FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 31–45
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Förskoleklasselevers användning av talstrukturer

Orginalartikel

Camilla Björklund[1]*, Jessica Elofsson[2], Angelika Kullberg[1], Anna-Lena Ekdahl[3], Ulla Runesson Kempe[3] & Maria Alkhede[1]

[1] Göteborgs universitet

[2] Linköpings universitet

[3] Jönköping University

*Korresponderande författare:
Camilla Björklund
camilla.bjorklund@ped.gu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 31–45
DOI:10.61998/forskul.v12i2.23890
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Sammanfattning

I artikeln presenteras och diskuteras förskoleklasselevers förmåga att se och använda talstrukturer för att bestämma antal, samt hur förmågan utvecklas efter att de deltagit i interventioner under ett läsår. Totalt intervjuades 361 elever som deltagit i interventionerna alternativt i vanlig förskoleklassundervisning. Intervjuerna gjordes under tidig hösttermin samt vid förskoleklassårets slut. En specifik uppgift innehållande ett spatialt mönster i intervjumaterialet utgör underlag för att synliggöra hur eleverna erfar och använder talstrukturer, både kvantitativt och kvalitativt. Analysen tar vidare avstamp i en variationsteoretisk syn på lärande, där sättet att erfara ett fenomen, i detta fall tal och strukturer så som de framträder i en figur ordnad i ett spatialt mönster, har betydelse för vad eleven kan göra med tal, till exempel på vilket sätt man kan bestämma antal. Särskilt diskuteras vilka implikationer resultaten har för utvecklingen av matematikundervisning i förskoleklass och elevers fortsatta aritmetiklärande.

Nyckelord: talstrukturer, interventioner, förskoleklass, elevintervjuer

Abstract

In the article, we present and discuss preschool class students' ability to see and use number structures to determine number and how this ability develops after participating in interventions during one academic year. A total of 361 students who participated in the interventions or in regular preschool class teaching were interviewed early in the autumn term and at the end of the school year. One task containing a spatial pattern forms the basis for identifying how students experience and use number structures, quantitatively and qualitatively. The analysis is further based on a variation theory view of learning, where ways of experiencing a phenomenon, in this case numbers and structures as they appear arranged in a spatial pattern, have significance for what students can do with numbers, e.g., how to determine numbers. Implications of the results for developing mathematics teaching in preschool class and students continued arithmetic learning are discussed.

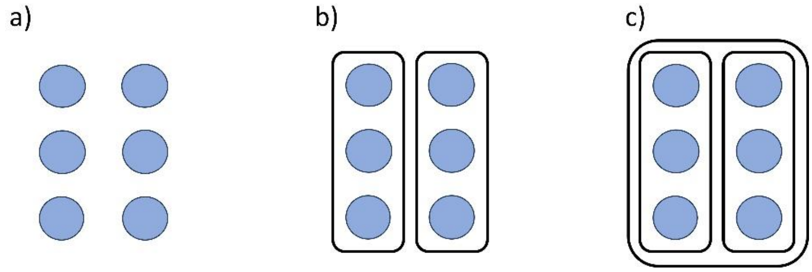
Keywords: Number structures, Interventions, Preschool class, Student interviews forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 31–45

Introduktion

En av de vanligaste frågorna elever möter i den tidiga matematikundervisningen handlar om att svara på "hur många" och att bestämma antal i avgränsade mängder. I litteraturen finns det också många observationer av hur barn går till väga och vilka strategier de använder i dessa sammanhang (Fuson, 1992). Intresset för att förstå hur elever gör för att bestämma antal och vilka kompetenser de behöver utveckla är stort, eftersom detta anses vara en grundläggande färdighet för att kunna använda tal på ett framgångsrikt sätt i problemlösning som handlar om kvantiteter. I föreliggande artikel riktar vi uppmärksamheten mot talstrukturer, som en betydelsefull aspekt av taluppfattning och räknefärdigheter. Att se tal som uppbyggda i talstrukturer innebär att urskilja relationer inom och mellan tal, såsom att fem består av tre och två samt att fem är två mer än tre (se Baroody, 1987). Det innebär vidare att eleven kan urskilja grupper av objekt i en mängd, samband mellan dessa och hur de tillsammans bildar en helhet som kan benämnas med ett tal (Venkat m.fl., 2019). Strukturen är alltså den underliggande regelbundenhet och generella princip som definierar tal, vilket kan kännas igen i såväl spatiala mönster (t.ex. prickar ordnade som ett tärningsmönster eller som mönstret på dominobrickor) som positionssystemet och räkneordens språkliga uppbyggnad (t.ex. tiotal och hundratal).

Tidigare forskning visar att hållbara och utvecklingsbara räknefärdigheter bygger på en utvecklad förståelse för och förmåga att hantera tal som del-helhetsrelationer (Baroody, 2016; Davydov, 1982; Neuman, 2013). När tal ses som en relation mellan helheten och delarna (utgör en struktur) kan detta användas för att bestämma antal och lösa aritmetiska problem. Sprenger och Benz (2020) beskriver utvecklingen av färdigheten att bestämma antal som att barn först inte urskiljer några strukturer av grupperade objekt (se figur 1a). Därefter lär de sig att urskilja delar som utgörs av grupperade objekt (se figur 1b), men kan ännu inte använda strukturen för att bestämma antalet (helheten). Slutligen kan barn använda talstrukturer för att bestämma antalet (se figur 1c). Det som förblir oklart i forskningen är dock vad det är som gör att barn kan eller inte kan använda sig av talstrukturer för att bestämma antal, samt hur undervisning kan ge stöd för elever att lära sig se och använda sådana strukturer på ett framgångsrikt sätt.

Figur 1
Sätt att urskilja delar i relation till en helhet



Not. a) inga strukturer av grupperade objekt urskiljs, objekten räknas vanligtvis en efter en, b) grupperade objekt urskiljs som delar i den större helheten "tre och tre", men relateras inte till en sammansatt helhet, och c) delarna urskiljs som relaterade till helheten och bidrar därmed till att barnet kan bestämma det totala antalet "tre och tre är sex".

I denna artikel presenterar och diskuterar vi förskoleklasselevers förmåga att se och använda talstrukturer för att bestämma antal samt hur förmågan utvecklas efter att de har deltagit i interventioner som tar en strukturell ansats, det vill säga där relationer mellan och inom tal (del-helhetsrelationer) synliggörs. Detta görs genom att, utifrån uppgiftsbaserade intervjuer med 361

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 31–45

förskoleklasselever som deltagit antingen i interventionerna eller i vanlig förskoleklassundervisning, identifiera hur de erfar och förmår använda talstrukturer i ett spatialt mönster.

Bestämma antal

När barn ska bestämma antalet objekt i en liten mängd kan de göra det genom att enbart titta snabbt på mängden (perceptuell subitisering). När mängden blir större behöver de däremot antingen känna igen ett mönster som framträder spatialt (von Glasersfeld, 1982), gruppera kända delar för att bestämma helheten (konceptuell subitisering, se Clements m.fl., 2019) eller räkna objekten. Konceptuell subitisering omfattar även om någon del uppfattats som en grupp och övriga räknats en och en för att bestämma antalet (Clements & Sarama, 2021). Konceptuell subitisering är relaterad till förmågan att strukturera antal i sammansatta enheter (grupper, units, se figur 1).

Förmågan att se ett antal objekt som en helhet eller en enhet, till exempel att fem enskilda objekt tillsammans utgör en samling som benämns ”fem”, vilket också kan ses som en ”femenhet”, har stor betydelse för elevernas fortsatta matematiklärande (Hunting, 2003; Paliwal & Baroody, 2020). Enligt Benz (2013) kan barn redan i förskoleåldern erfara strukturer i kvantiteter och använda dem för att bestämma antal. När elever (perceptuellt) strukturerar antal i subgrupper (se exempel c i figur 1) innebär det en särskild förmåga att se helhet och delar. Schöner och Benz (2018) menar till exempel att när en elev säger “Två, tre och två till är sju” så erfar eleven struktur (talrelationer i form av delar som tillsammans är 7) och kan använda sig av strukturen för att bestämma antalet. Det skulle kunna tolkas som att eleven erfar en grupp med två och en grupp med tre som fem, och fem och två som sju, det vill säga flera sammansatta delar som relaterar till en helhet.

Tidigare studier som har fokuserat på hur barn ser struktur har bland annat studerat vilka grupperingar de gör. Sprenger och Benz (2020) undersökte med hjälp av teknik som följer ögonrörelser (eyetracking) hur femåringar visuellt grupperar objekt när de ska bestämma antal i en mängd. De fann att 12–35 procent av femåringarna inte använde sig av struktur och att användning av struktur varierade mellan 25–66 procent beroende på antal objekt i mängderna. Hur objekten var placerade visade sig ha betydelse för om barnen använde struktur eller inte. Om fem objekt var placerade i en rad (i en äggkartong) så använde barnen sig i lägre grad av struktur än om fem objekt var placerade i två rader som tre och två. Det verkar alltså kunna bero på hur objekten är ordnade, om barnen som kan skapa grupper gör det, men att det också finns barn som ännu inte använder någon form av struktur.

Forskning och teorier om barns utveckling av räknefärdigheter är omfattande, men samstämmiga i att en förutsättning är barns förmåga att uppfatta enheter (units), det vill säga att objekt i omvärlden kan ses tillhöra en gemensam samling eller grupp, vilken initialt inte är numerisk till sin innebörd utan snarare har betydelsen att något kan tillhöra en viss kategori av objekt och utgör en obestämd ”månghet” (Steffe, 1991). Det är av betydelse att känna igen figurativa mönster hos sådana samlingar av objekt, menar Steffe, eftersom det bidrar till att barn känner igen liknande mönster och knyter dem till representationer såsom räkneord. Detta innebär att barnet som till exempel hör “fyra” associerar till objekt ordnade på samma sätt som till exempel på en tärning (en prick i varje hörn på en av tärningens sidor). Figurativa mönster som känns igen från tärningen har däremot inte självklart den nödvändiga numeriska betydelsen, utan är snarare igenkänning av en “bild” eller figur. Att uppfatta mönster som numeriska innebär däremot att det är *antalet* objekt ordnade i ett visst mönster som framträder för barnet och är en grund för att urskilja hur grupper kan ses som delar i en större helhet, det vill säga skapa en struktur. Mandler och Shebo (1982) visade empiriskt att sättet som objekt är ordnade, och därmed hur de perceptuellt erfars, spelar roll för säkerheten i att uppskatta antal. Vuxna tenderar att "se" grupper om två och tre, men också kända mönster såsom sidan med fem prickar på en tärning (en prick i varje hörn och en i mitten), vilket ger stöd för att uppskatta antal också i större mängder. Spatiala mönster underlättar alltså att känna igen och urskilja mängder som sammansatta av mindre enheter. Paralleller kan dras till subitisering genom att grupper av objekt uppfattas genom likhet och skillnad i antal intuitivt, utan att räkna (Kaufmann m.fl., 1949; Wynn, 1998). I och med att denna kognitiva process visat sig vara oberoende av hur objekt är ordnade, förmodas den bidra till att kvantiteter "känns igen" som lika eller olika i antal, det vill säga abstraheras så att "fyra" betyder ett specifikt antal oberoende av hur objekten är ordnade. Att uppfatta antal i grupper på detta sätt kan bidra till att förstå och använda tal. I likhet med detta betonar Davydov (1982) särskilt skapandet av enheter (units) som grund för räknefärdigheternas utveckling, som operationaliseras till exempel i mätande, där mindre enheter ingår som delar i en större helhet och varje enhet bör erfaras utifrån egenskapen "månghet". Det tycks således, i ett samstämmigt forskningsfält, vara kritiskt att elever lär sig se tal som sammansatta enheter för att de ska kunna använda strategier i addition och subtraktion som bygger på del-helhetsrelationen hos tal. Hur elever når en sådan förståelse för tal förklaras däremot på olika sätt beroende på teoretisk utgångspunkt. Och få har riktat fokus mot på vilka sätt elever erfar och använder talstrukturer.

Metod

Implementering av matematikinterventioner med strukturell ansats i förskoleklass

I samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare har undervisning som bygger på att utveckla elevers uppfattningar av tal som talstrukturer prövats ut under ett läsår. Eleverna har i undervisningen mött tal presenterade som del-helhetsrelationer, det vill säga att tal är sammansatta av mindre tal och att talrelationerna är ett stöd i aritmetisk problemlösning.

Två tidigare beprövade interventionsprogram med positiva resultat för matematikutveckling hos yngre elever har legat till grund för SATSA-interventionerna, dels Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS) som utvecklats av Mulligan och Mitchelmore (2009) för den australiensiska skolkontexten, dels interventioner som tar stöd i Davydov med kollegors arbete (1999) utvecklad inom ett kulturhistoriskt perspektiv samt variationsteoretiska studier av nödvändiga aspekter för att utveckla taluppfattning (Björklund m.fl. 2021; Kullberg m.fl., 2020). Gemensamt för dessa program är utgångspunkten i att se tal som bestående av enheter vilka kan vara större än ett (units) och genom systematiskt undersökande undervisning erbjuda stöd för eleverna att se relationer inom och mellan tal. Ett exempel på en sådan undervisningsaktivitet är att dela upp sju apor i två träd (se Cobb m.fl., 1997), där den additiva strukturen hos talet sju uppmärksammas i den variation av uppdelningar som är möjlig. Ett annat exempel på undervisningsaktivitet är att dela upp ett antal kex mellan två eller flera hundar (se Mulligan & Mitchelmore, 2016), där den multiplikativa strukturen hos talen sätts i förgrunden.

Även om interventionerna har utvecklats i olika utbildningskontexter, har vi i SATSA-projektet kunnat pröva hur den *strukturella ansatsen* varit möjlig att implementera i den svenska förskoleklasskontexten genom nära samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare. Ett teoretiskt stöd för implementeringen har varit variationsteori för lärande (VT, Marton, 2015). VT har lämpat sig väl i förhållande till de matematikdidaktiska programmen som legat till grund för SATSA, i och med att tyngdpunkten då lagts på vad som sätts i förgrund för elevernas erfarande och undersökande och hur innebörden och användbarheten av tal och räknande då framträder.

Det genomgående lärandeobjektet i interventionerna har varit tals del-helhetsrelation. Undervisningsaktiviteterna innehåller aspekter som tillsammans förmodas omfatta vad som är nödvändigt att erfara för att förstå och använda tal i aritmetisk problemlösning. Undervisningen fokuserar därmed primärt på hur det matematiska innehållet ska behandlas i undervisningen, och hur de nödvändiga aspekterna kan göras synliga genom systematiska undersökningar, till exempel att hålla en helhet konstant och systematiskt variera delarna inom denna helhet snarare än att variera undervisningsmetoder. SATSA har hållit sig inom ett relativt lågt talområde och fokuserat på att synliggöra talrelationer, i början genom att undersöka tal som enheter större än ett, därefter hur samma tal kan bestå av varierande talkombinationer och slutligen hur tal kan ses som strukturer (bland annat med fem eller tio som enheter) i avsikt att ge eleverna stöttning i att utveckla sina sätt att erfara tal som del-helhetsrelationer och använda detta i aritmetisk problemlösning. Som stöd i undervisningen har olika artefakter och representationer (bl.a. tärningar, tioramar samt material ordnade i semidecimala strukturer) använts för att synliggöra samband inom och mellan tal.

Undervisningen är vetenskapligt grundad men tidigare prövad främst i andra utbildningskontexter än svensk förskoleklass, vilket gjort att anpassningar har behövt göras i samråd med lärarna för att undervisningsaktiviteterna ska respondera mot den svenska förskoleklasskontexten. I återkommande möten diskuterades videodokumentationer från lärarnas undervisning kollegialt för att synliggöra lärandemöjligheterna och hur tals del-helhetsrelationer uttryckta i strukturer gjordes till objekt för lärande i undervisningen och hur detta ytterligare kunde förfinas. Särskilt intressant för utveckling av undervisning är därmed på vilket sätt eleverna *lärt sig se och använda talstrukture*r för att bestämma antal, som grund för fortsatt fördjupat lärande i matematik, det vill säga hållbara och utvecklingsbara strategier.

Datainsamling

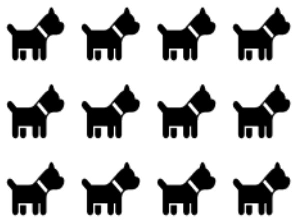
Underlaget för analysen är uppgiftsbaserade intervjuer som genomförts med 361 elever i början och i slutet av förskoleklassåret. 192 av eleverna har deltagit i interventioner inom SATSA-projektet under läsåret 2022–2023 och 169 elever har deltagit i ordinarie matematikundervisning (jämförelsegrupp).

Totalt deltog elever från fem olika kommuner i södra Sverige. Informationsbrev och samtyckesblanketter skickades ut till samtliga vårdnadshavare. I respektive klass intervjuades tio slumpmässigt utvalda elever vars vårdnadshavare hade gett samtycke för deltagande. Elevintervjuerna genomfördes enskilt i ett rum i nära anslutning till klassrummet. Intervjuguiden bestod av uppgifter som eleverna skulle besvara muntligt. Ingen ljudupptagning gjordes vid intervjutillfället, i stället användes ett protokoll där forskaren kortfattat antecknade vad eleven svarade. En elevintervju tog cirka 15 minuter. Efter intervjuerna kodades hela datamaterialet av respektive intervjuande forskare. Vid tveksamma fall har forskargruppen gemensamt diskuterat alternativa kodningar för att uppnå samstämmighet.

I den här artikeln har en uppgift valts ut för djupare analys av elevernas sätt att *bestämma antal*. I analysen låg tyngdpunkten på att dels beskriva hur elever använder talstrukturer i uppgiften där de ska bestämma ett antal (kvantitativt), dels i kvalitativa former beskriva hur eleverna genom interventionen lärt sig erfara tal och hur talstrukturer kan användas. Uppgiften är ett spatialt mönster där 12 objekt är ordnade i 4 kolumner och 3 rader (se figur 2) . I uppgiften är antalet objekt fler än vad kognitiva processer såsom subitisering omfattar, vilket gör att eleven måste nyttja någon sorts strategi för att bestämma antal, såsom att urskilja talstrukturer som framträder i mönstret.

Uppgiften presenterades genom att intervjuaren visar en bild på ett A4-papper för eleven. Intervjuaren ställde sedan två frågor (a respektive b, se figur 2[1]). Båda frågorna öppnade upp för elever att uttrycka olika sätt att erfara antal. Det är också möjligt att få reda på om eleverna använder olika strategier på fråga a och b. Eleven har möjlighet att uttrycka sig verbalt men kan även peka och visa på bilden. Intervjuaren hade i sitt protokoll en likadan bild och förutom att anteckna vad eleven svarade, markerades också hur eleven pekade och visade. Vid genomförandet av elevintervjuerna ställdes uppgiften i slutet av intervjun.

Figur 2
Uppgift med spatialt mönster

Uppgift	Hundarna	
Fråga a)	Hur kan man SE, hur många hundar det är?	
Fråga b)	Hur många hundar är det tillsammans?	

Analys

Elevernas respons på uppgifterna i intervjuerna dokumenterades i ett protokoll med särskilt fokus på elevernas val av strategier för att lösa uppgifterna. Fråga a i den uppgift som analyserades efterfrågar inget exakt antal som svar utan fokuserar eventuellt urskiljande av struktur, medan fråga b efterfrågar det exakta antalet (hur många?). Responsen kodades dels som utfall i rätt, fel eller inget slutgiltigt svar, dels avseende vilken strategi eller ansats som användes (enstegsräkning eller strukturanvändning). I de fall som eleven gav uttryck för en strukturerande ansats dokumenterades också på vilket sätt strukturen framträdde till exempel i gruppering om två eller tre enheter, utifrån resonemang såsom ”dubblor” (se figur 3). En elev som säger “jag ser fyra, fyra och fyra” följt av “det är tolv”, kodas därmed i fråga a som x.3.4 och i fråga b som 1.3.4.

Figur 3
Kodnyckel

Kodnyckel

X.x.x utfall i rätt eller fel eller inget slutgiltigt svar
x.**X**.x strategi/ansats
x.x.**X** vilken struktur framträder

Not. Kodnyckel för kodning av observerade strategier i de uppgiftsbaserade intervjuerna.

För att få en samlad bild av elevernas erfarande och användande av talstrukturer för att bestämma antal före och efter att ha deltagit i interventionerna gjordes en kvantitativ översikt

1 Uppgift inspirerad av Mulligan, Mitchelmore och Stephanou (2015).

av frekvensvärden av elevernas sätt att lösa uppgiften i någon av tre övergripande kategorier: strukturering, enstegsräkning alternativt inget svar. Strukturering kännetecknas av att eleven ser uppgiften som en del-helhetsrelation och använder sig av enheter större än ett i sitt resonemang, exempelvis ser det spatiala mönstret som tre rader med fyra i varje. Enstegsräkning kännetecknas av att eleven räknar alla objekten (hundar) en och en. I denna kategori hamnar även de elever som endast strukturerar ett mindre antal/en mindre del, exempelvis ser fyra hundar och sedan räknar: ”fem, sex, sju, åtta, nio, tio, elva, tolv”. I den tredje kategorin inryms de elever som inte ger något svar på frågorna.

Intresset i denna studie riktades även mot hur eleverna erfar, eller ser, talstrukturer i figuren, vilket besvarades kvalitativt genom en noggrannare analys av protokoll och fältanteckningar från intervjuerna. I denna analys tog vi en variationsteoretisk ansats, där erfarande är ett centralt begrepp. Att erfara något innebär hur en individ ser (uppfattar, tolkar eller förstår) något, som en holistisk sammansatt förståelse (Marton & Pong, 2005). Erfarandet (t.ex. på vilket sätt en elev ser en figur framför sig) är i sig en funktion av de aspekter av fenomenet som individen förmår att samtidigt urskilja vid ett givet tillfälle. Individen är ständigt medveten om många aspekter som utgör olika fenomen i omvärlden, men de flesta befinner sig i medvetandets bakgrund medan vissa framträder (Marton & Booth, 1997). Vilka aspekter som framträder för individen beror dels på vad individen erfarit tidigare, till exempel hur tal kan ses som enheter större än ett, dels vad som görs möjligt att urskilja i den specifika situation, såsom hur en figur är spatialt ordnad i ett mönster av rader och kolumner. Utifrån detta antagande, om vad som urskiljs av elever som möter ett spatialt mönster, identifierade vi vad som framträder för eleverna och tolkade detta i termer av hur eleven erfar strukturer, i vilka delar och helhet kan sättas i förgrund eller bakgrund i elevens medvetande. På så vis framträdde olika sätt att erfara struktur och använda talstrukturer för att bestämma antal i uppgiften. Denna analys gjordes på både a- och b-frågan.

Resultat

Resultatet från elevintervjuerna vid förskoleklassårets början visar att eleverna nyttjar olika strategier för att beskriva hur man kan se och bestämma antalet objekt i hunduppgiften (se figurerna 4 och 5).

I den första delfrågan (fråga a) Hur kan man SE hur många hundar det är? uppmanas eleverna att visa, säga eller på något sätt uttrycka på vilket sätt man kan se antalet hundar. När eleverna i interventionsgruppen beskriver hur man kan se antalet hundar nyttjar 71 procent av eleverna enstegsräkning, medan 26 procent i stället nyttjar struktur för att beskriva detta. Ett fåtal elever (3%) ger inget svar på frågan (se figur 4). I jämförelsegruppen är det 56 procent av eleverna som vid den första elevintervjun nyttjar enstegsräkning när de beskriver hur man kan se antalet hundar, medan 34 procent av eleverna nyttjar struktur för att beskriva hur man kan se antalet. I jämförelsegruppen är det 10 procent av eleverna som inte ger något svar vid det första intervjutillfället (se figur 4). Andelen elever som nyttjar enstegsräkning vid det första intervjutillfället är större i interventionsgruppen än i jämförelsegruppen (71% vs. 56%) och andelen elever som nyttjar struktur är mindre i interventionsgruppen än i jämförelsegruppen vid samma intervjutillfälle (26% vs. 34%).

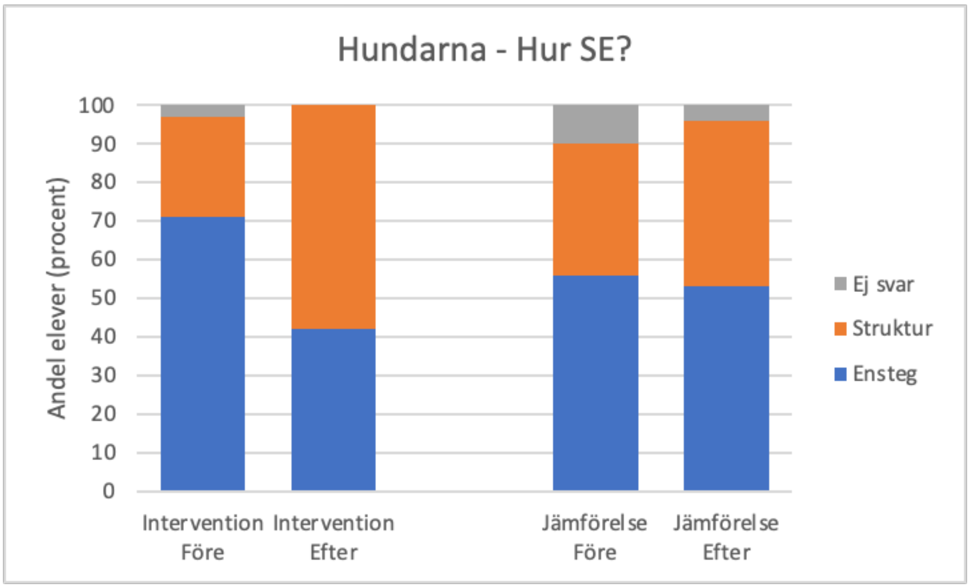
Vid det andra intervjutillfället i slutet av förskoleklassåret kan vi se skillnader i andelen elever som nyttjar enstegsräkning respektive struktur för att beskriva hur man kan se antalet hundar. Av de elever som deltagit i interventionerna under läsåret nyttjar nu 42 procent av eleverna enstegsräkning när de beskriver hur man kan se antalet hundar i det spatiala mönstret, vilket är en minskning med nästan 30 procentenheter jämfört med det första intervjutillfället. Alla elever ger svar på frågan vid det andra intervjutillfället vilket innebär att det är 58 procent av eleverna

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 31–45 Camilla Björklund m.fl.

som nyttjar struktur i sin beskrivning. För jämförelsegruppen kan vi notera att andelen elever som enstegsräknar vid det andra intervjutillfället är näst intill oförändrad (minskning med 3 procentenheter) medan andelen elever som nyttjar struktur ökat med 9 procentenheter. Ett fåtal elever i jämförelsegruppen (4%) ger inget svar på hur man kan se antalet hundar vid det andra intervjutillfället.

Figur 4

Strategier för att lösa uppgift a)



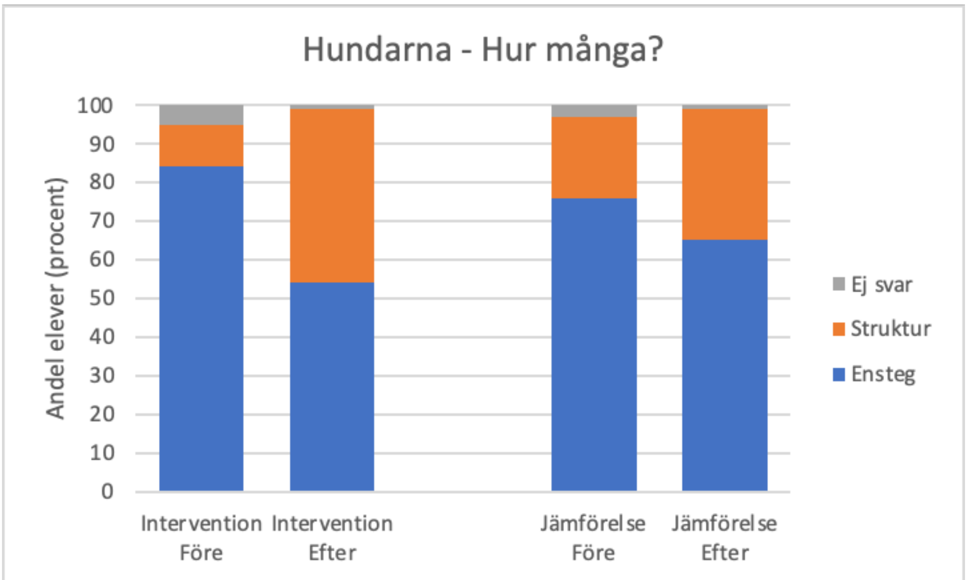
Not. Andel elever som använder enstegsräkning (blått) och struktur (orange) före och efter interventionstillfället för interventions- och jämförelsegruppen för att beskriva hur man kan se antalet hundar. Andelen elever som ej lämnade svar är också representerade (grått).

I den andra delfrågan (fråga b) uppmanades eleverna att tala om "hur många" hundar som finns i det spatiala mönstret. När eleverna i interventionsgruppen tar reda på antalet hundar vid den första elevintervjun nyttjar 84 procent enstegsräkning, medan 11 procent av eleverna i stället nyttjar struktur för att beskriva detta. Ett fåtal elever (5%) ger inget svar på frågan (se figur 5). I jämförelsegruppen är det 76 procent av eleverna som vid den första elevintervjun nyttjar enstegsräkning när de bestämmer antalet hundar, medan 21 procent av eleverna i jämförelsegruppen nyttjar struktur när de bestämmer det totala antalet hundar i mönstret. I jämförelsegruppen är det 3 procent av eleverna som inte ger något svar vid det första intervjutillfället (se figur 5). Det kan noteras att även i b-uppgiften är andelen elever som nyttjar enstegsräkning vid det första intervjutillfället något större i interventionsgruppen jämfört med jämförelsegruppen (84% vs. 76%). Andelen elever i interventionsgruppen som nyttjar struktur för att bestämma antalet hundar är lägre jämfört med jämförelsegruppen (11% vs. 21%).

I slutet av förskoleklassåret när den andra intervjun genomförs kan vi se skillnader i andelen elever som nyttjar enstegsräkning respektive struktur när de ska svara på hur många hundar det är i det spatiala mönstret. I interventionsgruppen är det 54 procent av eleverna som nyttjar enstegsräkning för att bestämma antalet hundar, en minskning med 30 procentenheter mot första intervjutillfället. Andelen elever som nyttjar struktur för att bestämma antalet har i sin tur ökat från 11 procent vid den första intervjun till 45 procent vid det andra intervjutillfället. För jämförelsegruppen kan vi notera att andelen elever som enstegsräknar vid det andra intervjutillfället minskat med 11 procentenheter medan andelen elever som nyttjar struktur ökat med 13 procentenheter (från 21% till 34%, se figur 5). En slutsats vi kan dra utifrån detta är att fler elever i både interventions- och jämförelseklasser använder strukturer efter förskoleklassåret, men de elever som deltagit i interventionerna har utvecklat sin förmåga att använda strukturer i mycket högre grad.

Figur 5

Strategier för att lösa uppgift b)



Not. Andel elever som använder enstegsräkning (blått) och struktur (orange) före och efter interventionstillfället för interventions- och jämförelsegruppen för att svara på hur många hundar det är. Andelen elever som ej lämnade svar är också representerade (grått).

Ett intressant resultat är att många elever väljer att enstegsräkna när de ombeds bestämma exakt antal objekt även om en stor andel visat sig kunna urskilja strukturer i figuren med hundarna. Med andra ord, eleverna urskiljer grupper, det vill säga enheter större än ett, men förmår nödvändigtvis inte erfara dem som en del-helhetsrelation. I den följande resultatredovisningen riktar vi uppmärksamheten mot sättet som eleverna erfar struktur för att göra en kvalitativ analys av vad de olika sätten innebär.

I det följande beskrivs de sätt på vilka eleverna använder sig av någon form av struktur när elevernas svar på både a-frågan (hur kan man SE) och b-frågan (hur många) tolkas som en helhet. Sättet att erfara struktur relateras till huruvida del-helhetsrelationen framträder för eleverna som en nödvändig aspekt att erfara för att kunna använda talstrukturer i syfte att bestämma antal. Denna analys leder oss närmare svaret på det som uppdagades i den kvantitativa analysen: varför elever som tycks ha lärt sig strukturera har svårigheter att använda strukturerna för att bestämma antal.

Uppgiften med hundarna visade sig vara svår för eleverna att direkt se antalet. Ytterst få elever svarar snabbt och säkert ett korrekt antal utan tycks behöva resonera sig fram på ett eller annat sätt till ett svar. I och med att antalet objekt är relativt stort att uppskatta resonerar sig eleverna i stället fram till hur många det kan vara, det vill säga de beskriver strukturen de urskiljer i figuren och tar sig på så sätt fram till ett svar, ofta genom resonemang kring subitiserbara grupper som eleverna pekar ut i figuren. Att urskilja 3-grupper och 4-grupper är vanligast, vilket sannolikt grundar sig i att figuren är uppbyggd som en 3x4-rektangel där grupperna av tre eller fyra är subitiserbara för eleven och ses som enheter.

Fyra distinkta sätt att erfara det spatiala mönstret framträder i analysen, vilka kan identifieras utifrån hur eleven urskiljer delar och helheter och särskilt relationen mellan dessa. Eleverna erfar det spatiala mönstret som:

A. *Sammansatta enheter utan relation till helheten*: eleven urskiljer enbart enheter större än ett (dvs. sammansatta), men ser ingen relation till helheten 12.

B. *Enstaka enheter med relation till helheten:* eleven urskiljer enstaka enheter (1) i en struktur som kan innebära en helhet av 12. Denna helhet utgörs inte av grupper som enheter större än ett inom denna helhet.

C. *Sammansatta och enstaka enheter med relation till helheten*: eleven urskiljer (minst) två grupper i figuren som (sammansatta) enheter större än 1 vilka tillsammans utgör en helhet. Eleven urskiljer resterande objekt i figuren som enstaka enheter (1) men erfar inte hur de sammansatta och enstaka enheterna samtidigt relaterar till helheten 12.

D. *Sammansatta enheter med relation till helheten*: eleven urskiljer enheter större än 1 och helheten, samtidigt. Innebörden av 12 är för eleven en helhet inom vilken delar ingår som har en inbördes relation till varandra och till helheten.

A–D ger en översikt av hur eleverna erfar det spatiala mönstret som enheter i förhållande till den större helheten. Särskild vikt har lagts vid huruvida eleverna erfar enheter som sammansatta eller enstaka, samt om helheten urskiljs. I analysen visar det sig vara av betydelse att delar erfars som sammansatta enheter och samtidigt relateras till helheten.

A. Sammansatta enheter utan relation till helheten

En del elever urskiljer sammansatta enheter i det spatiala mönstret, till exempel tre rader med fyra i varje eller fyra kolumner med tre i varje, men förmår inte urskilja hur dessa utgör delar i en större helhet (jämför figur 1b). Det kan ta sig uttryck som att eleven drar med fingret från vänster till höger längs raderna, säger "tre fyror, sen glömde jag var det var, då räknade jag dom" och enstegsräknar för att bestämma det exakta antalet. De sammansatta enheterna bestående av tre grupper med fyra hundar relateras då inte till helheten. För att bestämma antal enstegsräknar därför eleven för att hitta helheten. Den multiplikativa relationen i figuren uttrycks alltså av eleven, men svårigheten ligger i att se hur antalet grupper är relaterade till helheten.

B. Enstaka enheter med relation till helheten

En stor andel av eleverna erfar det spatiala mönstret som enstaka enheter. Det som utmärker detta sätt att se figuren är att eleverna enstegsräknar varje objekt för att bestämma antalet, ingen tydlig struktur av delar och helhet används (jämför figur 1a). Eleverna urskiljer helheten som bestående av 12 enstaka enheter men inga sammansatta enheter. Ibland uppkommer svårigheter med att hålla räkningen på antalet objekt när dessa hanteras som enskilda enheter.

C. Sammansatta och enstaka enheter med relation till helheten

Eleverna urskiljer vissa grupper i det spatiala mönstret som enheter större än 1, vilka utgör en helhet i sig. En del elever använder strukturen av ”dubblor”, de kan urskilja 4 i två rader som 8 (de jämna delarna relaterar till en helhet). Däremot förmår eleven inte skapa ytterligare grupper av enheter större än 1 att relatera till en större helhet, varför eleven räknar vidare i enstaka enheter tills alla objekt i figuren inkluderats i helheten 12: “9, 10, 11, 12”, vilket kan ses som uttryck för att eleven urskiljer en struktur av ”fyra och fyra som är åtta” men inte har tillräckliga erfarenheter av hur ytterligare en adderad 4-grupp bildar del i den obekanta helheten.

I intervjuerna framträder olika sätt att gruppera sammansatta enheter som följs av enstegsräkning för att bestämma det exakta antalet, till exempel att eleven först sätter ihop två eller flera grupper, oftast lika stora, och därefter de enheter som finns kvar att räkna: ”Här är nio” (håller för dessa med handen, räknar sen) “9, 10, 11, 12.” På vilket sätt eleven erfar de nio hundar som täcks över med handen framgår inte ur datamaterialet, dock är antalet större än ett omfång som är möjligt att subitisera, varför det är sannolikt att eleven urskiljer någon form av struktur i de nio hundarna (tre kolumner med tre i varje) medan den sista kolumnen inte uttrycks som en sammansatt enhet utan som enstaka enheter som behöver räknas fram.

D. Sammansatta enheter med relation till helheten

En del elever kan ge ett snabbt och säkert svar och vanligtvis beskriva ett matematiskt resonemang som leder till svaret när de ombeds beskriva hur de kom fram till sitt svar. Snabba korrekta svar ges dock sällan i hundarna-uppgiften. Eleverna som svarar snabbt, säkert och korrekt på detta sätt anger det totala antalet redan när de får a-frågan. Strukturen hos det spatiala mönstret erfars samtidigt som delar och helhet – antalet erfars som ett objekt. Användbarheten grundar sig däremot i huruvida eleven kan differentiera delar i helheten och förklara hur talen relaterar till varandra (jämför figur 1c). De flesta elever som svarar snabbt och säkert kan alltså göra den differentieringen vid en följdfråga, men behöver inte ta utgångspunkt i att först urskilja separerade delar för att se hur de tillsammans utgör en helhet.

Många av eleverna erfar det spatiala mönstret som 3- eller 4-grupper och kan också ge svaret 12 på frågan hur många det är tillsammans. De erfar alltså hur jämnstora grupper bildar helheten 12 och uppfattar på så sätt hur delarna relaterar till helheten: “tre, tre, tre och tre. Tolv”. I och med att raderna eller kolumnerna visuellt bildar enheter att ta fasta på blir de framträdande som delar i helheten 12. Ett liknande sätt att resonera sig fram till svar på frågorna kan vi se hos elever som också erfar 3- eller 4-grupper, men i en tydlig additiv struktur: ”fyra och fyra är 8, sen fyra igen är 12” (pekar på raderna, med början på översta raden).

En variant av resonemang som bygger på de urskilda lika stora grupperna inbegriper en samtidig addition där varje del adderas till den föregående och utgör en ny helhet, och på samma sätt växer antalet successivt i elevens resonemang i jämna steg som inkluderar de tidigare urskilda enheterna som en del i en ny helhet: ”fyra, åtta, tolv”.

En del elever tar utgångspunkt i andra kända grupperingar av tal och resonerar utifrån dessa, till exempel ”dubblor”. Figuren med hundarna tenderar att trigga igenkänning av 6-grupper, sannolikt för att objekten kan ses som ”tärningssexor”. 6-grupper är dock inte lika perceptuellt urskiljbara som 3- och 4-grupper eftersom 6-enheten är sammansatt av enheter som i sig inte utgör hela rader. Raderna och kolumnerna drar uppmärksamheten till sig och bidrar till att grupperna urskiljs, men en del elever erfar ändå andra grupper av objekt i mönstret, till exempel att se grupper om två där mönstret inte direkt triggar en perceptuell avgränsning, till exempel ”två, fyra, sex, åtta, tio, tolv” samtidigt som eleven pekar på två hundar i taget. Eleven urskiljer då 2-grupper och adderar dem till att bilda en större helhet. Att eleven räknar i “tvåskutt” för att bestämma antalet kan vara ett uttryck för att hen tar utgångspunkt i jämna delar (två-grupper) men samtidigt ser hur delar bygger upp den större helheten: varje 2-grupp som läggs till relateras samtidigt till de tidigare 2-grupperna och till en allt mer växande helhet.

Konklusion

Den kvalitativa analysen utmynnar i kvalitativt skilda sätt att erfara och använda strukturer (se A, C och D ovan), medan elever som endast urskiljer enstaka enheter som enstegsräknas (se B ovan) inte har innebörden av talstruktur i mening av att urskilja relationen mellan enheter större än ett i det spatiala mönstret. Flertalet elever visar sig alltså inte använda strukturer på ett framgångsrikt sätt även om de deltagit i interventionen där stor tyngd lagts vid att synliggöra del-helhetsrelationen hos tal. Analysen visar att urskilda (sammansatta) enheter inte med nödvändighet relateras till en sammanhållen helhet, samtidigt (se A, B och C), vilket verkar vara av betydelse för hur eleverna erfar del-helhetsrelationen i det spatiala mönstret.

Diskussion

Syftet med denna artikel var att presentera och diskutera förskoleklasselevers förmåga att se och använda talstrukturer för att bestämma antal, samt hur förmågan utvecklas efter att de har deltagit i interventioner som avser att synliggöra talstrukturer. Vi har däremot inte i denna studie redogjort för hur undervisningen i jämförelsegruppen har hanterat tal som innehåll. En begränsning i vår analys är att det endast är en uppgift som har analyserats, dock väcker resultatet frågor om i vilken utsträckning undervisningen i den ordinarie förskoleklassundervisningen främjar elevers strukturella medvetenhet, det vill säga förmågan att urskilja och använda strukturer som stöd för att bestämma antal (jfr Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Talområdet skulle kunna spela en roll för hur uppgiften att bestämma antal kan lösas utifrån urskilda talstrukturer. Ett lägre talområde kan till exempel memoreras eller kännas igen som ett spatialt mönster som representerar ett visst tal såsom prickar ordnade på en tärning (jfr Mandler & Shebo, 1982). Ett högre talområde skulle då utgöra en svårighet i och med att det blir mer komplext att memorera mönster med större antal. Men, gruppering av tal över tio har ingått i de interventioner som eleverna i denna studie deltagit i, vilket innebär att det högre talområdet tolv inte är helt främmande. Talområdet har valts för att utmana eleverna att urskilja den multiplikativa strukturen (tre fyror är tolv eller fyra treor är tolv). I Schöner och Benz (2018) studier visar sig elever ha samma svårigheter att se delar i en helhet hos tal mindre än tio, som vi ser i talområdet över tio, det vill säga eleverna förmår urskilja och relatera enheter större än ett till en helhet men räknar sedan ofta enstaka enheter för att bestämma det totala antalet.

Orsaken till att elever kan se men inte använda strukturerna behöver därmed en annan förklaring än att talområden är obekanta eller för stora. Sprenger och Benz (2020) beskriver utvecklingen hos yngre elever som stegvisa färdigheter i riktning mot att använda strukturer för att avgöra antalet. Sprenger och Benz sammanfattning utgår från en utvecklingspsykologisk förklaring att räknefärdigheter utvecklas som allt mer avancerade strategier och färdigheter. Utveckling i det variationsteoretiska perspektivet som vi använder i denna studie, innebär däremot att man samtidigt förmår att urskilja fler och nödvändiga aspekter av i detta fall tal. I interventionen var avsikten att ge eleverna möjlighet att utveckla sättet att erfara talstrukturer som del-helhetsrelation, där urskiljandet av delar (sammansatta enheter) och helheten är nödvändigt. I och med de observationer som gjorts i studien – att vissa elever har lärt sig se men inte använder strukturer för att bestämma antal – kan man dra slutsatsen att fokuseringen på del-helhetsrelationen är en nödvändig aspekt, men kanske inte tillräcklig, för att alla elever ska *använda* talstrukturer för att bestämma antal. I den kvalitativa analysen framträder helheten som en betydande aspekt, där i synnerhet den *samtidiga* urskiljningen av delar (enheter större än ett) till helheten (struktur bestående av två eller flera enheter) tycks spela roll för hur eleverna förmår bestämma antal.

En didaktiskt viktig fråga uppstår då, huruvida undervisningen fokuserat främst på delar, det vill säga att urskilja och skapa enheter större än ett, men i mindre utsträckning relaterat dem som delar till helheten. Utmaningen i undervisningen tycks nämligen vara att samtidigt fokusera vad delarna är delar av. En annan aspekt att beakta i fortsatta interventioner kan vara att skapa förutsättningar för att eleven urskiljer tio som en enhet, eftersom det underlättar att bestämma större antal, där ”skutt” i 2-, 3- eller 4-enheter blir en krävande procedur om tydliga hållpunkter inte finns att relatera till. I interventionerna ingick ”tio som enhet” i de senare modulerna, vilket innebär att eleverna hade viss erfarenhet av den strukturen. Däremot ger figuren i den analyserade uppgiften inte direkt vägledning till att se (fem eller) tio som en enhet, vilket kan vara en orsak till att ytterst få visade sig urskilja sådan struktur.

Resultatet från denna studie väcker frågan om vad som hjälper elever att urskilja enheter större än ett och relatera dessa till helheten: flera elever har lärt sig att se sammansatta enheter men förmår inte använda dem för att bestämma antal. För undervisningsutveckling är detta en betydelsefull upptäckt för att vidga kunskaperna om elevers förutsättningar att lära sig använda talstrukturer på ett framgångsrikt sätt för att lösa numeriska problem.

Avslutningsvis hävdar vi, med utgångspunkt i denna studie och tidigare forskning, att en inriktning mot att studera och uppmärksamma elevers erfarande i den didaktiska forskningen kan bidra med värdefulla insikter att använda i utvecklandet av undervisningen som bidrar inte bara till elevers matematikfärdigheter utan också till den grundläggande och fördjupade förståelsen för hur tal kan struktureras för att se och använda relationer inom och mellan tal på ett framgångsrikt sätt.

En del av resultaten som ingår i denna artikel har presenterats vid konferensen Madif 14 och publiceras på engelska i en kommande konferensvolym.

Tack

Studien har genomförts med bidrag från Vetenskapsrådet (diarienummer 2020-03712).

Referenslista

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking.* Teachers College.

Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and fostering fluency with basic differences in grade 1. *PNA*, *10*(3), 161–190.

Benz, C. (2013). Identifying quantities—Children's constructions to compose collections from parts or decompose collections into parts. I U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Red.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM 2012 conference* (s. 189–203). Springer.

Björklund, C., Marton, F. & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 261–284. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Clements, D., Sarama, J. & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The neglected quantifier. In A. Norton & M. W. Alibali (Red.), *Constructing number. Research in mathematics education* (s. 13–45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2

Clements, D. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach* (3 uppl.). Routledge.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258–277. https://doi.org/10.2307/749781

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 224–238). Lawrence Erlbaum.

Davydov, V. V., Gorbov, S., Mukulina, T., Savelyeva, M. & Tabachnikova, N. (1999). *Mathematics*. Moscow Press.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 243–275). Macmillan Library Reference.

Hunting, R. P. (2003). Part-whole number knowledge in preschool children. *Journal of Mathematical Behaviour*, *22*(3), 217–235.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology*, *62*, 498–525.

Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I. & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 157–172. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09927-1

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Research & Development*, *24*(4), 335–348. https://doi.org/10.1080/07294360500284706

Mandler, G. & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, *111*(1), 1–22.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2016). *Pattern and structure mathematics awareness program (PASMAP): Book one - foundation and year 1*. Australian Council for Educational Research.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49.

Mulligan, J., Mitchelmore M. & Stephanou A. (2015). *PASA response booklet 2*. Australian Council for Educational Research.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), 3–46.

Paliwal, V. & Baroody, A. J. (2020). Cardinality principle understanding: the role of focusing on the subitizing ability. *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 649–661. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01150-0

Schöner, P. & Benz, C. (2018). Visual structuring processes of children when determining the cardinality of sets—The contribution of eye-tracking. I C. Benz, H. Gasteiger, A. S. Steinweg, P. Schöner, H. Vollmuth & J. Zöllner (Red.), *Early mathematics learning— Selected papers from the POEM Conference 2016* (s. 123–143). Springer.

Sprenger, P. & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets—results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 753–765. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01137-x

Steffe, L. P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and individual differences*, *3*(1), 61–82.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 13–17.
von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, *50*, 191–218.
Wynn, K. (1998). Psychological foundations of number: Numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences*, *2*(8), 296–303.

Författarpresentationer

Camilla Björklund
Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Göteborgs universitet och forskar om matematiklärande i förskola och skolans tidiga år i praktiknära forsknings- och utvecklingsprojekt.

Jessica Elofsson
Jessica Elofsson är är universitetslektor i pedagogik vid Linköpings universitet. Hon forskar om matematiklärande och undervisning i förskola, förskoleklass och grundskolans tidiga år.

Angelika Kullberg
Angelika Kullberg är är professor i ämnesdidaktik med inriktning mot matematik vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession på Göteborgs universitet. Forskningsintresset handlar främst om relationen mellan undervisning och elevers lärande.

Anna-Lena Ekdahl
Anna-Lena Ekdahl är universitetslektor i didaktik vid Jönköping University. Hon forskar om barns matematiklärande och hur lärare i samarbete med forskare utvecklar undervisningen.

Ulla Runesson Kempe
Ulla Runesson Kempe är är professor emerita i matematikdidaktik vid Jönköping University.

Maria Alkhede
Maria Alkhede är doktorand i Barn- och Ungdomsvetenskap vid Göteborgs universitet. Hon forskar om matematikundervisning i förskolan och i skolans tidiga år.