FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 68–84
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering

Orginalartikel

Jorryt van Bommel[1]*, Hanna Palmér[2] & Andreas Ebbelind[2]

Sammanfattning

I denna artikel presenteras en studie, genomförd i samarbete mellan forskare och förskoleklasslärare, där förskoleklasselever arbetade med division genom problemlösning och problemformulering. Data kommer från en aktivitet fördelad över två undervisningstillfällen. Undervisningen genomfördes i 11 förskoleklasser, med 205 elever . Vid problemlösning urskilde eleverna relationen mellan delar och helhet, storleken på varje del, att dela som division samt kontinuerlig och diskret mängd som aspekter av division. Även vid problemformulering synliggjordes dessa aspekter av division och aspekten att täljaren kan vara ett rationellt tal tillkom. Utöver uppgifter om division formulerade eleverna till exempel uppgifter med en liknande kontext (kakor) men med ett annat matematikinnehåll (till exempel subtraktion). Då det finns få studier om problemlösning och problemformulering med yngre elever bidrar denna studie med kunskap av värde för både (förskoleklass)lärare och forskare.

Nyckelord: problemlösning, problemformulering, förskoleklass, division, designforskning

Abstract

In this study, preschool-class students worked with problem solving and problem posing on division. Data comes from an activity divided into two sessions. The activity was planned in collaboration between preschool-class teachers and researchers and carried out in 11 preschool classes with 205 students. While solving problems, students distinguished the relationship between the parts and whole, the size of each part, dividing as division and continuous and discrete quantities as aspects of division. While posing problems, these aspects reappeared as well as the aspect that the numerator can be a rational number. Apart from problems on division, the students posed problems with a similar context (cookies) but a different mathematical content (e.g., subtraction). As there are few studies on problem solving and problem posing with younger students, this study contributes with knowledge of value to both (preschool class) teachers and researchers.

Keywords: Problem solving, Problem posing, Preschool class, Division, Design research

1 Högskolan Dalarna

2 Institutionen för matematik, Linnéuniversitetet

*Korresponderande författare:
Jorryt van Bommel
jvb@du.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 68-84
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23893
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67 Jorryt van Bommel m.fl.

Introduktion

Förmågan att använda matematisk kunskap för att lösa problem i vardagen är en av de åtta nyckelkompetenser som EU framhåller i livslångt lärande (EU, 2019).[1] Att matematik kan och bör användas för att lösa problem återspeglas även i den svenska läroplanen för grundskolan, där såväl problemlösning som problemformulering framhålls (Skolverket, 2022). Problemlösning är inget nytt i den svenska grundskolan men beskrivningarna av hur och varför elever ska arbeta med problemlösning har skiftat i styrdokumenten: från att elever ska lära sig matematik för att senare kunna lösa problem, via en beskrivning av problemlösning som ett innehåll att undervisa om, till dagens beskrivning av problemlösning som ett sätt att lära sig matematiska kunskaper (Wyndhamn m.fl., 2000). Liknande utveckling i läroplansskrivningar kan även ses internationellt (English & Sriraman, 2010).

Trots att problemlösning inte är något nytt i svensk skola finns det relativt få studier med fokus på problemlösning och problemformulering och speciellt få studier kopplade till tidiga skolår (Cai m.fl., 2015; English & Sriraman, 2010). De få studier som finns om problemformulering i tidiga skolår indikerar dock positiva resultat på såväl elevers kunskapsutveckling som på deras attityder till matematik (till exempel, Ebbelind m.fl., 2023; Ellerton m.fl., 2015; Palmér & van Bommel, 2018, 2020; van Bommel & Palmér, 2016). English och Sriraman (2010) framhåller att politisk styrning av matematikundervisning genom åren har tenderat att pendla mellan att framhålla antingen problemlösning eller basfärdigheter. Denna pendling tillsammans med ett ökat fokus på mät- och jämförbara kunskaper har bidragit till den begränsade forskningen om problemlösning, trots att problemlösning som sådan funnits länge i skolans styrdokument. Utifrån en genomgång av forskning om problemlösning framhåller de forskning med fokus på elevers lärande av matematikinnehåll i samband med problemlösning som extra viktigt. Speciellt saknas studier i form av interventioner där problemlösning och problemformulering designas och implementeras i aktuella verksamheter (Cai & Hwang, 2020; English & Sriraman, 2010; Palmér & van Bommel, 2020; Singer m.fl., 2013). Studier likt den som presenteras här ämnar bidra till att fylla detta tomrum.

Studien som presenteras i denna artikel är en del av ett flerårigt praktiknära forskningsprojekt som genomförs i samarbete mellan fem lärare i förskoleklass och tre forskare. Det övergripande syftet med forskningsprojektet är att undersöka möjligheter och begränsningar med undervisning i problemlösning och problemformulering med unga elever som kanske ännu inte kan läsa eller skriva. Det specifika syftet med denna artikel är att studera vilka aspekter av division som elever i förskoleklass urskiljer i samband med problemlösning och problemformulering. Undervisningen planerades i samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare, genomfördes av dessa lärare tillsammans med eleverna. Data analyserades av forskarna och förskoleklasslärare och forskare diskuterade sedan gemensamt dessa analyser och resultat. Följande frågor fokuseras på:

- Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de arbetar med en problemlösningsuppgift om division?
- Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de efter problemlösning om division ombeds att formulera en liknande uppgift?

1 De åtta nyckelkompetenserna (på engelska): Literacy competence, Multilingual competence, Mathematical competence and competence in science, technology and engineering, Digital competence, Personal, social, and learning to learn competence, Citizenship competence, Entrepreneurship competence och Cultural awareness and expression competence.

- Vilka likheter och skillnader finns mellan de aspekter som urskiljs av eleverna vid problemlösning respektive problemformulering?

Problemlösning

Enligt Lesh och Zawojewski (2007) blir en matematikuppgift en problemlösningsuppgift när den som ska lösa uppgiften behöver utveckla ny kunskap eller nya strategier för att lösa uppgiften. Vilka uppgifter som är problemlösningsuppgifter avgörs således av relationen mellan eleven och den aktuella uppgiften. Syftet med problemlösning är dels att elever ska utveckla kunskaper i problemlösning, dels att elever ska utveckla kunskap om olika matematikinnehåll. Enligt Stein med flera (2008) behöver en problemlösningsuppgift inte innebära en nedskriven uppgift i en matematikbok utan kan utgöras av en bredd av aktiviteter i en klassrumskontext som syftar till att elever ska ges möjlighet att utveckla kunskaper kring en viss matematisk idé eller strategi. Vid undervisning i problemlösning har läraren en viktig roll att välja eller konstruera en lämplig problemlösningsuppgift, samt att planera hur arbetet i elevgruppen ska organiseras. Att välja eller konstruera en problemlösningsuppgift innebär att välja vilken matematik som ska behandlas och vilka lösningsstrategier som ska vara möjliga, samt att relatera till hur problemet är anpassat till elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper.

Exempel på lösningsstrategier i problemlösning är att rita, söka mönster, arbeta baklänges, göra listor, dramatisera, göra tabeller, göra diagram, gissa och pröva, förenkla problemet och använda laborativt material (Lesh & Zawojewski, 2007). Ytterligare en strategi för att lösa problemlösningsuppgifter är att ställa frågor. I en studie av Legare med flera (2013) jämförs fyra-, fem- och sexåringars förmåga att ställa frågor i syfte att lösa en problemlösningsuppgift. De frågor eleverna ställde kategoriseras som inramande, bekräftande respektive ineffektiva för att därefter relateras till hur eleverna löste problemlösningsuppgiften i fråga. Inramande frågor bidrar till ny och relevant information som kan hjälpa att lösa uppgiften. Bekräftande frågor är frågor som redan har besvarats, och ineffektiva frågor är frågor som inte fångade användbar information för att lösa uppgiften. Resultaten visade positiva samband mellan inramande frågor och framgångsrik problemlösning. Vidare visar Legare med flera (2013) att elevers förmåga att generera relevant information genom att ställa frågor utvecklas före deras förmåga att använda den information deras frågor genererade för att faktiskt lösa uppgiften.

I en annan studie med sexåringar implementeras kollaborativt lärande i matematikundervisningen vilket gav positiv påverkan på elevernas problemlösningsförmåga (Tarim, 2009). Eleverna i studien blev bättre på att lyssna till andras idéer, dela med sig av sina egna idéer samt på att ta ansvar för gruppens gemensamma arbete. Läraren har dock fortfarande en viktig roll för framgången genom att sätta samman fungerande grupper, presentera uppgiften, erbjuda material, hjälpa elevgrupper med sitt arbete genom att ställa frågor samt genom att ge feedback på lösningar (Tarim, 2009). Tilläggas kan dock att elevuppgifterna i Tarims studie är mindre utmanande än de problemlösningsuppgifter som eleverna i den studie som presenteras i denna artikel möter. Liknande utmanande problemlösningsuppgifter implementeras dock i tidig matematikundervisning av Khalid med flera (2020) i syfte att utveckla elevers kreativa förmåga (flyt, flexibilitet, originalitet och genomarbetning). Resultaten av deras studie visar att elever som arbetar med utmanande problemlösningsuppgifter förutom att utveckla sin problemlösningsförmåga även utvecklar sin kreativa förmåga mer än elever i jämförelsegrupp som inte arbetar med problemlösning. Eleverna i studien arbetade i mindre grupper där de fick ta del av andras idéer och dela med sig av sina egna idéer. Detta bidrog till att matematikinnehållet blev intressant för eleverna samt att de i grupp blev mer självsäkra att försöka lösa uppgifter på olika kreativa sätt snarare än att finna enbart en lösning. Även Pehkonen med flera (2013) har studerat kreativitet i relation till problemlösning och då i relation till öppna problem i vilket de inkluderar, till exempel, problemlösningsuppgifter från vardagen, problemlösningsuppgifter med flera möjliga svar, problemlösningsuppgifter utan en specifik fråga, projektuppgifter, undersökningar samt formulering av egna uppgifter. I deras studie, kategoriseras elevernas lösningar utifrån kreativitet och resultaten visar att de öppna problemlösningsuppgifterna bidrar till kreativitet men också att lärarens inställning till problemlösning och öppna problem är väsentligt för framgångsrikt lärande hos eleverna.

Problemformulering

Problemformulering kan genomföras före, samtidigt som, eller efter problemlösning genom att eleverna generar nya uppgifter eller omformulerar uppgifter de arbetat med (Cifarelli & Sevim, 2015; Silver, 1994). Oavsett tidpunkt kan problemformulering ge elever ytterligare möjligheter att utveckla kunskaper om olika matematikinnehåll eftersom eleverna när de formulerar uppgifter bearbetar matematikinnehåll, utvecklar sin matematiska förståelse, sin förmåga till självreflektion samt sin problemlösningsförmåga (Chen m.fl., 2013; Cifarelli & Sevim, 2015). Utöver detta framhåller Klaassen och Doorman (2015) att problemformulering kan vara motivationsfrämjande då eleverna ges agens. I studier av problemformulering är eleverna dock oftast äldre än de sex år som gäller för eleverna i den här studien. Det finns ett fåtal svenska studier som visar att yngre elever som får formulera uppgifter dels lär matematikinnehåll, dels utvecklar positiva attityder till matematik (Ebbelind m.fl., 2023; Palmér & van Bommel, 2018, 2020; van Bommel & Palmér 2016). I studier med äldre elever (10–11 åringar) har en kombination av problemlösning och problemformulering i undervisning visats öka elevers motivation till matematik generellt och specifikt har det ökat elevers motivation för och kunskaper i problemlösning (Cifarelli & Sevim, 2015).

När elever ombeds formulera en egen uppgift utan ett förbestämt innehåll eller kontext benämns detta för problemformulering i en fri situation (Stoyanova & Ellerton, 1996). Det kan till exempel innebära att elever formulerar en uppgift som en kompis ska lösa. När elever ombeds formulera en uppgift till ett givet matematikinnehåll eller en given situation benämns detta för problemformulering i en semi-strukturerad situation (Stoyanova & Ellerton, 1996). Det kan till exempel vara när elever formulerar en uppgift som ska kunna lösas med addition eller att de ska formulera en uppgift utifrån en busstidtabell. Slutligen, när elever ombeds att omformulera en specifik uppgift benämns detta för problemformulering i en strukturerad situation vilket till exempel kan innebära att elever utifrån en temperaturtabell formulera en uppgift som handlar om temperaturskillnader (Stoyanova & Ellerton, 1996). I den studie som presenteras i denna artikel ombads eleverna att formulera en *liknande uppgift* till en klasskompis efter att ha arbetat med en problemlösningsuppgift om division. Således kom problemformulering efter problemlösning och det fanns en uppgift att referera till, vilket innebär problemformulering i en semi-strukturerad situation. I tidigare studier med sexåringar har sådan semi-strukturerad problemformulering visat att elever bearbetar och reflekterar över den ursprungliga uppgiften och därmed bearbetar dess matematiska innehåll ytterligare (Palmér & van Bommel, 2020, 2023).

Division

I en division (till exempel 12 /4) hanteras en helhet (12), delar som helheten ska delas in i (4) samt storleken på varje del (3). Förståelse för division innebär därmed att kunna urskilja relationen mellan delar och helhet samt storleken på varje del. Delning är ett mer generellt begrepp som syftar på handlingen att dela upp något i mindre delar eller grupper. En viss förståelse för delning har redan förskolebarn som framgångsrikt delar lika i vardagssituationer (Dehaene, 1997). Delning i sådana vardagssituationer är grunden för både division och bråkräkning (Dehaene, 1997) och ger barn en informell kunskap om division (Neuman, 1999). Division är den term som används i matematik och skiljer sig från delning på så sätt att delarna (kvoten) måste vara lika stora. Helheten (mängden som ska delas upp) kan även benämnas dividend. Delarna (mängden för att dela upp dividend) kallas för divisor och resultatet av divisionen (mängden i varje del eller antalet delar) är kvoten.

I vardagssituationer med yngre barn används vanligen begreppet dela i relation till det matematiska innehållet division (Correa m.fl., 1998; Empson, 1999; Matalliotaki, 2012). Förutom dela används även ord som fördela, dela upp och dela ut på olika sätt i olika sammanhang. Situationer som är vanliga för yngre barn är att dela ett föremål, som ett äpple, i två halvor, men även att dela ett visst antal föremål (bilar) bland sig själv och en kompis. När det gäller *dela ut* är en vardaglig situation att dela ut föremål, till exempel när elever ska få ett varsitt papper att skriva på – ett ark per person. Det kan även handla om att fördela föremål mellan alla elever tills föremålen tar slut, som på rasten när leksakerna inte räcker till alla. I det sist nämnda fallet uttrycks ofta att eleverna ska *dela med sig* i avsikten att de ska turas om eller ge bort några leksaker. Situationer likt dessa ger olika ingångar till det matematiska innehållet division. I några av fallen innebär 'dela' exakt detsamma som division, i andra fall menar vi något annat men vi använder ändå liknande begrepp. En studie i svensk förskoleklass med fokus på problemlösning kopplat till bilderböcker visar att eleverna hade svårt att skilja mellan division som matematisk operation och som en praktisk aktivitet (Pramling & Pramling Samuelsson, 2008; Sumpter & Hedefalk, 2023). För elever kan det vara svårt att avgöra vad som är en aspekt av division och vad som enbart hör till den specifika dela-situationen. Att kunna tolka vad som avses med ordet dela specifikt i relation till division är därmed en aspekt som elever behöver urskilja.

En annan aspekt av division är att delarna ska vara lika. Lika i matematisk betydelse innebär lika mycket, när en viss mängd ska delas ska de olika delarna vara lika mycket av mängden, till exempel gällande längden, arean eller volymen. Delarna kan men behöver inte vara lika i form eller antal. De flesta tre- och fyra-åringar har utvecklat förståelse för tals kardinalitet men har svårare att urskilja och resonera om delmängder (Dehaene, 1997). I vardagssituationer använder barn vanligen ett-till-ett-delning tillsammans med kunskaper i addition och subtraktion för att lösa delningssituationer (Correa m fl., 1998; Parmar, 2003). Att kunna skilja mellan lika mycket och lika många är en viktig aspekt när det gäller division där divisionen inte resulterar i ett heltal. När treåringar arbetade med divisionsproblem utan rest (9/3) gick det bra att dela lika, men när de skulle dela 9 kakor på 4 uppstod en utmaning i om det ska vara lika stora bitar eller lika många bitar (Palmér, 2008).

Ibland är det svårt att dela objekten i en mängd vilket har att göra med division av diskreta eller kontinuerliga mängder. När vi dividerar 8 med 4 är svaret 2, vilket innebär att om 4 personer ska dela på 8 pennor, får de 2 pennor var. Dividerar vi däremot 10 med 4 är svaret 2,5. För pennorna blir det en märklig situation, att dela en penna mitt itu, men om vi tar en kontinuerlig, icke-diskret kontext, där antalet kan delas i mindre delar, blir svaret 2,5, två och en halv korv, två och en halv köttbulle, två och en halv hinkar med sand, och så vidare. Det är viktigt att elever kan skilja mellan diskreta och kontinuerliga mängder i relation till division, vilket inte handlar om att kunna begreppen utan att kunna urskilja när en mängd består av 'hela' delar som inte kan delas (diskret mängd) respektive av delar som kan delas i mindre bitar eller mängder (kontinuerlig mängd).

Inom division skiljs mellan innehålls- och delningsdivision . En division som 12/3 kan lösas med både delnings-, och innehållsdivision, men lägger vi till en kontext bestämmer kontexten vilken typ av division det är. Att fördela 12 tennisbollar i rör med plats för tre tennisbollar i varje innebär innehållsdivision, medan att fördela 12 tennisbollar mellan tre personer innebär delningsdivision. Redan 1955 skrev Gunderson (1955) om hur elever arbetar olika med dessa två divisioner där delningsdivision ställde till större problem än innehållsdivision. Senare har nya studier dock visat motsatsen (Ching & Wu, 2021; Frydman & Bryant, 1988) vilket förklaras med att delningsdivision följer den vardagliga erfarenheten av att dela lika och fördela lika (se Correa m.fl., 1998; Empson, 1999; Matalliotaki, 2012). Om elever inte får möta innehållsdivision får de dock stora bekymmer när de möter uppgifter likt 12/0,5. Detta är dock inte nödvändigtvis en aspekt som elever behöver urskilja utan handlar snarare om vilka situationer som erbjuds i undervisning så att båda typer av division förekommer.

Teori

I studien används variationsteori för analys av vilka aspekter av division som eleverna urskiljer, i arbetet med problemlösning respektive problemformulering. Variationsteori utvecklades av Ference Marton (till exempel Marton, 2014) och har använts i många studier, speciellt inom matematikdidaktik (se till exempel följande artiklar publicerade i Forskul: Björklund & Runesson Kempe, 2020; Hansson, 2019; Stjernlöf & Fred, 2014). Snarare än att kvantifiera utfallet av lärande fokuserar variationsteori på kvalitativt olika sätt att erfara eller förstå ett fenomen. Teorin används dels för design och analys av undervisning med fokus på att erbjuda elever nödvändiga lärandemöjligheter, dels för att analysera och beskriva elevers förståelse av ett fenomen (Marton & Booth, 1997). Fenomenet benämns lärandeobjektet, vilket kan vara ett innehåll eller en förmåga som undervisas om under en eller flera lektioner. Variationsteori utgår ifrån att ett fenomen kan förstås genom att urskilja specifika aspekter, specifika för just det fenomenet. När elever urskiljer nya aspekter av lärandeobjektet sker ett skifte i hur de förstår fenomenet (Marton, 2014; Marton & Pang, 2006).[2] Till exempel, i relation till lärandeobjektet fyrhörningar, behöver elever urskilja olika aspekter för att kunna särskilja olika fyrhörningar såsom rektangel, romb och kvadrat. En sådan aspekt är sidornas längd som möjliggör förståelse för relationen mellan kvadrater och rektanglar. En annan aspekt är vinklarnas storlek som möjliggör förståelse för relationen mellan romber och kvadrater.

I den här studien är lärandeobjektet division med fokus på de aspekter av division eleverna urskiljer när de arbetar med problemlösning och problemformulering. Hur en elev förstår division kommer därmed att vara avhängigt vilka aspekter eleven urskiljer, både i problemlösning och problemformulering. Det handlar inte om specifika termer (så som täljare, nämnare, dividend, kvot) utan om en förståelse för innebörden av dessa begrepp i relation till fenomenet division. I division är relationen mellan delar och helhet samt storleken på varje del väsentligt att urskilja. För yngre elever är även begreppet dela som divisionen en aspekt att urskilja. Eleverna behöver även kunna skilja mellan kontinuerliga och diskreta mängder att dela upp, det vill säga innebörden av, och inte användandet av, begreppen. Variationsteori gör det möjligt att fokusera på vilka av dessa aspekter en elev urskiljer och se detta som en indikation på hur eleven förstår fenomenet division. Lärande förstås som det som sker när elever kan urskilja nya och nödvändiga aspekter av division.

Eftersom problemformulering möjliggör en annan inblick i elevernas matematiska förståelse än vad problemlösning gör (Cai & Hwang, 2020) erbjuder undervisningskontexten i den här presenterade studien en rik kontext att analysera.

2 För en mer utförlig beskrivning av variationsteori se till exempel Marton (2014), Marton och Pang (2006) eller Marton och Booth (1997).

Metod

Som tidigare har nämnts är fokus i detta praktiknära forskningsprojekt möjligheter och begränsningar med undervisning i problemlösning och problemformulering. Studien genomfördes i enlighet med designforskning, vilket är mångfacetterat när det kommer till tillvägagångssätt, definitioner och kriterier att uppfylla. Skillnaderna till trots är en gemensam ambition i designforskning att i cykler utveckla och beforska undervisning av god kvalité på den plats där undervisningen sker. Att undervisning är del av forskningsprocessen medför att studierna genomförs i samarbete med verksamma lärare (Bakker, 2018). Den designstudie som presenteras i denna artikel bygger på ett flerårigt samarbete mellan forskare och lärare i förskoleklass där roller och ansvarsfördelning successivt har förhandlats och omfördelats (Ebbelind m.fl., 2023; Palmér & van Bommel, 2021). I den designcykel som presenteras här genomförde förskoleklasslärarna lektioner som gemensamt planerades av forskare och förskoleklasslärare. Designcykeln avslutades med en gemensam reflektion mellan forskare och förskoleklasslärare kring erfarenhet från såväl genomförande som analys. Eftersom dessa förskoleklasslärare har medverkat i det praktiknära forskningsprojektet under flera år, har de gedigen erfarenhet av matematikundervisning genom problemlösning och problemformulering. Eleverna i dessa klasser hade innan den här presenterade designcykeln deltagit i problemlösning och problemformulering flertalet gånger.

Deltagare och forskningens kontext

Undervisningskontexten i studien utgörs av den svenska förskoleklassen. Elva förskoleklasser inkluderades i den designcykel som presenteras i denna artikel. De fem deltagande lärare är alla utbildade förskollärare och har, som ovan beskrivits, deltagit i flera av de tidigare designcyklerna. De var därmed väl förtrogna med både problemlösning och problemformulering samt med designforskning och studiens målsättning. I enlighet med etiska riktlinjer för forskning (Vetenskapsrådet, 2017) informerades elevernas vårdnadshavare om studien och gav sitt samtycke till sina barns deltagande. Eleverna informerades om studien av sina lärare. Interventionen utgjorde en integrerad del av ordinarie undervisning där samtliga elever deltog men data samlades enbart in från elever vars vårdnadshavare samtyckt till deltagande. Samtliga data förvarades enligt gängse riktlinjer för datahantering, det vill säga i kassaskåp samt inskannat lagrat på lösenordskyddad server. Totalt deltog 205 elever från elva klasser på fem olika skolor.

Beskrivning av de två lektionerna och data

Två lektioner ingick i designcykeln. Den första lektionen fokuserade på problemlösning. Eleverna delades in i grupper (68 grupper) om tre elever i varje grupp (med undantag för en grupp på fyra elever). Varje grupp fick 15 kakor i lera där den första uppgiften var att dela kakorna lika mellan sig i gruppen[3]. När eleverna fördelat kakorna mellan sig meddelade förskoleklassläraren att de också ville delta och eleverna fick då i uppgift att dela de 15 kakorna lika mellan fyra personer. Detta innebär division med rest, där några kakor inte blir fördelade, eller en division, där några av kakorna behöver delas i bitar. Det är i denna del av uppgiften som problemlösning uppstod eftersom ett sådant delningsförfarande sällan är känt på förhand för sexåringar.

Under denna del av lektionen fotograferade förskoleklassläraren elevernas arbete samt förde anteckningar utifrån gemensamt framtagna observationspunkter, som fokuserade på hur eleverna gör för att divisionen ska bli lika. Lärarna antecknade om eleverna fördelade en eller flera kakor i taget, om delningen blev (matematiskt) lika samt om, och i så fall hur, eleverna kontrollerade att delningen blev lika. Lärarna observerade även likheter och skillnader mellan elevers strategier för lösning i de två olika situationerna (15/3 respektive 15/4). I relation till elevernas

3 Gruppen med fyra elever fick instruktionen att dela kakorna mellan tre personer i gruppen.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

arbete med situationen 15/4 observerades även om eleverna började om från början genom att samla kakorna i en hög eller om de genomförde en omfördelning av resultatet från den första delen. Därutöver observerades om eleverna var noga med att delarna i de delade kakorna blev lika stora eller inte.

Den andra lektionen fokuserade på problemformulering. Eleverna påmindes om den uppgift de hade arbetat med under föregående lektion och uppmanades att formulera en liknande uppgift till en vän. Denna gång arbetade eleverna individuellt. Förskoleklassläraren hjälpte eleverna med skrivandet i de fall det behövdes. Totalt formulerades 210 uppgifter av 205 elever. Fyra uppgifter innehöll ingen fråga utan var påståenden eller en berättelse och har därmed utelämnats i analysen.

Analys

Den första delen av analysen fokuserade på den första forskningsfrågan: Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de arbetar med en problemlösningsuppgift om division? Här kodade två av forskarna initialt elevernas lösningar (68 grupper) utifrån urskilda aspekter (Marton, 2014). De aspekter som fokuserades på var de som hade identifierats i tidigare forskningsstudier: relationer mellan delar och helhet, storleken på varje del, begreppet dela som division samt kontinuerlig och diskret mängd (tabell 1). Utifrån denna kodning genomförde den tredje forskaren en verifierande kodning.

Tabell 1
Aspekter av division och operationaliseringen vid analys av elevernas arbete med problemlösning.

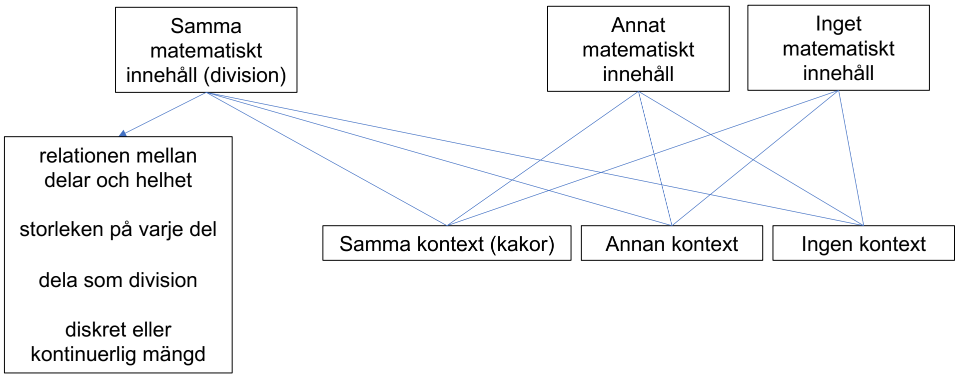
Aspekt	Operationalisering
relationen mellan delar och helhet	blir divisionen lika och kontrollräknar eleverna?
storleken på varje del	lika mycket vs lika många (ej aktuellt vid 15/3)
dela som division	syns fördela, dela och dela ut i strategierna för divisionen?
diskret eller kontinuerlig mängd	delas kakorna eller blir det rest? (ej aktuellt vid 15/3)

Not. Aspekterna används vid analys av elevernas arbete med problemlösning.

Den andra delen av analysen fokuserade på den andra forskningsfrågan: Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de efter problemlösning om division ombeds att formulera en liknande uppgift? Samma aspekter som ovan (tabell 1) användes för analys men i enlighet med tidigare studier om problemformulering fokuserades även på uppgiftskontexten (kakor) och det matematiska innehållet i uppgifterna (Carrillo & Cruz, 2016; Palmér & van Bommel, 2020; van Bommel & Palmér, 2022). Med utgångspunkt i Carrillo och Cruz (2016) utformades följande klassificeringsschema (figur 1).

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

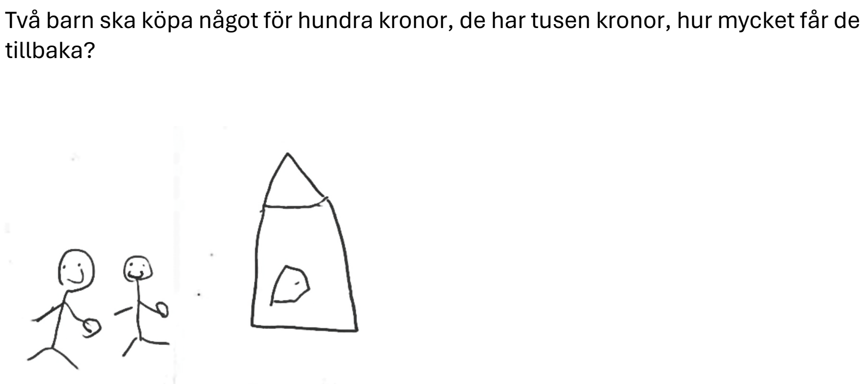
Figur 1
Klassificeringsschema för analys av elevernas egna formulerade uppgifter



Det inledande steget i detta schema fokuserade på innehållet i elevernas egna formulerade uppgifter: uppgifter baserade på samma matematiska innehåll (division) som den ursprungliga uppgiften (exempel figur 2), uppgifter baserade på ett annat matematiskt innehåll än den ursprungliga uppgiften (exempel figur 3) och uppgifter utan matematiskt innehåll (exempel figur 4).

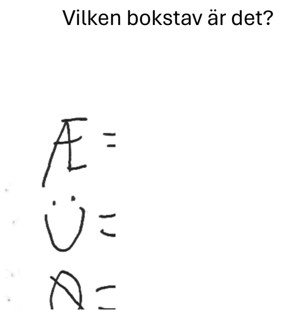
Figur 2
Exempel på en elevuppgift med samma matematiska innehåll som den ursprungliga uppgiften

Figur 3
Exempel på en elevuppgift med annat matematiskt innehåll som den ursprungliga uppgiften



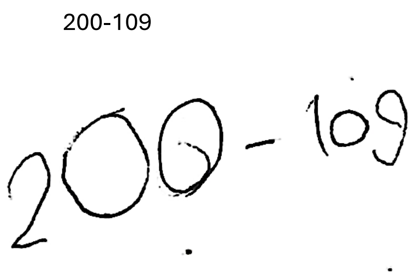
forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

Figur 4
Exempel på en elevuppgift utan matematiskt innehåll



Därefter gjordes ytterligare en klassificering för att identifiera kontexten i de formulerade uppgifterna: om kontexten är identiskt med den ursprungliga uppgiften (exempel figur 2), eller om en annan kontext (exempel figur 3), eller om ingen kontext alls (exempel figur 5) presenteras i uppgiften. Sedan analyserades divisionsuppgifterna i relation till de aspekter som framkommit i den första delen av analysen.

Figur 5
Exempel på en elevuppgift utan kontext



Slutligen, för att besvara den tredje forskningsfrågan gällande likheter och skillnader mellan de aspekter som urskiljs av eleverna vid problemlösning respektive problemformulering jämfördes resultaten från den första och andra analysen.

Resultat

I denna del presenteras resultatet utifrån respektive forskningsfråga.

Aspekter av division som elever urskiljer vid problemlösning

I den första uppgiften (15/3) visade grupperna att de kunde urskilja aspekten relation mellan delar och helhet, till exempel genom att de kontrollräknade om alla har fått lika många kakor. Ibland kontrollerade eleverna genom att en elev i taget fick räkna sina kakor och säga högt hur många de har. I andra fall räknade en elev allas kakor eller alla elever alla kakor tillsammans för att se om alla hade fått fem kakor. Aspekten relation mellan delar och helhet blev extra tydlig i de grupper där alla elever inledningsvis tog några kakor var och där de sedan vid kontrollräkningen började omfördela tills alla elever har fått lika många kakor. I några grupper sa en elev direkt att svaret är fem och delade sedan ut fem kakor i taget till varje elev. Ibland kontrollräknades detta av en annan elev i gruppen som eventuellt inte från början visste att detta var den korrekta lösningen (relation mellan delar och helhet).

Så länge kakorna är hela är aspekten storleken på delarna inte möjligt att urskilja. Tre grupper valde dock att dela kakorna i bitar innan dessa delar började att delas ut. Figur 6 visar några av kakorna som delades av eleverna. Bitarna var inte alltid lika stora men vid kontrollräkning var det antal bitar som är i fokus, vilket tyder på att aspekten storleken på delarna inte urskildes av dessa elever i denna situation. Vidare kan vi konstatera att dessa grupper inte urskilde aspekten dela som division i första skedet när de delade kakorna i halvor.

Figur 6
Elevlösning där kakorna har delats i halvor

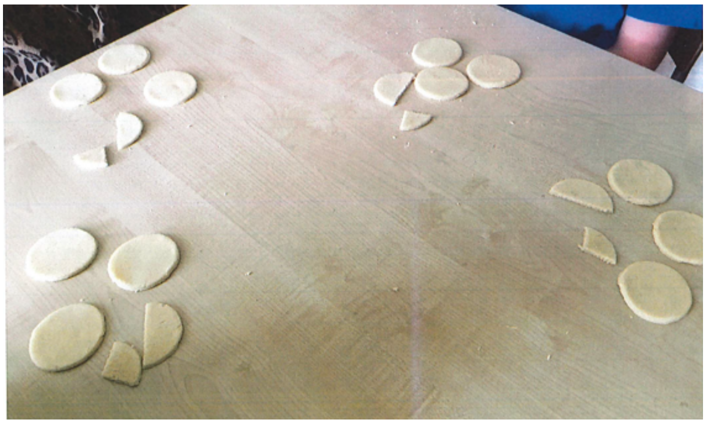
Vid nästa del av uppgiften (15/4) valde alla grupper att se kakorna som icke-diskreta, (aspekten diskret eller kontinuerlig mängd) vilket innebar att kakorna kunde delas itu och att inga kakor lämnades ofördelade. Därmed blev aspekten storleken på delarna aktuellt för alla grupper eftersom (i alla fall) några kakor behövde delas. Ungefär hälften av grupperna (30 av 68) började om från början, det vill säga de lade sina kakor tillbaka i mitten på bordet och börjar sedan att dela kakorna mellan sig. Helheten, 15 kakor, blev därmed synlig och delningen skedde utifrån denna helhet. Även aspekten dela som division blev synligt när eleverna hanterade 15 som helheten och påbörjade sin (för)delning av kakor. De andra 38 grupperna omfördelade sina kakor och gav några i taget till förskoleklassläraren som nu skulle vara med och dela. Helheten kunde då erfaras som den helhet man hade framför sig, fem kakor. Grupperna som valde att omfördela hanterade inte 15/4 som en division men ville fördela kakorna lika. Aspekten dela som division blev därmed inte synligt i dessa grupper.

Eleverna visar i denna del av uppgiften olika strategier att (för)dela kakorna. Vissa grupper (20) gjorde en lösning att alla ska ha lika många kakbitar var. Därmed hade de inte urskilt aspekten att storleken på varje del måste vara lika. Merparten av grupperna (48) gör en lösning där alla skulle ha lika mycket kaka och urskilde därmed aspekten storleken på varje del. Svaret (3 och ¾ dels kaka) innebar för vissa grupper 3 hela kakor per person, en halv kaka och en fjärdedels kaka (figur 7) och för andra grupper femton fjärdedels kaka (figur 8). 15/4 representerades därmed på två olika sätt: 15/4 = 3 + ½ + ¼ och 15/4 = 15 fjärdedelar

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

Figur 7

Elevlösning av 15/4, där varje person får tre hela, en halv och en fjärdedels kaka



Figur 8

Elevlösning av 15/4, där varje person får femton fjärdedelar

Not. Figuren visar fyra grupper med kakor, där varje grupp av kakor består av femton fjärdedels kak-bitar.

Aspekter av division som elever urskiljer vid problemformulering

Av de 206 uppgifter som analyserades handlade 122 uppgifter om division, 47 om ett annat matematikinnehåll och 37 uppgifter innehöll ingen matematik. Eleverna skapade 79 uppgifter där kakor utgjorde kontexten medan en annan kontext användes i 116 uppgifter. I 11 uppgifter användes ingen kontext (tabell 2).

Tabell 2

Elevernas formulerade uppgifter klassificerade utifrån innehåll och kontext.

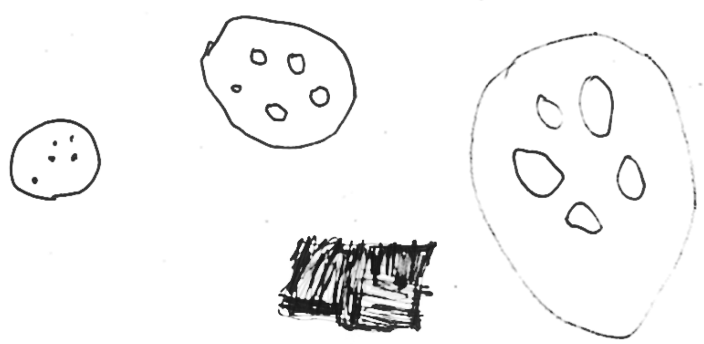
	Matematik		Ingen matematik	Total
	Division	Annan		
Kakor	54	15	10	79
Annan kontext	67	24	25	116
Ingen kontext	1	8	2	11
Total	122	47		
	169		37	206

De 122 uppgifter som handlade om division analyserades med avsikt på aspekter av division. Aspekten relationen mellan delar och helhet synliggjordes explicit i 85 uppgifter där eleverna i uppgiften påtalade att det ska vara rättvist, att alla ska få lika mycket eller lika många. En av eleverna gav även själv en lösning till uppgiften där eleven visade att den urskiljer aspekten att divisionen kan ha rest, samt aspekten att hela objekt behöver delas. I uppgiften skulle två personer dela på ett udda antal kakor och eleven föreslog sedan att de behövde baka en extra kaka.

Några av eleverna formulerade uppgifter där aspekten som rör storleken på delarna medvetet varierar. Till exempel ritade en elev tre fat med fem bullar på varje fat som skulle delas mellan mamma, pappa och barnet (figur 9). Storleken på faten och bullarna varierade och eleven berättade att pappa får de stora bullarna (till höger i figur 9), mamma de mindre (fatet i mitten i figur 9) och barnet de minsta bullarna (fatet till vänster i figur 9). Eleven sa sedan ’det är rättvist’.

Figur 9

Exempel på elevuppgift där storleken på delarna varierar



Not. Figuren visar tre fat med fem bullar på varje fat. Faten har tre olika storlekar och bullarna som ligger på faten korresponderar i storlek med faten.

En annan elev formulerade följande uppgift till en bild med fyra kakor (kex): ”Hur ska man göra för att den ena ska få 3 och den andra 5 kex? ”. Här har eleven urskilt att helheten kan delas i mindre delar. Däremot är de fyra kakorna som ska delas inte lika stora vilket innebar att eleven inte visade att den har urskilt aspekten att storleken på varje del ska vara lika.

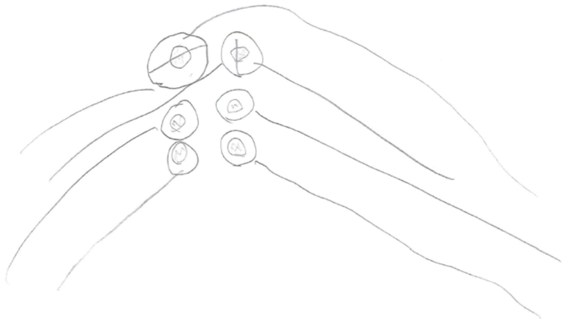
I en av elevernas formulerade uppgifter ska två personer dela på fyra karameller. När en annan elev, som inte har formulerat uppgiften, påpekade att karamellerna inte är lika stora fick den som svar: ”jag bryr mig inte, det är två stycken”. Här ser vi en skillnad mellan hur aspekten storlek på varje del urskildes av dessa två elever.

Eleverna varierade värde på både täljaren och nämnaren i sina formulerade uppgifter. I problemlösningsaktiviteten var täljaren 15 och nämnaren 3 respektive 4. I de formulerade uppgifterna valde eleverna olika antal för helheten och delarna. Några av eleverna formulerade uppgifter där täljaren hade ett kontinuerligt värde (aspekten diskret eller kontinuerlig mängd), till exempel när två personer ska dela på fyra hela och fyra halva kakor. Eleven ritade fyra hela kakor och fyra halva kakor (figur 10), ritade sedan sin lösning genom att dra streck från kakorna till vänster (person 1) och höger (person 2) och berättade att båda får två hela kakor och två halva kakor (figur 10).

Figur 10

Exempel på en elevuppgift där täljaren har ett kontinuerligt värde

Fyra hela och fyra halva kakor ska delas på två personer



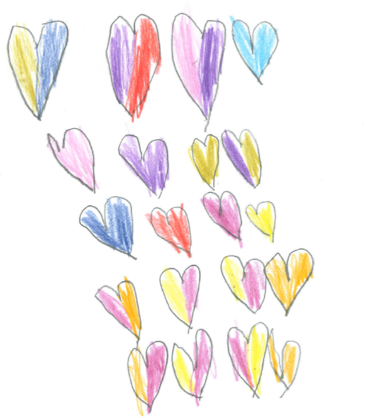
Not. Figuren visar fyra hela kakor och två kakor som är delade i mitten.

Att svaret inte behöver vara ett naturligt tal synliggjordes i problemlösningsaktiviteten (15/3 och 15/4) där 44 elever formulerar en uppgift där svaret var ett rationellt tal (och icke naturligt). Här såg vi olika typer av uppgifter, till exempel ”Tre gubbar ska dela på 14 kakor, hur mycket får de var?”. Men även berättelser som liknar originalproblemet där kakorna först ska delas mellan tre personer och sedan mellan fyra personer (figur 11). Eleverna som formulerade problemet säger att det kan bli ”jämnt eller ojämnt” och att hjärtan kan delas ”i halvor om det inte blir jämnt”.

Figur 11

Exempel på en elevuppgift där svaret inte är ett naturligt tal

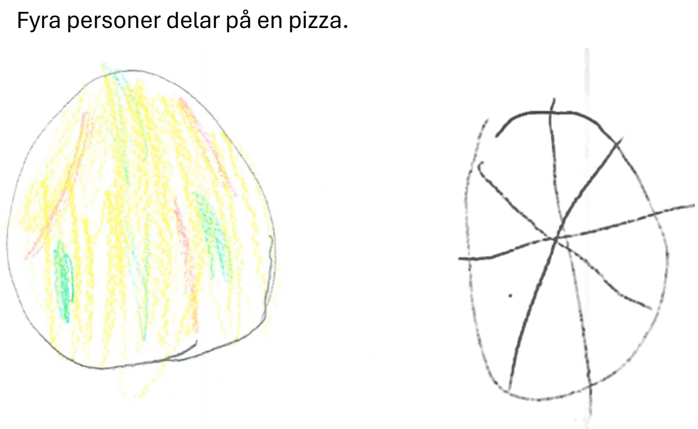
Tre barn ska dela lika på hjärtan, när de är färdiga kommer ett till barn som också vill ha. De ska dela ut igen. Det kan bli ett jämnt eller ojämnt tal. Om det blir ojämnt vad gör de då? Svar: de får dela i halvor om det inte blir jämnt.



En elev formulerade uppgiften att fyra personer delar på en pizza (figur 12). När eleven själv löste pizza-uppgiften valde eleven att dela in pizzan i åtta bitar och ändrar därmed problemet från 1/4 till 8 /4 och svarar ’två bitar var’.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

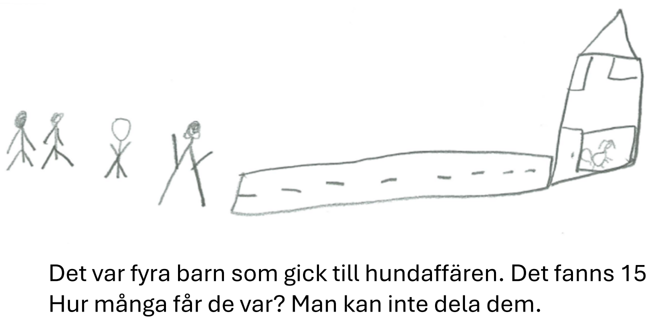
Figur 12
Exempel på en elevuppgift där svaret inte är ett naturligt tal



Not: Bilden visar en pizza som hör till elevens formulerade uppgift (vänster) samt en pizza delad i åtta bitar som hör till elevens lösning på sin uppgift (höger).

Det förekom också formulerade uppgifter där helheten inte gick att dela. Ibland löste eleverna detta genom att säga att man behöver baka en bulle till eller kan köpa en till kaka. I exemplet nedan har eleven formulerat en uppgift om hundar och påpekade själv att hundar inte kan delas (figur 13).

Figur 13
Exempel på en elevuppgift där helheten inte går att dela



Not. Figuren visar fyra barn, en gata och en hundaffär.

Uppgifterna som hade division som matematiskt innehåll medför att aspekten dela som division har urskilts. Det finns dock exempel där eleverna inte har urskilt denna aspekt, till exempel ”Dela kakorna på mitten, hur många halvor blir det?” (figur 14). I detta exempel (som klassificerades som annan matematik, addition) blev det tydligt att aspekten dela som division inte har urskilts.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

Figur 14
Exempel på en elevuppgift med addition som matematiskt innehåll

Likheter och skillnader mellan aspekter vid problemlösning respektive problemformulering

När eleverna arbetade med problemlösning urskilde de relationen mellan delar och helhet och storleken på varje del som aspekter av division. Kakorna sågs av alla grupper som en kontinuerlig mängd och kakor delades itu för att kunna svara på 15/4. När eleverna därefter blev ombedda att formulera en liknande uppgift återkom dessa aspekter, mestadels formulerade som divisionsuppgifter. Det innebar att eleverna i samband med problemformuleringen fick möjlighet att ytterligare bearbeta dessa aspekter av division. När eleverna formulerade egna liknande uppgifter var de fria att välja de tal de ville använda och några av eleverna valde att utgå från kontinuerliga mängder. Utöver de aspekter som återkom vid problemformulering förekom även en liknande kontext men där uppgifterna hade ett annat matematikinnehåll. Eftersom eleverna ombads att formulera en liknande uppgift kan detta tyda på att dessa elever fokuserade på uppgiftens kontext framför matematikinnehållet i samband med problemlösningen.

Att uppgifter om division skulle resultera i *lika* påpekas ibland explicit av eleverna genom att de använder ordet lika i frågan och ibland implicit när frågan löses av eleven. I några fall är det dock inte viktigt att det är lika stora bitar. Exemplet när pappan får de största bullarna, mamman de mellanstora och barnet de minsta innebär en annan typ av rättvisa (figur 9).

Ibland gjorde eleverna frågan om division svårare genom att använda rationella tal eller genom att ställa en mer komplicerad fråga eller en mer reflekterande fråga, till exempel hur ska du göra när det inte går jämnt ut? Problemformulering erbjöd elever därmed möjlighet att visa vad de kan på annat sätt än problemlösning eftersom eleverna gavs större autonomi i problemformulering.

Diskussion

Syftet med designforskning är att i samarbete mellan forskare och lärare i klassrumskontext utveckla teorier som kan användas för att informera och vägleda undervisnings- och lärandepraktiken (Bakker, 2018). Eftersom vi här enbart presenterar en designcykel utvecklas ingen teori men slutsatser av värde för undervisnings- och lärandepraktiken kan dras. I designcykeln blev eleverna ombedda att först lösa en problemlösningsuppgift i grupp för att sedan formulera en liknande uppgift individuellt. När eleverna formulerade uppgifter blev det synligt vilka aspekter från den ursprungliga problemlösningsuppgiften som återspeglades i de uppgifter som eleverna själva formulerar. De uppgifter som eleverna formulerade ger därmed lärare insikter hur elever tolkar den ursprungliga problemlösningsuppgiften och vad de urskiljer i relation till det matematiska innehållet (Carrillo & Cruz, 2016; Palmér & van Bommel, 2020). Att följa upp problemlösning med problemformulering, och då be eleverna att formulera liknande uppgifter, ger därmed elever möjligheter till fördjupat lärande och samtidigt läraren insyn i detta lärande. I relation till matematikundervisning i förskoleklass erbjuder problemformulering elever autonomi. Det innebär att eleverna i stället för att söka information får välja och ge information och i stället för att svara på frågor är det de själva som ställer självvalda frågor. Vidare möjliggör problemformulering differentiering där vissa elever formulerar mer komplexa frågor eller reflekterande frågor, till exempel: Hur ska du göra när det inte går jämnt ut? Givetvis är det inte så att alla elever utmanar sig själva men möjligheten finns.

Det specifika syftet med designcykeln som presenterats i artikeln var att studera vilka aspekter av division som elever i förskoleklass urskiljer i samband med problemlösning och problemformulering. I resultatdelen kan vi följa hur eleverna i problemlösning urskilde aspekterna relationen mellan delar och helhet, storleken på varje del, dela som division samt kontinuerliga och diskreta mängder. När eleverna därefter blev ombedda att formulera en liknande uppgift återkom dessa aspekter i de uppgifter som klassificerades som divisionsuppgifter. Dessutom tillkom aspekten att täljaren inte behöver vara ett naturligt tal där formulerade uppgifter med rationella tal i täljaren förekom. Därutöver återkom till exempel uppgifter med en liknande kontext men ett annat matematikinnehåll.

När elever likt i denna problemlösning arbetar i grupp ges de möjlighet att lyssna till andras idéer, dela med sig av sina egna idéer samt ta ansvar för gruppens gemensamma arbete vilket framhålls som framgångsfaktorer i problemlösning (Tarim, 2009). Vad resultaten i denna studie indikerar är dock att eleverna i samma grupp urskiljer olika aspekter av matematikinnehållet i den gemensamma problemlösningen. Denna indikation bygger på den stora variation i elevernas formulerade uppgifter där 47 uppgifter innehöll annan matematik och 37 uppgifter ingen matematik. Antalet formulerade uppgifter som inte innehöll matematik sticker ut i jämförelser med tidigare designcykler i vår studie där eleverna har arbetat med andra matematikinnehåll (mätning, tredimensionell geometri) där det varit ytterst få elever som inte formulerade matematikuppgifter (se Palmér & van Bommel 2020, 2023). Vid andra problemlösningstillfällen arbetade eleverna i par. I den här presenterade designcykel arbetade eleverna i grupper av tre elever utifrån problemlösningsuppgiftens formulering (15 kakor fördelas på 3 personer). Ett möjligt alternativ upplägg för att eleverna ska kunna arbeta i par, skulle vara att representera de tre personerna i problemlösningsuppgiften med till exempel dockor så att elever kan arbeta i par både vid problemlösningsuppgiften och vid problemformuleringen. Att klargöra huruvida det var matematikinnehållet division eller arbetsformerna som påverkade det stora antalet icke-matematikuppgifter kräver dock vidare studier.

Ett generellt antagande som beskrivs i början på denna artikel är att problemlösning och problemformulering är viktiga i tidig matematikundervisning. När vi här fokuserar på division som matematikinnehåll, och när förskoleklasslärarna genomför den gemensamt planerade undervisningen, kan vi konstatera att rika möjligheter för bearbetning av såväl det matematiska innehållet som kontextburna erfarenheter skapas . Detta är i linje med tidigare designcykler. Resultaten visar sammantaget att ett arbete med problemlösning och problemformulering i förskoleklass kan ge elever möjlighet att i linje med EU:s nyckelkompetenser (EU, 2019) utveckla såväl matematikkunskaper som problemlösningsförmåga. Samtidigt som studien erbjöd situationer som förberedde eleverna för att lösa problem i vardagen är det dock vardagen som ibland utmanar den matematiska korrektheten, eftersom elevers vardagserfarenheter av delning inte alltid är överförbara in i matematiska sammanhang (se även Correa m.fl., 1998; Empson, 1999; Neuman, 1999). Ett tydligt exempel på detta i resultatet är distinktionen mellan att få lika mycket eller lika många där det i division är viktigt att delarna har samma storlek medan det i vardagssituationer kan uppstå tillfällen där antal delar är det viktiga.

För att komma åt aspekten relationen mellan delar och helhet behöver eleverna på något sätt kontrollräkna. Kontrollräkning erbjuder eleverna att engagera sig i frågan om kakorna är rättvist fördelade. Att det ska vara rättvist, och vad som är rättvist är två saker som är centrala i elevernas diskussioner. Eleverna verkar tolka rättvist med att det ska vara ”lika”. Att det ska vara ”lika” påpekades ibland explicit genom att använda ordet lika i den formulerade frågan men även implicit när formulerade uppgifter löstes av elever. Vad som är rättvist kan dock skilja något, ofta beroende på erfarenhet, som en av eleverna också påpekade kan rättvist i vardagen vara när de vuxna får mer än barn. I några fall var det därmed inte viktigt att det är lika stora bitar, till exempel att pappan får de största bullarna, mamman de mellanstora och barnet de minsta. Om det skulle bli delar över kan de tilldelas någon som är extra hungrig, någon som saknas eller någon som inte fick tillräckligt mycket förra gången. Det finns tydligt en annan form av rättvisa vilket kan försvåra lösandet och formulerandet av uppgifter när kakorna som kontext tydligt urskildes från ursprungsuppgifterna. Även om kak-kontexten inte är en aspekt för det matematiska innehållet division tycks kontexten för några av eleverna möjliggöra och för andra stå i vägen för att urskilja aspekter av division.

Sammantaget ger studiens teoretiska val (Marton, 2014) inte bara inblick i hur elever urskiljer, differentierar och slutligen sammanför nödvändiga aspekter av ett lärandeobjekt division. Studien tillför även viktig kunskap om problemlösning och problemformulering generellt och specifikt mot skolans tidigare år och hur studier innehållande problemlösning och problemformulering kan designas och implementeras i aktuella verksamheter (Cai & Hwang, 2020; English & Sriraman, 2010), något som till stor del saknas i såväl nationell som internationell forskning (Palmér & van Bommel, 2020; Singer m.fl., 2013).

Avslutningsvis några reflektioner kring studiens genomförande i relation till implementering i andra förskoleklasser. Som nämnts planerades undervisningsaktiviteterna i samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare medan det var förskoleklasslärarna som genomförde aktiviteterna tillsammans med eleverna. Dessa förskoleklasslärare har under flera år medverkat i forskningsprojektet vilket innebär att de är vana och mycket duktiga på matematikundervisning genom problemlösning och problemformulering. Utifrån deras fleråriga erfarenhet vet de syftet med uppgifterna och därmed när de behöver följa och när de kan avvika från den gemensamma planeringen. Tarim (2009) poängterar att lärarens roll är mycket viktigt även om eleverna är vana vid problemlösning, till exempel genom att ställa frågor för att hjälpa grupper vidare. Lärarna i denna studie vet vilka frågor de kan ställa till elever som kört fast utan att eleverna blir lotsade i sin lösning och de vet hur de kan strukturera de viktiga avslutade samtalen för att den avsedda matematiken ska synliggöras. Lärarna är dessutom de som presenterar uppgiften för eleverna, skapar grupperna och erbjuder ler-kakorna (material) vilket Tarim (2009) lyfter som avgörande för framgång i problemlösning. Om en (förskoleklass)lärare helt utan denna erfarenhet genomför de undervisningsaktiviteter som presenteras i denna artikel kan resultatet bli annorlunda utifrån de erfarenheter den läraren och de eleverna har. Det finns dock bara ett sätt att skaffa sig erfarenheterna lärarna och eleverna i studien har och det är att börja genomföra matematikundervisning i förskoleklass genom problemlösning och problemformulering.

Referenser

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Björklund, C. & Runesson Kempe, U. (2020). Utveckling av räknefärdigheter hos fem-till sjuåringar: Matteuseffekt eller utfall av undervisning. *Forskning om undervisning och lärande*, *8*(1), 9–28.

Cai, J. & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Hwang, C., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. I F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Red.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (s. 3–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Carrillo, J. & Cruz, J. (2016). Problem-posing and questioning: Two tools to help solve problems. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (s. 23–36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_2

Chen, L., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2013). The relationship between students' problem posing and problem solving abilities and beliefs: A small-scale study with Chinese elementary school children. *Frontiers of Education China*, *8*(1), 147–161. https://doi.org/10.1007/BF03396966

Ching, B. H. H. & Wu, H. X. (2021). Young children's knowledge of fair sharing as an informal basis for understanding division: A latent profile analysis. *Learning and Instruction*, *73*, 101460. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101460

Cifarelli, V.V. & Sevim, V. (2015). Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving. I F.M. Singer, N.F. Ellerton & J. Cai (Red.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (s. 177–194). Springer.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. J*ournal of Educational Psychology*, *90*(2), 321–329. https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.3211

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.

Ebbelind, A., Palmér, H. & van Bommel, J. (2023) Experience a sense of being, becoming and belonging to an educational design project as professional development. I P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Red.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (s. 3187–3194). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Ellerton, N. F., Singer, F. M. & Cai, J. (2015). Problem posing in mathematics: Reflecting on the past, energizing the present and foreshadowing the future. I F. M. Singer & N. F. Ellerton (Red.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (s. 547–556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_26

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first grade classroom. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 283–342. http://www.jstor.org/stable/3233836

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. I B. Sriraman & L. English (Red.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (s. 263–290). Springer.

European commission, directorate-general for education, youth, sport and culture. (2019). Key competences for lifelong learning. *Publications Office*. https://doi.org/10.2766/569540

Frydman, O. & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, *3*(4), 323–339. https://doi.org/10.1016/0885-2014(88)90019-6

Gunderson, A. G. (1955). Thought-patterns of young children in learning multiplication and division. *The Elementary School Journal*, *55*(8), 453–461. https://doi.org/10.1086/458721

Hansson, H. (2019). Betydelsen av att variera innehållsliga aspekter för yngre elevers lärande av platsvärde. *Forskning om undervisning och lärande*, *7*(3), 48–74.

Klaassen, K. & Doorman, M. (2015). Problem posing as providing students with content-specific motives. I F.M. Singer, N.F. Ellerton & J. Cai (Red.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (s. 177–194). Springer.

Khalid, M., Saad, S., Abdul Hamid, S.R., Ridhuan Abdullah, M., Ibrahim, H. & Shahrill, M. (2020). Enhancing creativity and problem solving skills through creative problem solving in teaching mathematics. *Creativity Studies*, *13*(2), 270–291. https://doi.10.3846/cs.2020.11027

Legare, C. H., Mills, C. M., Souza, A. L., Plummer, L. E. & Yasskin, R. (2013). The use of questions as problem-solving strategies during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, *114*(1), 63–76. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.07.002

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763–799). National Council of Teachers of Mathematics and Information Age Publishing.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315816876

Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(2), 193–220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Matalliotaki, E. (2012). Resolution of division problems by young children: What are children capable of and under which conditions? *European Early Childhood Education Research Journal*, *20*(2), 283–299. https://doi.org/10.1080/1350293x.2012.681132

Neuman, D. (1999) Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 101–128. https://doi.org/10.1023/A:1003852815160

Palmér, H. (2008). Är ett halvt kex lika många som ett helt kex? I I. Pramling Samuelsson & N. Pramling (Red.), *Didaktiska Studier från förskola och skola* (s. 19–40). Gleerups Utbildning AB.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2018). Young students' feelings towards problem solving tasks: What does "success" imply? I B. Rott, G. Törner, J. Peters-Dasdemir, A. Möller & Safrudiannur (Red.), *Views and beliefs in mathematics education: The role of beliefs in the classroom* (s. 69–78). https://doi.org/10.1007/978-3-030-01273-1_7

Palmér, H. & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: What does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 743–752. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x

Palmér, H. & van Bommel, J. (2021). Teachers' participation in practice based research: A methodological retrospect. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *26*(3–4), 113–130.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2023). Young Students Exploring Measurement Through Problem Solving and Problem Posing. *The Mathematics Educator*, *31*(1), 30–54.

Parmar, R. S. (2003). Understanding the concept of "division": Assessment considerations. *Exceptionality*, *11*(3), 177–189. https://doi.org/10.1207/S15327035EX1103_05

Pehkonen, E., Näveri, L. & Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *CEPS Journal*, *3*(4), 9–23. https://doi.org/10.25656/01:8498

Pramling, N. & Pramling Samuelsson, I. (2008). Identifying and solving problems: Making sense of basic mathematics through storytelling in the preschool class. *International Journal of Early Childhood*, *40*(1), 65–79. https://doi.org/10.1007/BF03168364

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics Education*, *27*(3), 293–309. https://www.jstor.org/stable/40248099

Singer, F. M., Ellerton, N. & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Skolverket. (2022). *Läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Lgr22).* https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stjernlöf, J. & Fred, J. (2014). Uppgifter som redskap för mediering av kritiska aspekter i matematikundervisning. *Forskning om undervisning och lärande*, (12), 21–43.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. I P. Clarkson (Red.), *Technology in mathematics education* (s. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2023). När dela lika är olika. *Nordisk barnehageforskning*, *20*(2), 110–129.

Tarim, K. (2009). The effects of cooperative learning on preschoolers' mathematics problem-solving ability. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 325–340. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9197-x

van Bommel, J. & Palmér, H. (2016). Young children exploring probability: With focus on their documentations. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *21*(4), 95–114.

van Bommel, J. & Palmér, H. (2021). Young students' views on problem solving versus problem posing. *Journal of Childhood, Education & Society*, *2*(1), 1–13. https://doi.org/10.37291/2717638x.20212165

van Bommel, J. & Palmér, H. (2022) Dividing cookies: What do students discern? I L. Mattsson, J. Häggström, M. Carlsen, C. Kilhamn, H. Palmér, M. Perez & K. Pettersson (Red.), *The relation between mathematics education research and teachers' professional development. The thirteenth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, Växjö* (s. 33–44). Svensk förening för MatematikDidaktisk Forskning - SMDF.

Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed.* [Elektronisk resurs]

Wyndhamn. J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik.* Linköpings universitet.

Författarpresentationer

Jorryt van Bommel
Jorryt van Bommel är gästprofessor i matematikdidaktik vid Högskolan Dalarna och beforskar just nu yngre elevers lärande i matematik samt lärarnas professionalisering.

Hanna Palmér
Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och tidig matematikundervisning

Andreas Ebbelind
Andreas Ebbelind är i universitetslektor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hans forskning fokuserar problemlösning, digitala verktyg samt yrkesidentitet.