade lösningar på komplexa problem i verksamheten, eller för att utveckla eller validera teorier om lärandeprocesser och lärmiljöer (Plomp, 2013). Det komplexa pedagogiska problem som fokuserades i denna studie var som nämnts vilka designprinciper som främjar en matematikundervisning i förskoleklass där alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Även om designstudier genererar både teori och praktiska produkter går det enligt Prediger med flera (2015) att skilja mellan olika designstudier beroende på vad forskning förväntas ge och vilken roll dessa produkter spelar. I den här designstudien var den förväntade produkten designprinciper för hur alla elever kan ges tillgång till matematikinnehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet i förskoleklassens matematikundervisning.

Sammanlagt deltog en förskoleklass med 18 elever och en förskoleklasslärare i studien tillsammans med två forskare. Studien genomfördes under ett läsår. Urvalet baserades på lärarens intresse för att delta. Läraren har en treårig förskollärarutbildning och över 30 års yrkeserfarenhet. Eleverna informerades muntligt om interventionen och deras vårdnadshavare fick skriftlig information om studien och godkände sina barns deltagande (Vetenskapsrådet, 2017). Då studien genomförts med yngre elever har deras välbefinnande beaktats under hela processen att generera data (Fraser, 2004; Greig m.fl., 2013). Exempelvis har det varit viktigt att lyssna på eleverna och vara lyhörd inför tecken på att en elev inte var bekväm i en undervisningssituation. Om sådana tillfällen hade uppstått hade inte eleverna deltagit även om samtyckesblanketten från vårdnadshavare var underskriven. Vidare har samtliga elevsvar avidentifierats och i resultatet används fingerade elevnamn.

Totalt genomfördes fem cykler av planering, genomförande och utvärdering där olika designprinciper prövades och antingen förfinades i nästa cykel eller förkastades för att ersättas av andra. Före den första cykeln genomförde läraren den obligatoriska kartläggningen med alla elever i klassen. Denna kartläggning utgjorde utgångspunkt för designstudien, dels då elevernas resultat beaktades i planeringen av de olika cyklerna, dels då det matematiska innehållet i studiens fem cykler byggde vidare på det matematiska innehållet i kartläggningen. Det betyder att den undervisning som utformades fokuserade på olika matematikinnehåll (till exempel mönster, taluppfattning, mätandets princip och rumsuppfattning) men alltid med tillgång till matematikinnehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

I designstudier är det viktigt att utgå ifrån den undervisning som bedrivs vid interventionens start varför den första designcykeln inte introducerade något nytt förutom matematikinnehållet mönster som är ett av de innehåll som ingår i kartläggningen vid skolstart. Matematikundervisningen i förskoleklassen följde under interventionens första cykel sin tidigare rutin där en uppgift inledningsvis introducerades i helgrupp med eleverna sittandes i en ring på golvet. Därefter arbetade eleverna med uppgiften i par, sittandes vid små bord eller på golvet i ett stort gemensamt rum och ett mindre rum i anslutning till det stora rummet. Slutligen återsamlades hela gruppen i en ring på golvet, för att följa upp arbetet med uppgiften. I den första designcykeln genomfördes tre lektioner med fokus på mönsterenhet.

Planeringen genomfördes i samarbete mellan läraren och en av forskarna, där forskaren hade huvudansvar att, utifrån tidigare forskning, identifiera och föreslå möjliga designprinciper. I genomförandet av de olika lektionerna var läraren huvudansvarig för implementeringen i klassrummet. I uppföljningen gjorde forskarna en inledande analys som sedan diskuterades tillsammans med läraren för att inkludera lärarens erfarenheter från lektionens genomförande i analysen. Utifrån dessa diskussioner påbörjades planeringen av nästa designcykel genom att forskaren, utifrån tidigare forskning, identifierade och föreslog antingen förfining av eller nya möjliga designprinciper.

Analysen i denna artikel bygger på 743 minuter videodokumentation från de fem designcyklerna samt fältanteckningar.[1] Utifrån Wengers teori (1998) betraktas matematikundervisningen som en teoretisk konstruktionen som byggs upp av ömsesidiga engagemang, delad repertoar och gemensamt intresse. I linje med designforskning var analysen kvalitativ (Maxwell, 2004). Analysen inleddes med en analys av det ömsesidiga engagemanget, den delade repertoaren samt det gemensamma intresset vid studiens start. Vid studiens start identifierades tre utvecklingsområden: instruktion, elevlösningar och talutrymme. För att möta dessa utvecklingsområden introducerades designprinciper som provades och förfinades i fyra designcykler. I varje designcykel analyserades praktikgemenskapen i två steg. Först analyserades hur designprinciperna påverkade praktikgemenskapens ömsesidiga engagemang, delade repertoar och gemensamma intresse. Därefter analyserades hur förändringar i ömsesidigt engagemang, delad repertoar och gemensamt intresse möjliggjorde tillgång till ett matematikinnehåll och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

Resultat

Som ovan har beskrivits kommer begreppen ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar från Wengers (1989) teori användas för att beskriva och analysera matematikundervisningen i förskoleklassen. Den analys som har beskrivits ovan har genomförts på samtlig empiri i studien där de empiriska exempel som ges nedan enbart utgör en liten del.

Matematikundervisningen innan interventionen

I den första designcykeln genomfördes totalt tre lektioner. Utifrån en analys av ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar under dessa tre lektioner identifierades tre delar att fokusera i designstudiens följande cykler: instruktion, elevlösning, talutrymme. Nedan beskrivs dessa tre delar vid studiens start i relation till elevers tillgång till ett matematiskt innehåll och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematik. Därefter beskrivs de designprinciper som implementerades och förfinades i studiens följande fyra cykler och som därmed utgör studiens resultat.

1 Data har hanterats enligt dataskyddsförordningen. Videomaterial har lagrats på lösenordskyddade servrar och fältanteckningar i låsbara skåp vid Högskolan Dalarna.

Instruktion

En rutin i den delade repertoaren var att varje skoldag började med att eleverna samlades i en ring på golvet. När samlingsstunden var genomförd började matematiklektionen direkt. Eftersom eleverna satt kvar i ringen, instruerades de muntligt i helklass om vilka uppgifter eller aktiviteter de skulle arbeta med under matematiklektionen. Eleverna förväntades sitta stilla och vara tysta medan läraren, eller den elev som räckt upp handen, var den som pratade. Det gemensamma intresset avseende hur länge elever orkar sitta stilla varierar, några elever sitter stilla och är tysta under både samlingsstund och matematikinstruktion medan andra börjar röra sig och prata rakt ut redan efter några minuter (excerpt 1).

Excerpt 1 (designcykel 1)

Lärare	Mönster, är det någon som kan berätta vad ett mönster är för något? [Flera elever räcker upp handen]
Lärare	Alex.
Alex	Det är olika färger.
Lärare	Det kan vara olika färger. [Flera elever räcker upp handen]
Lärare	Nelly.
Nelly	Att det är typ så här. Gult, blått, gult, blått, gult, blått. [Läraren sträcker sig efter några skålar med plockmaterial i olika färger]
Alex	Du kan ta dom där hinkarna och göra ett mönster med. [Talar rakt ut, utan att ha fått ordet]
Lärare	Jag tar gult och grönt. Hur var det du sa? [Ser på Nelly] Ja.
Nelly	Gult, grönt, gult, grönt.
Alex	Rött. [Skrattar och ser på de andra eleverna]
Lärare	Jag hinner inte med, jag hinner inte med. Och … [Läraren lägger plockmaterialet: gult, grönt, gult, grönt]

Exemplet ovan (excerpt 1) visar spänningar i det ömsesidiga engagemanget och gemensamma intresset, hur det finns elever som trots att de suttit länge orkar lyssna uppmärksamt till lärarens instruktion och talar efter tur, medan andra elever som inte längre orkar lyssna utmanar den delade repertoaren genom att till exempel tala rakt ut. Under samlingsstunden påverkas det ömsesidiga engagemanget och den delade repertoaren av detta då det gemensamma intresset ofta flyttas från innehållet i lärarens instruktion till innehållet i lärarens korrigering av elever. Förhandlingen fokuserar på handlingar snarare än innehåll i kommande uppgifter vilket ger konsekvenser för nästa del av lektionen. När eleverna började arbeta med den uppgift som hade introducerats, var det flera elever som inte visste vad de skulle göra. De blev sittandes, enskilt eller parvis, och väntade på att läraren skulle komma och förklara uppgiften för dem. Under denna del av lektionen, som egentligen syftar till att eleverna på olika sätt ska arbeta med matematikinnehåll med hjälp av artefakter som erbjuds som verktyg för att lösa uppgiften, satt flera elever och väntande på läraren. Dessa elevers gemensamma intresse utvecklas till att i väntan leka med de artefakter som finns tillgängliga snarare än att använda dessa som verktyg för att förstå ett matematiskt innehåll.

Utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar identifieras utifrån ovanstående utformningen av instruktionerna i början av matematiklektionerna som begränsande för elevernas tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30

Elevlösning

En rutin i den delade repertoaren är att eleverna tenderar att se sig som klara med en uppgift när de har en lösning, och att den lösningen härmar det exempel som läraren visat i sin instruktion. Till exempel när en aktivitet hade syftet att eleverna skulle ges möjlighet att utveckla förståelse för mönsterenhet konstruerade alla elever en lösning med identisk mönsterenheten som det exempel läraren visat vid instruktionen (excerpt 2).

Excerpt 2 (designcykel 1)

Anders	Gul, grön, gul, grön.
Lärare	Ja, fast det blir ju lite också lite samma sak. Kan man bygga på ännu något annat vis med de här färgerna?
Alex	Blå, orange.
Lärare	Men om man bara har två färger.
Tove	Ja, man kan ha tre färger.
Alex	Rosa, lila.
Lärare	Men om vi bara har två färger.
Tove	Då kan man göra olika mönster.
Lärare	Men kan man göra något annat mönster, med samma färger?
Flera	Ja.
Elev	Nej.
Alex	Jo, man kan göra en katt av det.
Lärare	Ja, nu menar jag inte att, vad man bygger utan … är det någon som kommer på något sätt?
Anders	Ananas, bil.
Lärare	Ja.

Exemplet ovan (excerpt 2) visar hur eleverna uppmuntrades till att hitta flera lösningar och lösa uppgiften på olika sätt, men i stället för att variera mönsterenheten varierade eleverna färger eller föremål. Eleverna nöjde sig när de imiterat läraren och hittat en lösning på uppgiften, i stället för att arbeta vidare för att hitta flera olika lösningar på samma uppgift. Det gemensamma intresset handlar mer om görande än det matematiska innehållet och eleverna vill göra lika som läraren och därmed också lika som alla andra elever i klassen. Under pararbetet pratade inte eleverna om mönsterenheter, utan om vilka färger och föremål som skulle användas. När pararbetet följdes upp i den avslutande klassrumsdiskussionen beskrev eleverna sina lösningar utifrån färger och föremål men inte kopplat till matematikinnehållet.

Utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar identifieras elevlösningar som begränsande för elevernas tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

Talutrymme

En rutin i den delade repertoaren är att alla elever i slutet av lektionen återsamlas i ringen för att visa sina lösningar. En elev i taget får berätta hur han eller hon har löst uppgiften, vilket innebär att talutrymmet baseras på elevernas medlemskap i praktikgemenskapen snarare än på deras lösningar. Det viktiga i den delade repertoaren är inte det matematiska innehållet i lösningarna, utan alla elevers möjlighet att göra sin röst hörd. Eftersom eleverna, som nämnts ovan, oftast

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30

imiterade lärarens lösning, återupprepades samma lösning om och om igen. När en elev vid något tillfälle presenterar en ny lösning, bidrar inte den delade repertoaren till att den lösningen får mer eller annorlunda uppmärksamhet än de identiska lösningarna (excerpt 3).

Excerpt 3 (designcykel 1)

Lärare:	Hur var din regel när du gjorde, Tova? Hur har du byggt ditt mönster? Hur tänkte du? Berätta.
Tova:	Alltså, vi gjorde så här. Blå röd blå röd blå röd blå röd.
Lärare	Ja, titta, då var det blå och röd. Det var ju den här regeln. Men sen upprepade ni ju lika många.
Nelly	Vi gjorde samma.
Lärare	Vill du berätta något Johan? … Kan du berätta, hur fungerade ditt mönster?
Johan	Mitt mönster. Samma som Tova. Blå röd blå röd blå röd.
Lärare	Ja, ni byggde samma. Anders och Simon, hur var eran mönsterregel i ert mönster? Hur byggde ni på för vis?
Anders	Han har inte samma som mig.
Lärare	Nej, men berätta.
Anders	Grön gul grön gul grön gul
Lärare	Ja, och vad var mönsterregeln i ditt mönster?
Anders	Grön och gul.

Exemplet ovan (excerpt 3) visar hur eleverna fick lika stort talutrymme men att fokus inte låg på det matematiska innehållet. I denna sekvens ställde läraren olika frågor till eleverna. Oavsett lösning får eleverna samma positiva feedback från läraren och eleverna behöver inte explicit beskriva det matematiska innehållet i sin lösning, eller vilken strategi de använt, varför det matematiska innehållet, som var syftet med lektionen, inte blir del av den delade repertoaren eller det gemensamma intresset. Detta påverkar i sin tur det ömsesidiga engagemanget då fokus hamnar på person snarare än matematiskt innehåll.

Utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar identifieras utifrån ovanstående organisering av klassrumsdiskussionen på slutet av lektionerna som begränsande för elevernas tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

Intervention

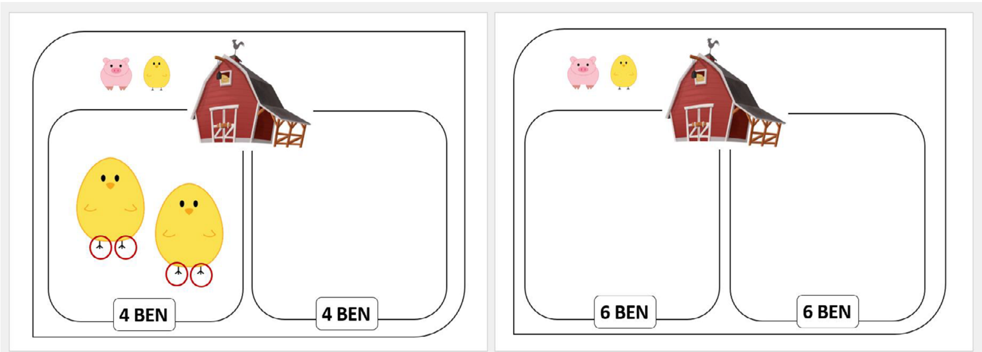
Som har beskrivits, genomfördes interventionen under ett läsår genom fem designcykler som var och en innehöll ett flertal lektioner. I interventionen introducerades designprinciper som ibland förkastades då de inte ansågs utveckla instruktion, elevlösningar eller talutrymmet i önskad riktning. Vid andra tillfällen behölls och förfinades designprinciperna ytterligare.

Designprincip 1 – Låg tröskel

Designprincipen låg tröskel introducerades för att lösa utmaningen med instruktionen som eleverna inte uppfattade. Designprincipen utgick ifrån forskning som visar att en och samma uppgift kan vara en problemlösningsuppgift för en elev, men en rutinuppgift för en annan elev (Mason & Johnston-Wilder, 2006) vilket innebär att elever behöver olika stöd för att komma i gång med en uppgift. Om elever inte kommer i gång med uppgifterna riskerar de även att gå miste om möjligheten att möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar, vilket av Palmér och van Bommel (2020, 2023) beskrivs som nödvändigt för att kunna utveckla en djupare kunskap om matematikinnehåll. Utifrån detta utformades uppgifter med en låg ingångströskel, uppgifter vars låga ingångströskel gjorde dem självinstruerande, så att alla elever skulle kunna börja jobba direkt med ett matematiskt innehåll som de förstod, även om de inte hade förstått lärarens instruktion. En problemuppgift som eleverna arbetade med var uppgiften: Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 12 ben? Utifrån denna problemuppgift formulerades uppgifter med låg tröskel. I figur 1 visas två exempel på öppna problemuppgifter som är utformade med låg tröskel: Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 4 ben? och Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 6 ben?

Figur 1

Exempel på öppna problemuppgifter med låg tröskel



Not: Eleverna arbetade i par för att hitta minst två olika lösningar till varje uppgift. Eleverna kunde börja med olika uppgifter. Några elever förstod uppgiften direkt och började därför med 12 ben, medan andra började med 4 eller 6 ben.

De elever som direkt visste vad de skulle göra kunde starta med 12 ben, medan andra kunde starta med 4 eller 6 ben (figur 1) för att förstå vad de förväntades göra i uppgiften. Uppgifterna med 4 och 6 ben (figur 1) fungerade därför som en förlängd instruktion, något som möjliggjorde att alla elever kunde komma i gång direkt. Under denna lektion arbetade eleverna parvis för att hitta minst två olika lösningar till varje uppgift. I den nya uppgiftskonstruktionen behövde inte alla elever göra alla uppgifter medan elever som önskade ytterligare utmaningar, fick frågor som: ”Hur många olika lösningar finns om det är 12 ben tillsammans?” och ”Jämför om ni har hittat lika många och samma lösningar som ett annat par?”. Det var dessutom möjligt att öka uppgifternas utmaning ytterligare, genom att öka antalet ben, eller lägga till fler djur med ett annat antal ben.

Utformningen av uppgifter med låg tröskel påverkade även lärarens instruktion genom att läraren visade och pratade mindre i början av lektionen. Tidigare hade läraren visat *hur* eleverna kunde lösa uppgifter, nu berättade läraren enbart *om* uppgiften. Efter den nu kortare muntliga instruktionen kunde eleverna arbeta med uppgifter och även om eleverna i samma klassrum arbetade med olika uppgifter arbetade de med samma matematiska innehåll. På så vis blev det nya sättet att konstruera uppgifter också ett sätt att möjliggöra för hela klassen att arbeta med samma matematikinnehåll utan att dela upp klassen i olika grupperingar. Den låga tröskeln möjliggjorde därmed för samtliga elever att delta i praktikgemenskapens delade repertoar men på olika sätt utifrån sina förutsättningar.

Designprincip 2 – Öppna matematikuppgifter

Designprincipen öppna matematikuppgifter introducerades för att förändra den delade repertoaren avseende att eleverna endast löste uppgifter på ett sätt där de imiterade lärarens exempel och matematikinnehållet riskerade att inte bli synliggjort. Designprincipen utgick ifrån forskning som visar att öppna matematikuppgifter som kan lösas med olika representationer och olika strategier, uppgifter där det ibland även kan finnas fler än en lösning, dels kan främja samarbete mellan elever (Boaler, 1998; Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994), dels möjliggöra för elever att möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar (Palmér & van Bommel, 2020, 2023). Ett exempel på en sådan uppgift är uppgiften i figur 1.

De öppna matematikuppgifterna förändrade både den delade repertoaren och det gemensamma intresset i praktikgemenskapen. När öppna matematikuppgifter infördes, började eleverna resonera och tillsammans prova sig fram till olika lösningar. Vad som räknades som en önskvärd lösning kunde inte längre vara en lösning som var identisk med lärarens lösning, eftersom det inte fanns en sådan lösning att imitera. Att det inte fanns en lösning att imitera var en konsekvens av den nu kortare instruktionen och uppgifter med låg tröskel, där läraren nu inte visade hur uppgifterna kunde lösas. Eleverna var sedan tidigare vana vid att rita sina lösningar men nu användes ritande på ett annorlunda sätt än tidigare. I stället för att fokusera på detaljer som inte är viktiga utifrån ett matematiskt perspektiv (till exempel vilket föremål som ska ritas), började eleverna förstå vilka detaljer som har betydelse för att visa olika matematiska lösningar. Det skedde en gradvis förändring i praktikgemenskapen, där den delade repertoaren och det gemensamma intresset innebar att hitta flera lösningar på uppgifter och eleverna blev mer aktiva i förhandlingarna kring det matematiska innehållet. Med ett tydligare fokus på det matematiska innehållet, blev det även möjligt att utmana eleverna till att ta sig an svårare uppgifter och på så vis utmanas i sitt lärande.

Designprincip 3 – Resonemangsfrämjande repliker

Designprincipen resonemangsfrämjande repliker introducerades för att förändra den delade repertoaren vid klassrumsdiskussioner, där talutrymmet tidigare fördelades utifrån att alla elever skulle få lika stort talutrymme snarare än utifrån matematikinnehållet. Designprincipen utgick ifrån forskning om hur klassrumsdiskussioner kan organiseras för att främja alla elevers förståelse av det matematiska innehållet (Smith & Stein, 2014), samt vilka frågor (talk moves) som kan ställas under dessa klassrumsdiskussioner för att främja elevernas resonemang (Chapin m.fl., 2009). Med stöd i hur klassrumsdiskussioner kan organiseras (Smith & Stein, 2014) och frågor lärare kan ställa för att främja elevers resonemang (Chapin m.fl., 2009), valde läraren inför klassrumsdiskussionerna ut några elevlösningar som skulle presenteras, och i vilken ordning dessa skulle presenteras för att på bästa sätt tillsammans synliggöra det matematiska innehållet för alla elever. Användandet av talk moves anpassades utifrån förskoleklassens kontext genom att en ny talk move (*be eleverna beskriva en lösning*) lades till, en annan talk move togs bort (*använda väntetid*) samt att en tredje talk move (*upprepa och visa vad en elev har sagt*) utökades till att omfatta multimodala element (Walla, 2023). Dessa anpassningar gjordes med utgångspunkt i att alla elever oavsett hur de hade löst uppgiften skulle ges möjlighet att förstå det matematiska innehåll som diskuterades. För att utveckla den delade repertoaren ombads eleverna beskriva en lösning, upprepa någon annans resonemang, tillämpa egna resonemang på någon annans resonemang, att upprepa vad en elev sagt samt att använda olika representationer för att visa en lösning. I de klassrumsdiskussioner som uppstod fick läraren möjlighet att vid behov upprepa och förstärka viktiga delar av det matematiska innehållet, något som i sin tur bidrog till att öka elevernas förståelse av det matematiska innehållet (excerpt 4).

Excerpt 4 (designcykel 2)

[Vid klassrumsdiskussionen på slutet av lektionen ritar läraren en av elevernas lösningar på smartboarden, en bild med tre kycklingar. Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 6 ben?]

Lärare	Kan du berätta hur du tänkte?
Tove	Ja, jag räknade typ så här: en, två, tre, fyra, fem, sex. [Tove pekar på lärarens illustration på smartboarden]
Lärare	Bra! Annika, kan du berätta hur Tove tänkte? Hur hade Tove tänkt?
Annika	hm …
Lärare	Stämde det här?
Annika	Ja.
Lärare	Var det sex ben?
Annika	Ja, för tre plus tre blir ju sex. Och så blir det ju.
Lärare	Tack!
Lärare	Är det någon som hade en annan idé?
Flera	Ja! [Flera elever räcker upp handen]
Lärare	Elin och Annika, ni hade en annan idé som inte såg ut så där… Hur såg eran idé ut?

[Elin och Annika går fram till läraren och får sin teckning av läraren]

Lärare	Får jag rita upp eran också?

I exemplet ovan (excerpt 4) upprepar, delar, repeterar, resonerar och lägger läraren till – vilket tillsammans bidrog till att öka elevernas möjlighet till förståelse av det matematiska innehållet eftersom matematikinnehållet blev fokus för klassrumsdiskussionen. Exemplet visar även hur läraren på förhand har valt ut att Elin och Annika ska presentera sin lösning efter Tove. Genom att införa resonemangsfrämjande repliker anpassade för förskoleklasskontexten, påverkades det ömsesidiga engagemanget i praktikgemenskapen där blev eleverna delaktiga i förhandlingen om den delade repertoaren. Lärarens frågor bidrog till att de började resonera kring det matematiska innehållet och bygga vidare på varandras lösningar. Den delade repertoaren vid matematikdiskussioner förändrades också genom att talutrymmet i högre grad fördelades utifrån matematikinnehållet i elevernas lösningar.

Summering

Vid studiens start identifierades tre utvecklingsområden för att alla elever skulle få tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008): instruktion, elevlösningar och talutrymme. Designprinciper implementerades, förfinades eller förkastades i fyra cykler för att slutligen resultera i en matematikundervisning med låg tröskel, öppna matematikuppgifter och resonemangsfrämjande repliker. Dessa tre designprinciper påverkade praktikgemenskapens delade repertoar, gemensamma intresse och därmed även det ömsesidiga engagemanget i önskad riktning. Designprinciperna har inte studerats isolerat utan behöver i studien ses som en helhet. Det fungerar exempelvis inte att fråga eleverna om de håller med om en lösning eller inte (designprincip 3) – om alla elever har gjort identiska lösningar (designprincip 2) eller om några elever inte förstår uppgiften som sådan (designprincip 1). För att använda resonemangsfrämjande repliker (designprincip 3) behöver alla elever få tillgång till samma matematiska innehåll men utifrån sina förutsättningar (designprincip 1 och 2), vilket här förstås i relation till hur Schoenfeld (2014, 2023) beskriver alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll. För att det ska bli relevant för elever att resonera om olika lösningar underlättar det om uppgifterna som används i undervisningen kan lösas på olika sätt (designprincip 2). Genom klassrumsdiskussioner där både innehåll och struktur förändrades (designprincip 3) gavs eleverna möjlighet att lära av varandras lösningar och att resonera om ett matematiskt innehåll, vilket i sin tur påverkade elevernas möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2006, 2008). Sammantaget påverkade designprinciperna som helhet praktikgemenskapens delade repertoar och därmed det gemensamma intresset gällande vad som var viktigt och elevernas och lärarens ansvar under lektionerna. Detta påverkades av och påverkade i sin tur det ömsesidiga engagemanget gällande relationen mellan lärare och elever avseende förhandling av såväl innehåll som arbetsformer. Tillsammans bidrog designprinciperna till en matematikundervisning som främjade alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008).

Diskussion

Utgångspunkten för denna studie var att utforma en matematikundervisning där alla elever, oavsett resultat på det obligatoriska kartläggningsmaterialet, fick tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Denna utgångspunkt utgick ifrån forskning om hur en likvärdig matematikundervisning kan utformas i heterogena elevgrupper (Schoenfeld, 2014; Boaler, 2008). De designprinciper som utforskades i studien formulerades med utgångspunkt i tidigare forskning för att möta de tre utvecklingsområden som hade synliggjorts i studiens första cykel. Designprinciperna behövde därmed studeras i relation till svensk förskoleklasskontext samt i relation till den definition av likvärdig matematikundervisning som utgjorde utgångspunkt för studien. Studiens resultat bidrar därmed med kunskap om hur tidigare studier, gällande öppna matematikuppgifter, låg tröskel och resonemangsfrämjande repliker (Chapin m.fl., 2009; Stein m.fl., 2008; Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994), framgångsrikt kan anpassas till svensk förskoleklasskontext.

En viktig fråga är om resultatet från designstudien kan generaliseras till andra förskoleklasser. Den kartläggning Björklund med flera 2022 har genomfört, av 95 förskoleklassers matematikundervisning, visar att många förskoleklasser har liknande utmaningar som de som utgjorde utgångspunkt i denna studie. Utifrån det kan designprincipernas generella karaktär göra dem anpassningsbara att utveckla matematikundervisningen även i andra förskoleklasser. Vidare har, i likhet med studierna av Palmér och van Bommel (2020, 2023), olika matematikinnehåll fokuserats på i studiens cykler vilket visar att designprinciperna kan främja tillgång till olika matematikinnehåll. Således visar denna studie likt Palmér och van Bommel (2020, 2023) att framgångsrik systematiskt utprövad matematikundervisning kan appliceras på olika matematikinnehåll.

Designprincipen låg tröskel introducerades för att bidra till att alla elever skulle komma igång med uppgifterna, även om de inte uppfattat lärarens instruktion. Eftersom utgångspunkten för denna studie var att utveckla en matematikundervisning som möter förskoleklasselevers olikheter, var utgångspunkten att det alltid finns elever i klassrummet som vid olika tillfällen inte har uppfattat lärarens instruktion. Orsaken till att olika elever inte hade uppfattat lärarens instruktion kunde vara olika, och inget som studien fokuserade på, utan målet var att möta alla elevers olikheter. Genom att konstruera uppgifter med låg tröskel kunde även elever som inte hade uppfattat lärarens instruktion komma i gång med uppgifterna och därmed få tillgång till matematikinnehållet. Studier av Palmér och van Bommel (2020, 2023) visar att elever i förskoleklass inte behöver någon specifik förkunskap för att introduceras till problemlösning, vilket denna studie styrker. Således kräver inte den låga tröskeln att eleverna har fått en viss typ av uppgifter eller instruktion tidigare.

Designprincipen öppna matematikuppgifter introducerades för att skapa möjligheter för eleverna att lösa uppgifter på olika sätt, utan att imitera lärarens lösning. Öppna matematikuppgifter har tidigare använts framgångsrikt i klassrum med elever med olika förkunskaper, bland annat på grund av att denna typ av matematikuppgifter främjar samarbete mellan elever (Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994). Således blev öppna matematikuppgifter en viktig förutsättning för att skapa klassrumsdiskussioner där eleverna kunde resonera kring olika lösningar på samma uppgift. En risk med öppna matematikuppgifter är att en och samma uppgift kan fungera som en problemuppgift för några elever och en rutinuppgift för andra (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Detta undveks genom att erbjuda eleverna öppna matematikuppgifter som hade låg tröskel men samtidigt inkluderade utmaningar. Dessa anpassningar bidrog även till att eleverna var mer aktiva under arbetet med uppgifterna, något som enligt Hagland med flera (2005) är viktigt för att uppgifterna ska bidra till ökade kunskaper hos alla elever. I denna studie bidrog de öppna matematikuppgifterna till att eleverna började resonera kring olika lösningar, vilket är i linje med studier av Palmér och van Bommel (2020, 2023) där öppna uppgifter möjliggjorde för eleverna att möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar.

Designprincipen resonemangsfrämjade repliker introducerades för att påverka innehåll i och organisering av klassrumsdiskussioner. Gällande resonemangsfrämjande repliker visar tidigare forskning att klassrumsnormer påverkar och påverkas av klassrumsdiskussioner (Cazden & Beck, 2003; Michaels & O'Connor, 2015). Eftersom klassrumsnormer ser olika ut i olika klassrum och i olika ämnen kan införandet av resonemangsfrämjande repliker vara en olika lång process i olika klassrum. I denna studie introducerades de resonemangsfrämjande replikerna i designcykel 2 men det var först i designcykel 4 och 5 de hade fått den utformning som visade framgångsrika resultat. I studierna av Palmér och van Bommel (2020, 2023) lyfts vikten av lärarens roll i de avslutande klassrumsdiskussionerna efter problemlösning och utifrån deras forskning kan implementeringen av resonemangsfrämjande repliker i denna studie, som bygger på forskning av Smith och Stein (2014) och Chapin med flera (2009), ses som ett komplement för hur läraren kan lyckas med sådana klassrumsdiskussioner.

Sammantaget visar studiens resultat en utveckling av en matematikundervisning som möter elevers olikheter i förskoleklass, oavsett vilket resultat som eleverna har fått i den obligatoriska kartläggningen vid skolstart. När de tre designprinciperna låg tröskel, öppna matematikuppgifter och resonemangsfrämjande repliker introducerades främjades elevernas tillgång till olika matematikinnehåll samt deras möjligheter att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. När uppgifter med låg tröskel infördes (designprincip 1), möjliggjordes tillgång till ett matematiskt innehåll kopplat till lektionens syfte och därmed möjliggjordes för elever att resonera om det matematiska innehållet. När eleverna fick arbeta med öppna matematikuppgifter (designprincip 2) handlade matematikundervisningen inte längre om att imitera lärarens lösning utan att prova sig fram till olika lösningar. När resonemangsfrämjande repliker (designprincip 3) introducerades fördelades talutrymmet i klassrumsdiskussionen baserat på matematikinnehållet i lösningar vilket påverkade elevernas tillgång till det matematiska innehållet eftersom det matematiska innehållet blev fokus för klassrumsdiskussionerna. Genom de tre designprinciperna gavs eleverna möjlighet att resonera om det matematiska innehållet på sin nivå – vilket är nödvändigt för att eleverna ska kunna utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2006, 2008). I denna studie har de tre designprinciperna utvecklats och studerats parallellt i de olika designcyklerna, vilket innebär att det är svårt att se var en designprincip slutar och nästa börjar, varför det utifrån denna studie inte är möjligt att uttala sig om i vilken utsträckning designprinciperna enskilt kan påverka matematikundervisning.

Avslutningsvis visar studien att likvärdighet i klassrummet kan förstås utifrån olika perspektiv, vilket i sin tur påverkar de didaktiska val som görs i strävan mot en likvärdig matematikundervisning. Vid studiens inledning fördelades elevernas talutrymme vid klassrumsdiskussionerna utifrån en aspekt av likvärdighet att alla elever ska få samma talutrymme. Då denna studie fokuserade på likvärdighet utifrån andra aspekter blev de didaktiska valen i klassrumsdiskussionerna andra. I stället för att ge alla elever lika stort talutrymme, behövde talutrymmet fördelas baserat på det matematiska innehållet i elevers lösningar. Det som vid interventionens början var ett argument för att skapa en likvärdig undervisning i form av talutrymme, främjade inte likvärdighet i betydelsen alla elevers likvärdiga tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2023) och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008). Detta visar dels att likvärdighet är ett mångtydigt begrep som kan förstås utifrån olika perspektiv, men det visar också, i linje med Llewellyn och Mendick (2011), att vad det innebär att sträva efter en likvärdig matematikundervisning i klassrummet kan förändras när förståelsen av begreppet likvärdighet förändras.

Referenser

Anderson, T. & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research? *Educational Researcher, 41*(1), 16–25. https://doi.org/10.3102/0013189x11428813

Arnell, S. (2021). *Elevers möten med matematik: En studie om elevers möten med matematik i förskoleklass och årskurs 1.* [Doktorsavhandling, Linköpings Universitet]. https://doi.org/10.3384/diss.diva-178029

Aunio, P., Hautamäki, J., Heiskari, P. & Van Luit, J. E. H. (2006). The early numeracy test in Finnish: Children's norms. *Scandinavian Journal of Psychology*, *47*(5), 369–378. https://doi.org/ https://doi.org/10.1111/j.1467-9450.2006.00538.x

Bagger, A. (2016). *Quality and equity in the era of national testing: The case of Sweden. I World yearbook of education 2017* (s. 68–88). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315517377

Bagger, A., Vennberg, H. & Björklund Boistrup, L. (2019). The politics of early assessment in mathematics education. I U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1831–1838). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Björklund, C., Elofsson, J., Ekdahl, A.-L., Kullberg, A., Alkhede, M. & Runesson Kempe, U. (2022). *Kartläggning av matematikundervisning om tal i förskoleklass*. Göteborgs Universitet. https://www.gu.se/sites/default/files/2022-05/SATSA_kartläggning.pdf

Björklund, C. & Elofsson, J. (2024). The appearance of playfulness in Swedish preschool class mathematics teaching. I H. Palmér, C. Björklund, E. Reikerås & J. Elofsson (Red.), *Teaching mathematics as to be meaningful – Foregrounding play and children's perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37663-4_18

Blossing, U. & Söderström, Å. (2013). A school for every child in Sweden. I U. Blossing, G. Imsen & L. Moos (Red.), *The Nordic education model* (s. 17–34). Springer.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41–62. https://doi.org/10.2307/749717

Boaler, J. (2006). How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory Into Practice*, *45*(1), 40–46. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4501_6

Boaler, J. (2008). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach. *British Educational Research Journal*, *34*(2), 167–194. https://doi.org/10.1080/01411920701532145

Boaler, J., Altendorff, L. & Kent, G. (2011). Mathematics and science inequalities in the United Kingdom: When elitism, sexism and culture collide. *Oxford Review of Education*, *37*(4), 457–484. https://doi.org/10.1080/03054985.2011.595551

Boaler, J. & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of railside school. *Teachers College Record*, *110*(3), 608–645. https://doi.org/10.1177/016146810811000302

Boaler, J., Wiliam, D. & Brown, M. (2000). Students' experiences of ability grouping: Disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal*, *26*(5), 631–648. http://www.jstor.org.www.bibproxy.du.se/stable/1501995

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, *33*(8), 3–15. https://doi.org/10.3102/0013189x033008003

Buchholtz, N., Stuart, A. & Frønes, T. S. (2020). Equity, equality and diversity - Putting educational justice in the Nordic model to a test. I T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radišić & N. Buchholtz (Red.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9

Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. (2018). Assessment in the service of learning: Challenges and opportunities or plus ça change, plus c'est la même chose. *ZDM*, *50*(4), 571–585. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0937-1

Cazden, C. B. & Beck, S. W. (2003). Classroom discourse. I A. C. Graesser, M. A. Gernsbacher & S. R. Goldman (Red.), *Handbook of discourse processes* (s. 165–197). Lawrence Erlbaum Associates Publishers. https://doi.org/10.4324/9781410607348

Chapin, S. H., O'Connor, M. C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: using math talk to help students learn* (2 uppl.). Math Solutions.

Cohen, E. G. E. & Lotan, R. A. E. (1997). *Working for equity in heterogeneous classrooms: sociological theory in practice*. Teachers College Press.

Dong, Y., Clements, D. H., Day-Hess, C. A., Sarama, J. & Dumas, D. (2021). Measuring early childhood mathematical cognition: Validating and equating two forms of the research-based early mathematics assessment. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *39*(8), 983–998. https://doi.org/10.1177/07342829211037195

Engle, R. A. & Conant, F. R. (2002). Guiding principles for fostering productive disciplinary engagement: Explaining an emergent argument in a community of learners classroom. *Cognition and Instruction*, 20(4), 399–483.

Ewing, B. (2006). 'Go to the page and work it from there': Young people's experiences of learning mathematics from a text. *Australian Senior Mathematics Journal*, *20*(1), 8–14.

Franke, M. L. & Kazemi, E. (2001). Teaching as learning within a community of practice. I T. Wood, B. S. Nelson & J. E. Warfield (Red.), *Beyond classical pedagogy* (s. 47–74). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410612335

Fraser, S. (2004). *Doing research with children and young people*. SAGE.

Gardesten, M. & Palmér, H. (2023). Students' participation in mathematics in inclusive classrooms: A study of the enacted mathematical and relational knowing of teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–21. https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2258485

Gauthier, L. (2016). Redesigning for student success: Cultivating communities of practice in a higher education classroom. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, *16*(2), 1–13. https://doi.org/10.14434/josotl.v16i2.19196

Giota, J. & Emanuelsson, I. (2011). *Specialpedagogiskt stöd, till vem och hur? Rektorers hantering av policyfrågor kring stödet i kommunala och fristående skolor.* Göteborgs Universitet. https://gupea.ub.gu.se/bitstream/handle/2077/24569/gupea_2077_24569_1.pdf;jsessionid=A1D5F6643B31618052074416ECED308B?sequence=1

Goos, M. E. & Bennison, A. (2008). Developing a communal identity as beginning teachers of mathematics: Emergence of an online community of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 41–60. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9061-9

Greig, A., Taylor, J. & MacKay, T. (2013). *Doing research with children: a practical guide* (3 uppl.). SAGE.

Gutiérrez, J. F., Brown, S. A. & Alibali, M. W. (2018). Relational equity and mathematics learning: Mutual construction during collaborative problem solving. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 159–187. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.91

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem*. Liber.

Helenius, O., Johansson, M. L., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E. & Wernberg, A. (2016). When is young children's play mathematical?. I T. Meaney, O. Helenius, M. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics education in the early years*(s. 139–156). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_8

Hodges, T. E. & Cady, J. (2013). Blended-format professional development and the emergence of communities of practice. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(2), 299–316. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0065-0

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). I*ntentional talk: how to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Llewellyn, A. & Mendick, H. (2011). Does every child count? Quality, equity and mathematics with/in neoliberalism. I B. Atweh, M. Graven, W. Secada & P. Valero (Red.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (s. 49–62). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_4

Maxwell, J. A. (2004). Causal explanation, qualitative research, and scientific inquiry in education. *Educational Researcher*, *33*(2), 3–11. https://doi.org/10.3102/0013189x033002003

Margrain, V. & van Bommel, J. (2023). Assessment and gifted discourse in Swedish early years education steering documents: The problem of (in)visibility. *Education Sciences*, *13*(9), 904. https://doi.org/10.3390/educsci13090904

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Publications.

McKenney, S. E. & Reeves, T. C. (2019). *Conducting educational design research* (2 uppl.). Routledge.

Michaels, S. & O'Connor, C. (2015). Conceptualizing talk moves as tools: Professional development approaches for academically productive discussions. I B. R. Lauren, S. C. A. Christa & N. C. Sherice (Red.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (s. 347–156). American Educational Research Association. https://doi.org/10.3102/978-0-935302-43-1_27

Nic Mhuirí, S. (2014). Investigating student participation trajectories in a mathematical discourse community. I P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Red.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (s. 297–304). Lebonfon.

Nortvedt, G. A. & Buchholtz, N. (2018). Assessment in mathematics education: Responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM, 50*(4), 555–570. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0963-z

O'Connor, C. & Michaels, S. (2017). Supporting teachers in taking up productive talk moves: The long road to professional learning at scale. *International Journal of Educational Research, 97*, 166–175. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.11.003

Palmér, H. & Roos, H. (2017). What is implied when researchers claim to use a theory? *International Journal of Research & Method in Education, 40*(5), 471–479. https://doi.org/10.1080/1743727X.2016.1166487

Palmér, H. & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: What does posing a similar task imply to students? *ZDM, 52*(4), 743–752. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x

Palmér, H. & van Bommel, J. (2023). Young students exploring measurement through problem solving and problem posing. *The Mathematics Educator, 31*(1), 30–54.

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. I T. Plomp & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 11–50). Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Pramling, N. & Pramling Samuelsson, I. (2008). Identifying and solving problems: Making sense of basic mathematics through storytelling in the preschool class. *International Journal of Early Childhood, 40*(1), 65–79. https://doi.org/10.1007/BF03168364

Pratt, N. & Back, J. (2009). Spaces to discuss mathematics: communities of practice on an online discussion board. *Research in Mathematics Education, 11*(2), 115–130. https://doi.org/10.1080/14794800903063323

Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877–891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Resnick, L. B., Michaels, S. & O'Connor, C. (2010). How (well structured) talk builds the mind. I D. Preiss & R. J. Sternberg (Red.), *Innovations in educational psychology: perspectives on learning, teaching and human development* (s. 163–194). Springer.

Ruef, J. L. & Shepard, R. (2022). Relational equity: Adapting an elementary mathematics teaching methods course to online contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(4). https://doi.org/10.29333/iejme/12224

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher, 43*(8), 404–412. https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

Schoenfeld, A. H. (2023). A theory of teaching. I A.-K. Praetorius & C. Y. Charalambous (Red.), *Theorizing teaching: Current status and open issues* (s. 159–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25613-4_6

Scott, M. (2019). Supporting beginning teachers to engage in relational investigations of teaching and learning. I S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines & C. Munter (Red.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Missouri.

Skolverket. (2009). *Attityder till skolan 2009. Elevernas och lärarnas attityder till skolan*. https://www.skolverket.se/publikationer?id=2385

Skolverket. (2023). *Hitta matematiken: nationellt kartläggningsmaterial i matematiskt tänkande i förskoleklass*. http://www.skolverket.se/undervisning/forskoleklassen/kartlaggning-i-forskoleklassen

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik: för att planera och leda rika matematiska diskussioner* (1 uppl.). Natur & kultur.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Sterner, G., Helenius, O. & Wallby, K. (2014). *Tänka, resonera och räkna i förskoleklass.* Nationellt centrum för matematikutbildning.

Sterner, G., Wolff, U. & Helenius, O. (2019). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–19. https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579

Sterner, G., Nagy, C. & Nyström, P. (2023). A scaled-up mathematics intervention in preschool classes. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–11. https://doi.org/10.1080/00313831.2023.2250352

Sullivan, P., Warren, E. & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(1), 2–17. https://doi.org/10.1007/BF03217071

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Kartleggingsprøver i regning: veiledning til lærere.*

van Bommel, J. & Palmér, H. (2021). Enhancing young children's understanding of a combinatorial task by using a duo of digital and physical artefacts. *Early Years*, *41*(2–3), 218–231. https://doi.org/10.1080/09575146.2018.1501553

Vennberg, H. (2020). *Att räkna med alla elever: Följa och främja matematiklärande i förskoleklass.* [Doktorsavhandling, Umeå Universitet]. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-168752

Vennberg, H. & Norqvist, M. (2018). *Counting on: Long term effects of an early intervention programme. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 355–362). PME.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.*

Walla, M. (2022). Diversity of assessment discourses in Swedish and Norwegian early mathematics education. *Journal of Childhood, Education & Society*, *3*(2), 98–111. https://doi.org/10.37291/2717638X.202232178

Walla, M. (2023). Exploring the potential of using talk moves with young students when striving towards an equitable mathematics education. I P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Red.), *Proceedings of the thirteenth congress of the European society for research in mathematics education* (s. 2234–2241). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Walla, M (2024). Diverse meanings ascribed to equity in early mathematics assessment. *Education Inquiry*, 1–17. https://doi.org/10.1080/20004508.2024.2316390

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity.* Cambridge University Press.

Wu, H. (1994). The role of open-ended problems in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 115–128. https://doi.org/10.1016/0732-3123(94)90044-2

Xenofontos, C. (2019). Equity and social justice in mathematics education. I C. Xenofontos (Red.), *Equity in mathematics education: addressing a changing world.* Information Age Publishing.

Författarpresentationer

Maria Walla

Maria Walla är doktorand i pedagogiskt arbete vid Högskolan Dalarna. Hennes doktorandprojekt handlar om bedömning och undervisning i matematik i förskoleklass.

Hanna Palmér

Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och tidig matematikundervisning.