

Lärares möjligheter att främja elevers teoretiska arbete med geometriska begrepp – lärandeverksamhet om cirkel

Originalartikel

Helena Eriksson^{1*} , Marie Björk¹ , Jenny Fred¹  & Gunilla Pettersson Berggren¹ 

Sammanfattning

I följande artikel diskuteras vad som karaktäriserar lärares handlingar som främjar elevers engagemang, i en lärandeverksamhet där de tillsammans med sina klasskamrater utforskar de geometriska begrepp som relaterar till begreppet cirkel. Data består av tre forskningslektioner i årskurs 2 där lärandeobjektet handlar om att reflektera över relationer mellan cirkelns fyra begrepp; mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge. Resultatet visar att lärares handlingar som fokuserade på de geometriska begreppen riktades mot både empiriska och teoretiska aspekter. Indikationer på utveckling av lärandeverksamhet kunde urskiljas i situationer där läraren introducerade, kopplade tillbaka, bekräftade, provocerade, inkluderade och fördjupade detaljer om begreppen som relaterar till cirkel. Med stöd av lärarhandlingar, som bestod av frågor, gester och konstruktioner på den gemensamma tavlan, möjliggjordes elevernas utforskande av begreppet cirkel.

Nyckelord: cirkel, El'konin-Davydov program, geometriska begrepp, lärandeverksamhet, undervisningsdesign

Abstract

The following article discusses what characterise teachers' actions that promote students' engagement, in a learning activity where they, together with their classmates, explore the geometric concepts related to the concept of circle. The data consists of three research lessons in grade 2 where the learning object is about reflecting on relationships between the four concepts of the circle: centre, radius, diameter and arc. The result shows that teachers' actions focusing the geometric concepts were directed towards both empirical and theoretical aspects. Indications of developing learning activity were discerned in situations where the teacher introduced, connected back, confirmed, provoked, included and deepened details about the concepts that relate to circle. Supported by teacher actions, consisting of questions, gestures and constructions on the joint board, students' exploration of the concept of circle was enabled.

Keywords: Circle, El'konin-Davydov curriculum, Geometrical concept, Learning activity, Teaching design

¹Stockholms universitet

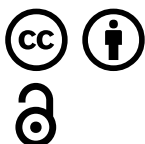
*Korresponderande författare:
Helena Eriksson
helena.eriksson@su.se

Forskning om undervisning och
lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s. 22–38
DOI: [10.61998/forskul.v12i3.26653](https://doi.org/10.61998/forskul.v12i3.26653)
ISSN: 2001-6131

Publicerad: 2024-10-14

© 2024 Författarna.

Denna artikel publiceras med öppen tillgång under villkoren i Creative Commons. Erkännande-licensen CC BY 4.0, som tillåter användning, spridning och reproduktion i vilket medium som helst, förutsatt att originalverket är korrekt citerat.



Introduktion

I denna artikel diskuteras lärares handlingar som främjar elevers engagemang i en lärandeverksamhet som den skrivs fram av Davydov (2008; jfr t.ex. Adolfsson Boman m.fl., 2013; Broman m.fl., 2022; Eriksson & Jansson, 2017). Med lärares handlingar menar vi det lärare säger och gör i relation till det begrepp som är i fokus. Lärandeverksamhet kan beskrivas som en kollektiv verksamhet där elever tillsammans med en lärare utforskar och reflekterar över den generella strukturen hos ett kunskapsobjekt (Davydov, 2008). Det kunskapsobjekt som står i fokus i den här artikeln är geometriska begrepp relaterade till begreppet cirkel. Valet grundar sig på att begreppet cirkel är vanligt förekommande i lågstadiets matematikundervisning. Valet gjordes också utifrån att den geometriundervisning som vanligtvis genomförs med yngre elever tenderar att uppmärksamma utseendet på olika geometriska former i den omgivande miljön (jfr. Sinclair m.fl., 2016) vilket Davydov (1990) beskriver som ett exempel på empiriskt fokus. I en sådan empiriskt inriktad geometriundervisning framhålls fyra områden som särskilt viktiga: problemlösning, arbete med redskap som exempelvis ritningar, visualisering och bevisföring (Jones m.fl., 2019).

Elevers arbete med att lösa problem relaterade till geometri blir ofta avhängigt av hur väl de kan hantera vissa specifika begrepp (Moore, 1994). Undervisningen borde därför redan under de tidiga skolåren skapa möjlighet för elever att utforska och ta i bruk geometriska begrepp (Davydov, 2008). En lärandeverksamhet riktad mot det geometriska begreppet cirkel kan ses som en verksamhet där eleverna får möjligheten att utforska och reflektera över relationerna mellan begreppen radie, mittpunkt, cirkelbåge och diameter – några av de relationer som ingår i strukturen för begreppet cirkel.

I en lärandeverksamhet skapas även förutsättningar för en specifik typ av samtal där eleverna tar rollen som drivande i utforskandet av det teoretiska begrepp läraren har valt (Davydov, 2008). I en kunskapsöversikt om undervisning i matematik framhåller Liljedahl (2022) att såväl uppgifternas utformning som grupsammansättning är viktiga faktorer för elevernas möjligheter att utveckla gemensamma samtal. Studier visar också att det kan vara utmanande för lärare att variera hur de svarar eleverna för att bjuda in till samtal i matematikklassrummet (t.ex. Davis, 1997; Hintz & Tyson, 2015). Vidare finns det studier som visar att lärares respons på elevernas inspel uppskattas av eleverna, speciellt när läraren låter dem diskutera sina lösningsförslag, ger återkoppling och lyssnar på hur de tänker (t.ex. Lim m.fl., 2020). Ytterligare studier visar att elever även kan behöva stöd i form av specifika redskap för att aktivt delta i samtal i matematikundervisningen (Björk, 2023; Eriksson, 2021; Fred, 2019). Det framträder således en problembild gällande hur lärare kan leda samtal där elever engageras i matematikundervisningen. Läger vi därtill utmaningen att skapa möjligheter för eleverna att arbeta utforskande och ta i bruk teoretiska matematiska begrepp blir problembilden än tydligare. Då räcker det inte att i forskning fokusera enbart på lärares frågor eller återkoppling, då behövs också ett fokus på det innehållsliga i undervisningen (Carlgren, 2017; Davydov, 2008). Om man har för avsikt att främja elevernas engagemang i en lärandeverksamhet, där de utforskar och reflekterar över den generella strukturen för ett kunskapsobjekt, kan man fråga sig vad läraren behöver fokusera på i arbetet med att leda elevernas samtal. Syftet med föreliggande artikel är därför att identifiera och diskutera lärares handlingar som främjar en verksamhet där eleverna utmanas att utforska, ta i bruk och reflektera över generella strukturer kopplade till ett geometriskt objekt, i detta fall begreppet cirkel. Följande forskningsfråga har formulerats: Vad kännetecknar lärares handlingar som kan möjliggöra för elever att utforska begrepp kopplade till cirkel; mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge i en lärandeverksamhet?

Bakgrund

Eftersom artikeln handlar om hur lärare kan främja elevers möjligheter att utveckla lärandeverksamhet kommer här först ett avsnitt om detta ramverk. Avsikten är att lärandeverksamheten ska handla om geometriska begrepp specifikt kopplade till cirkel, därför följer även ett avsnitt om elevers förståelse av geometriska begrepp.

Lärandeverksamhet

Lärandeverksamhet är det teoretiska ramverk som används för design och analys i studien. I lärandeverksamhet har läraren stor påverkan på det teoretiska arbete som eleverna ges möjlighet att utveckla (Davydov, 2008). Läraren förväntas, för att möjliggöra det teoretiska arbetet, ge eleverna mandat att utforska teoretiska begrepp (Davydov, 2008). Lärare behöver även ta ställning till om eleverna enskilt behöver arbeta med många enkla uppgifter eller om de behöver arbeta gemensamt med mer komplexa uppgifter (Kilhamn & Säljö, 2019). Idén om lärandeverksamhet förespråkar det sistnämnda alternativet för att skapa möjligheter till interaktion mellan eleverna, så att de kan ta del av varandras reflektioner i arbetet med uppgifter som engagerar och stimulerar dem. Denna typ av verksamhet kan därför ses som ett exempel på hur en specifik undervisningstradition (jfr Yackel & Cobb, 1996) kan utvecklas i en matematikundervisning.

Lärandeverksamhet fokuserar teoretiska begrepp, det vill säga strukturer och relationer som till sin natur inte är direkt observerbara utan kräver medierande redskap för att vara möjliga att reflektera över. De skiljer sig därmed från empiriska begrepp, som går att perceptuellt uppfatta och jämföra med sinnesförnimmelser (Davydov, 2008). Ett arbete i en lärandeverksamhet kräver därför att läraren förhåller sig till skillnader mellan vardagliga empiriska begrepp och vetenskapliga teoretiska begrepp (Davydov, 2008). Teoretiska begrepp behöver enligt Davydov rekonstrueras i en process av "ascending from the abstract to the concrete" (Davydov, 1990, s. 98), vilket innebär att det abstrakta ligger till grund för förståelsen av det konkreta. Att utveckla förståelse för teoretiska begrepp inkluderar alltid en förståelse för hur begreppet relaterar till andra teoretiska begrepp. Begreppet cirkel relaterar exempelvis, som nämnts ovan, till de teoretiska begreppen mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge. Att utveckla förståelse för empiriska begrepp relaterade till cirkeln handlar i stället om att kunna urskilja rundhet genom att iakttä cirkulära föremål och jämföra dem med andra geometriska objekt.

Lärandeverksamhet grundas också i en idé om att motiv för att lära kan utvecklas genom en undervisning som är socialt, kulturellt och historiskt grundad (Vygotsky, 1963, 1978). En undervisning som fokuserar på kollektivt arbete, drivet av ett motiv att lära och att lösa gemensamma problem, kan utvecklas till en lärandeverksamhet (Davydov, 2008; Radford & Roth, 2017; Repkin, 2003). Huruvida elever engagerar sig i ett teoretiskt arbete är beroende på de situationer som läraren organiserar och leder.

Lärandehandlingar och lärandemodeller

När eleverna arbetar med att utforska teoretiska begrepp behöver de utveckla handlingar, som inom lärandeverksamhet benämns lärandehandlingar. Läraren har en särskilt viktig roll att organisera för att eleverna ska kunna utveckla sådana handlingar (jfr Davydov, 2008). Handlingarna kan beskrivas enligt ett mönster som inte alltid följer en kronologisk ordning utan fungerar som riktlinjer för lärare, i sin roll som ledare av en lärandeverksamhet. Inledningsvis arbetar läraren tillsammans med eleverna för att identifiera och formulera ett problem de ska arbeta med. Problemet identifieras genom att exempelvis diskutera en specifik situation och gemensamt skapa en modell av ett specifikt innehåll (en lärandemodell) som kan hjälpa till i arbetet med en lösning. Genom arbetet med lärandemodellen får eleverna möjlighet att arbeta med kunskaps-

innehållet. I detta utforskande arbete transformerar och förändrar eleverna lärandemodellen. Därefter kan läraren och eleverna konstruera nya uppgifter som löses med en eller flera av de olika versionerna av lärandemodellen och värdera hur väl de fungerar för att lösa uppgifterna. Slutligen värderar eleverna hur generella de olika versionerna av lärandemodellen är och hur väl problemet lösts. Detta handlingsmönster kan utgöra riktlinjer för hur en gemensam verksamhet kan utvecklas där elever deltar i samtal om och med teoretiska begrepp (Davydov, 2008; se även Eriksson, 2017). Mönstret kan alltså ses som främjande för elever att engagera sig i och upprätthålla en lärandeverksamhet.

För att modellerna, som skapades inledningsvis, ska kunna utvecklas till lärandemodeller behöver läraren vara medveten om vilka teoretiska begrepp som kan kopplas till det specifika kunskapsinnehållet och därmed utgöra delar i en lärandemodell (Arievitch & Haenen, 2005; Davydov, 2008). Lärandemodellerna som utvecklas kan ge energi till diskussioner, främja problemidentifiering, utgöra en källa för nyfikenhet samt hålla riktningen för ett kollektivt reflekterat tänkande (Eriksson & Polotskaia, 2017). Modellarbete pekas ut som en möjlighet för elever, i exempelvis behov av särskilt stöd, att vara aktiva i arbetet med teoretiska begrepp (Björk, 2023; Eriksson, 2021; Moxhay, 2008). Det kan även vara intressant med modellarbete i elevgrupper där det av olika anledningar är utmanande att i hög grad använda verbalt språk (Björk, 2023; Eriksson, 2021). En viktig aspekt för lärandeverksamhet är att låta hela klassen utgöra en resurs för de gemensamma reflektionerna. Hur lärare kan planera för och agera i en sådan undervisning är fortfarande ganska sparsamt och relativt övergripande beskrivet i tidigare forskning.

Geometri och begreppsutveckling gällande geometri

Geometriundervisning med yngre elever tenderar att fokusera på att de ska urskilja olika geometriska former i den omgivande miljön (Sinclair m.fl., 2016). Ett exempel på hur elever kan utveckla förståelse av geometriska begrepp, och därmed även hur undervisning bör ske, finns beskrivet av van Hiele (1986). En utgångspunkt för van Hiele är att börja med att se olika former och därefter avbilda dem, sedan beskriva relationer mellan olika former för att slutligen förklara olika matematiska begrepp. Fokus i undervisningen kan med det perspektivet beskrivas som att eleverna först ska känna igen olika former för att sedan förstå begreppen. Det finns också studier som pekar på att elever tidigt behöver arbeta med samband mellan teoretiska aspekter av geometriska begrepp (Serin, 2018). Ett alternativ kan därför vara att i stället utgå från att utforska hur olika begrepp är beskaffade och hur de förhåller sig till varandra (jfr t.ex. Davydov, 2008). För att utforska cirkel som begrepp bör eleverna reflektera över dess konstruktion, det vill säga en "kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (radien) till en fix punkt (medelpunkten)" (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 214). Av den anledningen behöver begreppen radie och mittpunkt vara i fokus när elever ska utforska begreppet cirkel. Diametern som är dubbla radien och cirkelbågen som begränsar cirkeln är därför begrepp som också behöver utforskas av eleverna. Det är en sådan undervisning om begreppet cirkel som är i fokus för innevarande artikel framför att känna igen och peka ut olika cirkulära former bland andra geometriska former.

Metod

Utgångspunkten för undervisningen var att elever tillsammans med sina lärare skulle få möjlighet att utveckla en lärandeverksamhet gällande begreppet cirkel. En forskningslektion planerades, genomfördes och reviderades som ett iterativt arbete i tre cykler, i enlighet med principerna för learning study (jfr Carlgren, 2017).

Data

Data består av film från tre forskningslektioner, cirka 40 minuter vardera i årskurs 2, på två kommunala grundskolor i två olika kommuner. Lektionerna genomfördes under vårterminen 2020. Lektion ett genomfördes i en klass med tjugotvå elever, lektion två med arton elever och lektionen tre med tjugofyra elever. En skola är belägen i en storstadsregion i ett socioekonomiskt starkt område med många föräldrar med eftergymnasial utbildning och den andra skolan är belägen i en medelstor stad i ett hyreshusområde klassat som ett utanförskapsområde med många nyanlända familjer. Forskningslektionerna leddes av någon i forskargruppen.¹ Den ordinarie klassläraren förde anteckningar och ansvarade för filmkameran. Filmkameran var placerad längst bak i klassrummet så att läraren och det gemensamma arbetet på tavlan var i fokus i filmerna. Diskussionen i klassen, mellan eleverna och den undervisande läraren, syftade till att eleverna skulle fördjupa sina gemensamma reflektioner om och med begrepp relaterade till begreppet cirkel. Under några kortare stunder fick eleverna diskutera i par eller mindre grupper. Dessa situationer finns inte med som data då det elever sa eller gjorde inte fångades på film.

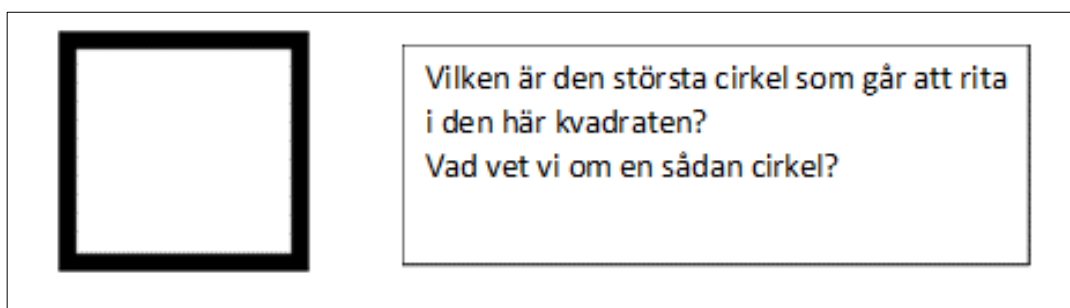
Vårdnadshavare hade, enligt direktiv från Vetenskapsrådet (2017), skrivit under ett samtycke om att deras barn fick delta i studien. Samtycket innebar att eleverna fick delta i studien där undervisningen filmades och att de när som helst kunde begära att avbryta deltagandet. Om någon, vilket inte var fallet, skulle begära att få avbryta deltagandet skulle all data som handlade om den eleven raderas ur transskript och analyser. Data i form av filmer slutförvaras enligt Stockholms universitets datalagringspolicy.

Två uppgifter

I studien konstruerades en uppgift (uppgift 1) som iscensattes i forskningslektion ett och två samt en reviderad uppgift (uppgift 2, se figur 1) som iscensattes i forskningslektion tre. Syftet med uppgifterna var att eleverna skulle utforska relationen mellan mittpunkten, radien, diametern och cirkeln.

Figur 1

Uppgift 2 genomförd i lektion tre



Not. Papperskvadraten som sattes upp på tavlan vid lektionsstart i forskningslektion tre.

I forskningslektionerna ett och två utgick arbetet från att människor i alla tider förundrat sig över den absolut runda formen som fenomen i naturen (uppgift 1). Läraren visade bilder med en projektor där en sten kastats i vatten och där cirkclar växer utifrån den plats där stenen träffade vattenytan samt en bild på en himmel med en sol-halo. Inledningsvis samtalade läraren och

¹ I forskargruppen ingår fyra forskande grundskollärare med magister, fil lic respektive fil dr utbildning.

eleverna om bilderna. Därefter visade läraren två enfärgade geometriska objekt, en cirkel och en oval och bad eleverna jämföra och beskriva figurerna samt förklara vilken som var en cirkel. En skillnad mellan lektion ett och två var de redskap som användes för att utforska radien i de olika figurerna. I forskningslektion ett använde eleverna gem som de lade från mittpunkten till cirkelns kant och i forskningslektion två användes snören som de klippte och lade på motsvarande sätt för att mäta radien.

I forskningslektion tre utgick arbetet i stället från en kvadratisk ram som sattes upp på tavlan, se figur 1, uppgift 2. Läraren pekade på kvadraten och frågade hur stor cirkel som kunde ritas i den. Eleverna fick också frågan om vad de kunde veta om en sådan cirkel.

Anledningen till den förändrade uppgiften var att uppgiften från forskningslektion ett och två inte i tillräcklig utsträckning möjliggjorde för eleverna att utforska relationer mellan cirkeln och dess relaterade begrepp. I den reviderade uppgift 2 var tanken att eleverna skulle få möjlighet att urskilja att kvadraten och den cirkel som efterfrågas har samma mittpunkt, och att längden på sidorna i kvadraten är densamma som diametern i denna cirkel. Begreppen mittpunkt, diameter och cirkel blir centrala för att lösa uppgiften.

Analysmetod

Analysarbetet genomfördes i fyra steg. Det första steget utgjordes av transkribering av filmerna från forskningslektionerna. Transkriptionerna fokuserade på arbetet med uppgifterna och gjordes ordagrant, med undantag av att talspråk ändrades till läsbart skriftspråk, vilket i vissa fall innebar att omtagningar, upprepningar och hummanden togs bort. I de delar av lektionerna där läraren fick vara särskilt aktiv för att upprätthålla en lärandeverksamhet kompletterade vi transkriptionerna med beskrivningar av såväl lärarens som elevernas ickeverbala handlingar (exempelvis pekningar, ritande, nickningar osv) inom hakparenteser (jfr Mergenthaler & Stinson, 1992).

I det andra analyssteget färgkodades lärarens handlingar (uttalanden och ickeverbala handlingar) utifrån funktion. De olika koderna analyserades induktivt till ett antal olika kategorier, där arbetet med att sortera och organisera dem, resulterade i två huvudkategorier: (1) läraren utför handlingar av organisatorisk karaktär (ber exempelvis en elev att gå till tavlan) och (2) lärarens handlingar fokuserar på innehållet, det vill säga geometriska begrepp som relaterar till cirkeln (exempelvis pekar läraren på mittpunkten i en cirkel). I resultatkapitlet namnges dessa som: (1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus och (2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus (se figur 2 nedan).

I det tredje analyssteget vidareutvecklades huvudkategori (2) till två underkategorier gällande antingen empiriska eller teoretiska begrepp (jfr Davydov, 1990). Den empiriska underkategorin utgjordes av lärarens handlingar där vardagliga ord (alltså empiriska begrepp) och situationer användes, det vill säga begrepp som är möjliga att urskilja perceptuellt. I den teoretiska underkategorin använde läraren teoretiska begrepp, det vill säga begrepp som måste urskiljas genom reflektion med stöd av modeller. I resultatet finns dessa kategorier presenterade som: (2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp, och (2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp.

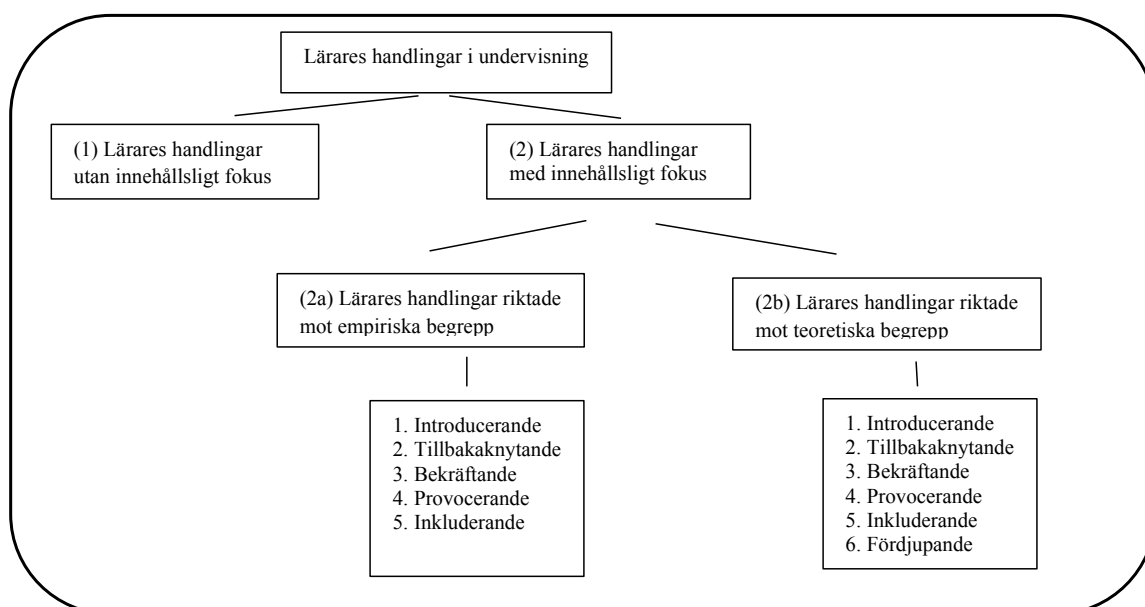
I det fjärde analyssteget identifierades ett antal underkategorier i både (2a) och (2b) genom ytterligare en kodning av olika typer av handlingar. Dessa koder bestämdes utifrån vilka ord och begrepp som läraren använde i uppmaningar och utmaningar, exempelvis huruvida läraren valde att fånga upp och gå vidare med elevers beskrivningar eller vad handlingarna gav eleverna möjlighet att respondera på.

Resultat

I det följande presenteras hur elevernas lärandehandlingar främjades av vad läraren gjorde och sa, det vill säga lärares handlingar. Först presenteras de två huvudkategorierna: (1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus och (2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus. Därefter presenteras de två underkategorierna till kategori (2): (2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp och (2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp. I relation till forskningsfrågan bedömdes kategori (2b) som särskilt intressant, eftersom dessa handlingar möjliggjorde för eleverna att utforska teoretiska begrepp relaterade till cirkel, så som mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge. Kategori (2a) redovisas kort som en kontrast eller illustration över skillnaden mellan lärarhandlingar riktade mot empiriska (vardagliga) respektive teoretiska (vetenskapliga) begrepp.

Figur 2

Handlingar som möjliggör lärandeaktivitet



Not. Figuren visar lärares handlingar kategoriserad i två huvudkategorier: (1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus och (2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus. Figuren visar vidare att kategori (2) delas upp i: (2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp och (2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp.

(1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus

De handlingar som läraren utförde för att organisera undervisningen, utan direkt fokus på begrepp relaterade till cirkel, finns samlade i denna kategori (1). Den här typen av handlingar kom till exempel till uttryck genom att läraren dirigerade eleverna fram och tillbaka till tavlan och bad dem att synliggöra hur de själva tänkte eller reflekterade över vad någon annan elev hade sagt eller gjort. Exempel på sådana handlingar är när läraren räckte fram en penna och pekade på en av eleverna och sa "Kom och visa hur du tänker". Ett annat exempel är när läraren vände sig till hela klassen och frågade "Vad menade han? Vem kan ge ytterligare en förklaring?" Sammanfattningsvis såg den här typen av handlingar ut att fortlöpande underlätta och orkestrera samverkan mellan elever och läraren samt samverkan och reflektion mellan elever. Dessa handlingar saknade dock ett innehållsligt fokus.

(2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus

De handlingar med innehållsligt fokus som läraren riktade mot begrepp relaterade till cirkel presenteras i tabell 1. Dessa handlingar riktades dels mot empiriska begrepp, det vill säga begrepp och aspekter som perceptuellt går att identifiera, dels mot teoretiska begrepp och relationer mellan teoretiska begrepp som endast är tillgängliga via lärandemodeller. I tabellen presenteras en översiktlig sammanställning med beskrivningar av respektive kategori och exempel på lärares handlingar med innehållsligt fokus som vi induktivt identifierat i vår data. Notera att alla underkategorier har exempel på handlingar riktade mot både empiriska och teoretiska begrepp förutom den sista, fördjupande handlingar, där det inte finns några empiriska handlingar. För att komma till en fördjupning av begrepp behöver läraren alltså fokusera teoretiskt innehåll.

Tabell 1

Lärares handlingar med innehållsligt fokus.

Underkategorier	Beskrivning av underkategorier	t/e	Exempel på lärares specifika handlingar från lektionerna
1. Introducerande	avser när läraren <i>använder</i> och <i>medvetet</i> riktar uppmärksamhet mot de matematiska begrepp som är i fokus	t e	Konstruera den största cirkeln som får plats inuti den här kvadraten. Vad är det [ni ser] och hur testas rundhet?
2. Tillbakaknyttande	avser när läraren <i>knyter tillbaka till</i> teoretiskt begrepp som tidigare nämnts	t e	Kan vi säga något om den här? Den såg ut som en kvadrat-cirkel. Hur många har kastat sten i vattnet och tittat på cirkelarna som växer?
3. Bekräftande	avser <i>vad-frågor</i> som bekräftar innehållsliga detaljer i elevernas svar	t e	Vad är det som man nu tänker på om det är en cirkel? Vad är det som gör att man kan veta att det är en cirkel? Vad är det som gör att cirkelarna växer och blir större och större och större?
4. Provocerande	avser <i>utmaningar</i> som läraren iscensätter i avsikt att eleverna ska urskilja och ytterligare utforska ett teoretiskt begrepp	t e	Kan <i>mittpunkten</i> finnas på många ställen? Likadant med fisken, tittar upp med huvudet ovanför vattenytan, det plaskar till, då blir det ju också en cirkel.
5. Inkluderande	avser när läraren inkluderar <i>eleverna</i> i ett arbete där de får möjlighet att <i>använda</i> teoretiska begrepp	t e	Just det? Och vad är det du tänker att du... hjälper oss med pluset? Vad händer om en hjärtformad sten kastas i vattnet?
6. Fördjupande	avser när läraren <i>fokuserar relationer</i> mellan olika begrepp som är aktuella i det fokuserade kunskapsobjektet	t	Om det nu är så att det här är <i>r</i> (<i>implicit radie</i>), vad blir då denna?

Not: Tabellen visar de sex kategorierna av lärares handlingar med innehållsligt fokus som kunde identifieras i transkripten. I kolumnen t/e betyder 't' teoretiskt innehåll och 'e' betyder empiriskt innehåll. Observera att de fördjupande handlingarna enbart identifierades ihop med teoretiskt innehåll.

(2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp

Lärares handlingar i forskningslektionerna som leder eleverna till empiriska (vardagliga) begrepp var relativt många, men vi väljer här att endast övergripande beskriva dessa handlingar, främst som kontrast till handlingar som bidrar till utforskandet av teoretiska begrepp. Exempel

på introducerande handlingar är när läraren första gången nämnde cirkel genom att hänvisa till en tänkt gemensam erfarenhet av att kasta en sten i vattnet i uppgift 1. Läraren knöt sedan vid flera tillfällen tillbaka till stenkastningen och cirkelarna den ger upphov till. Läraren stödde ett fortsatt fokus på ringarna i vattnet genom att bekräfta det eleverna sa, att ringarna blev större och större (bekräftande handling). När eleverna i forskningslektion två lade stort fokus på att mäta runt om cirkeln, det vill säga omkretsen, provocerade läraren eleverna med frågor som "Hur långt är avståndet om vi mäter tvärs igenom cirkeln?". Provocerande handlingar, det vill säga när läraren gjorde nästan överdrifter, förekom även när läraren frågade hur ringarna på vattnet ser ut när en fisk tittar upp till ytan. Läraren försökte inkludera elever som kunde miss-tänkas tappa fokus genom att hitta på flera liknande frågor, exempelvis om att man kastar en hjärtformad sten i vattnet. Alla dessa exempel med fiskar och andra former på stenar medförde dock att diskussionen i klassrummet än mer fokuserade på hur cirkelarna såg ut (stora, små eller om de kunde ha annan form än en cirkel) medan begrepp relaterade till en cirkel hamnade i skymundan.

(2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp

Här presenteras lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp.

1. Introducerande handlingar

Introducerande handlingar avser lärarens uppmaningar eller frågor som riktar elevernas uppmärksamhet mot teoretiska begrepp som relaterar till cirkel.

I forskningslektion ett och två tenderade diskussionen i klassrummet att handla om hur cirkeln och ovalen skiljde sig åt till sitt utseende. Eleverna beskrev exempelvis att avståndet tvärs över en cirkel är lika långt överallt men längre på ett ställe i en oval. Detta innebar att eleverna fokuserade cirkeln på empirisk grund snarare än att de fokuserade begreppen mittpunkt och radie. Forskningslektion tre inleddes därför med att läraren gav eleverna i uppdrag att konstruera den största cirkel som fick plats i en given kvadrat (se figur 1). Läraren introducerade uppgiften enligt excerpt 1, med en uppmaning som innehöll de matematiska begreppen cirkel och kvadrat.

Excerpt 1

- | | |
|---------|---|
| Lärare: | Konstruera den största cirkeln som får plats inuti den här kvadraten. |
| Elev 1: | [Ritar en cirkel-liknande figur i kvadratramen. Linjen pojken ritar följer konturerna för kvadraten] |
| Lärare: | [Pekar på figuren pojken nyss ritade] Vad säger du om den här? [Pekar på en annan elev] |
| Elev 2: | Det går att göra större. [Går till tavlan och gör en ny "cirkel" som följer konturerna för kvadraten i större utsträckning än den ritning som elev 1 gjort, se figur 3] |
| Elev 3: | Det där ser mer ut som en kvadrat. [Pekar på den figur som elev 2 konstruerade] |
| Elev 4: | Kvadrat-cirkel. |

Att läraren, i enlighet med excerpt 1, använder cirkel och kvadrat utan att själv förklara hur den största cirkeln kan konstrueras, tolkas som en introducerande handling vilken främjar elevernas möjlighet att identifiera problemet. Problemet handlade alltså om att en cirkel och kvadrat både är lika och skiljer sig åt. Lärarens handlingar med att uppmana, peka och fråga fungerade på så vis främjande för elevernas utforskande. Handlingarna fungerade främjande för att eleverna börjar ta i bruk begreppen cirkel och kvadrat genom ordet kvadratcirkel och konstruktionen i figur 3.

Figur 3*Rekonstruktion av elevernas kvadratkirke*

Not. Figuren visar hur flera elever försökt konstruera cirklar i kvadraten. Elevernas konstruktioner är inte helt runda utan följer i viss utsträckning kvadratens form.

2. Tillbakaknyttande handlingar

Tillbakaknyttande handlingar avser återkoppling till teoretiska begrepp som nämns av elever. Ett exempel är hämtat ur forskningslektion tre där läraren kopplar tillbaka till benämningen kvadratkirke (se excerpt 2).

Excerpt 2

- Elev 2: [Går till tavlan och konstruerar en "cirke" som följer konturena för kvadraten]
 Elev 3: Det där ser mer ut som en kvadrat.
 Elev 4: Kvadrat-cirke.
 Lärare: Kan vi säga något om den här? Den såg ut som en kvadrat-cirke.
 Elev 4: Jag tycker inte det där är en cirke. Det är en kvadrat med runda kanter.

Läraren tar alltså hjälp av elevernas förslag "kvadrat-cirke" och knyter tillbaka till den figur som en av eleverna hade konstruerat på tavlan. Den kategori av handlingar som kommer till uttryck i excerpt 2 har på det här viset funktionen att repetera ett svar som eleverna hade givit genom att knyta tillbaka till begrepp som redan nämnts av eleverna. Läraren sa alltså inte bara "bra" eller "rätt", utan knöt i stället tillbaka till elevens svar så att de fortsatte att reflektera över det matematiska innehållet. På så sätt upprätthölls och vidareutvecklades en lärandeverksamhet.

Sammantaget fokuserar tillbakaknyttande handlingar på det teoretiska innehållet genom att läraren upprepar och uppmanar eleverna att precisera eller reflektera över varandras svar. Lärarens frågor tar fasta på att eleven 1) använder begreppet cirke och 2) knyter tillbaka till begreppet cirke. Det är alltså begreppet som åsyftas i de tillbakaknyttande handlingarna.

3. Bekräftande handlingar

Bekräftande handlingar avser handlingar som fokuserar på specifika innehållsliga detaljer i elevernas reflektioner. I denna bekräftelse använder läraren en elevkonstruktion i kombination med vad- och hur-frågor såsom excerpt 3 visar.

Excerpt 3

- Lärare: Kan vi säga något om den här? Den såg ut som en kvadratkirke tyckte vi. [Pekar runt den figur som eleven konstruerade inuti kvadraten, se figur 3] Vad är det som man nu tänker på om det är en cirke? Vad är det som gör att man kan veta att det är en cirke?

- Elev 5: Cirklar är helt runda liksom de är runda som kvadrater. [Pekar på cirkelarna som är inskrivna i kvadraten och avser att den inskrivna cirkeln nuddar mitten av kvadratens sida, se figur 3]
- Elev 6: Cirklar är helt runda, ja ...
- Lärare: Hur skulle den här kunna bli bättre? Den här var lite lik kvadraten. [Pekar runt i cirkeln i kvadraten och sträcker armarna mot eleverna som är med och reflekterar]

I ovanstående excerpt bekräftar läraren elevens beskrivning av likheten mellan kvadraten och cirkeln (det vill säga att cirkelbågen nuddar mitten av kvadratens sida) begreppet cirkel med två vad- och en hur-fråga föranledd av "kvadratkirkel" som elev 4 tidigare utvecklade i excerpt 2. Läraren bekräftar alltså elevens förslag genom att 1) använda ordet kvadratkirkel och, 2) peka runt den figur som eleven konstruerade. Vad-frågorna leder till att eleverna beskriver en egenskap som dels är lika, dels olika mellan cirkel och kvadrat, att cirklar är runda kvadrater, vilket tolkas som att andra egenskaper som exempelvis att olika avstånd är lika på motsvarande sätt i en cirkel och en kvadrat. Sidorna i en kvadrat har samma längd, precis som diametern i en cirkel har samma längd var man än mäter den. Läraren bekräftar att figurerna är olika, samtidigt som handlingarna bekräftar eleverna så att de fortsätter att leta efter fler bevis för skillnaderna mellan en kvadrat och en cirkel. Detta skapar i sin tur ett behov hos eleverna av fler begrepp relaterade till cirkel. Sammantaget innebär bekräftande handlingar att läraren möjliggör ett teoretiskt prövande av begrepp genom att bekräfta vad eleverna ser, men också ber dem reflektera bortom det visuellt uppenbara.

4. Provocerande handlingar

Provocerande handlingar avser handlingar som läraren iscensätter i avsikt att eleverna ytterligare skulle utforska ett teoretiskt begrepp. Dessa handlingar kan vara följdfrågor till något som en elev säger eller gör och som provocerar eleverna att föra sina antaganden i bevis, om cirkelns mittpunkt och diameter. Ett exempel på en sådan handling presenteras i excerpt 4 från forskningslektion tre, där läraren ställer följdfrågor om det plustecken en av eleverna har ritat i "kvadrat-cirkeln" och kallat för mittpunkt.

Excerpt 4

- Elev 4: [Ritar ett plustecken nere till vänster i kvadrat-cirkeln som är konstruerad på tavlan]
- Lärare: Kan mittpunkten finnas på många ställen?
- Elever: Nej. Bara där. [Pekar i cirkeln]
- Elev 2: [Ber att få komma till tavlan och ritar ett halvt stort plustecken i mitten på kvadraten på fri hand] Man kan rita som ett plus. Sen kan man rita runt och använda pluset.
- Lärare: Gäller detta i alla kvadrater och alla cirklar? Var måste diametern finnas?
- Elev 2: Om dom är tillsammans. [Pekar ut ett streck som går igenom mittpunkten]

Läraren provocerar här eleverna att utforska relationen mellan mittpunkt och diameter genom att fråga huruvida mittpunkten i en cirkel kan finnas på många ställen. Eleven som svarar säger att cirkeln kan ritas runt plustecknet, vilket kan tolkas som att eleven menar att det finns en mittpunkt som på något sätt kan användas för att lösa uppgiften, att rita en så stor cirkel som möjligt innanför kvadraten. Lärarens fråga bidrar till att eleverna fortsätter utforskandet av och reflektionerna om begreppet mittpunkt.

Samttaget handlar denna kategori om att läraren ställer frågor som provocerar elevernas tidigare oreflekterade kunnande om relationerna mellan begreppen.

5. Inkluderande handlingar

Inkluderande handlingar avser att skapa möjligheter för elever att använda teoretiska begrepp relaterade till ett specifikt kunskapsobjekt, genom att handlingar tar utgångspunkt i det någon eller några elever har uttryckt verbalt eller visuellt.

Nedanstående excerpt, excerpt 5, inleds med att elev 2 reflekterar över cirkelns mittpunkt genom att rita ett plustecken som är ganska nära mitten i kvadraten och sedan förklarar hur det tecknet kan användas för att konstruera en cirkel.

Excerpt 5

- Lärare: Just det! [Tittar på det plustecken som elev 2 ritat i mitten av kvadraten] Och vad är det du tänker att du ... hjälper oss med pluset?
- Elev 2: Det är svårt att se.
- Lärare: Ser alla vad hon gjort? Vad tycker ni att hon gjort?
- Elev 4: Hon har delat en pizza.
- Elev 10: Den är en mindre version av den.
- Lärare: Vad är det som ni har lagt till här nu för att rita en cirkel? [Läraren pekar på plustecknet]
- Elev 3: Pluset gör att den nuddar kanterna. Den når till kanten.

Efter ett flertal uppföljande frågor, där läraren hela tiden tar utgångspunkt i det någon eller några elever har uttryckt verbalt eller visuellt, syns hur elev 3 relaterar pluset, mittpunkten, till cirkelbåge genom att beskriva att "Pluset gör att den nuddar kanterna". Läraren inkluderar eleverna så att de utvecklar sina reflektioner om mittpunkten genom att ställa frågor om det plus-tecken som elev 2 inledningsvis ritat på tavlan. Genom sina frågor inkluderar läraren eleverna i reflekterande samtal om relationen mellan cirkelns mittpunkt och avståndet till cirkelbågen, vilket även skapar ett behov hos eleverna att använda begreppet mittpunkt men också att de uppmärksammar relationen mellan mittpunkten och mitten av kvadratens sidor.

Sammantaget avser de inkluderande handlingarna att läraren utgår från elevernas svar och använder dem för att ytterligare främja reflektioner över begreppet. Läraren inkluderar alltså eleverna i ett gemensamt arbete, genom att ta utgångspunkt i det någon elev har sagt och fortsätta att ställa frågor som främjar elevernas sökande efter fler bevis och deras användande av teoretiska begrepp kopplade till kunskapsobjektet.

6. Fördjupande handlingar

Fördjupande handlingar avser att rikta elevernas fokus mot relationer mellan begrepp kopplade till ett specifikt kunskapsinnehåll. I excerpten, excerpt 6 och excerpt 7, nedan tar läraren utgångspunkt i elevernas resonemang om radien som benämns med "r".

Excerpt 6

- Lärare: Om det nu är så att det här är "r", vad blir då denna? [Läraren pekar på diametern i cirkeln som är ritad på tavlan där radien är markerad med "r"] Är det viktigt vilken sträcka som är "r"? Kan "r" finnas var som helst och hur som helst i cirkeln?
- Elev 10: "r" är emellan. [Pekar med armen fram och tillbaka]
- Lärare: Mellan här. [Pekar mellan cirkelbågen och mittpunkten]

Lärarens fördjupar här samtalet gällande relationer mellan begreppen cirkelns radie och mittpunkten genom att ställa flera frågor som kan skapa ett behov hos eleverna att använda begreppen.

I en annan sekvens, excerpt 7, ställer läraren en fördjupande fråga som handlar om diameters längd, vilket inbjuder elev 7, 8 och 9 till att fokusera på begreppen mittpunkt och cirkelbåge (ej verbalt men med gester).

Excerpt 7

- Lärare: Vad vet vi om diametern som sträcka?
- Elev 7: Man måste försöka se att det är lika långt från. [Pekar med två händer i luften]
- Elev 8: Lika långt. Lika långt här och dit och här och dit. [Pekar på mittpunkten och cirkelbågen på olika ställen, det vill säga på två radier som är tänkta att finnas tvärs över varandra]
- Elev 9: Man kan kolla på klockan. Där är ju en mittenpunkt.

Lärarens handlingar i excerpt 6 och 7 främjar elevernas utforskande och användande av begreppen radie, diameter och cirkelbåge samt resonemang om hur de relaterar till varandra och till cirkeln. När läraren ställer frågor som "Vad vet vi om diametern som sträcka?" främjar hon ett fördjupande resonemang, i vilket eleverna använder begreppen verbalt och med gester.

Sammantaget handlar de fördjupande handlingarna om att läraren utmanar eleverna att fördjupa sina resonemang kring relationer mellan begrepp kopplade till ett specifikt kunskapsinnehåll. Läraren ställer frågor som främjar elevernas användande av teoretiska begrepp och deras inbördes relation.

Sammanfattning

Sammanfattningsvis visar resultatet att lärarens handlingar har betydelse för såväl organiserandet av praktiska detaljer i undervisning – gällande exempelvis vilka elever som ska arbeta på tavlan eller vilka som ska svara på frågor – som att hålla fokus på de teoretiska begreppen exempelvis cirkel, mittpunkt och diameter. Sex kategorier av handlingar framträder som betydelsefulla för att etablera, utveckla och upprätthålla lärandeverksamhet. I början av lektionen introducerar läraren en problemsituation där begreppen behöver användas, för att sedan knytas tillbaka till, och bekräftas då eleverna tar dem i bruk. Lärarens frågor och påståenden tycks även kunna provocera gruppen att använda begrepp och inkludera eleverna i ett fortsatt teoretiskt arbete som kan leda till fördjupande resonemang. De sex handlingarna kan främja en verksamhet där eleverna utmanas att utforska, ta i bruk och reflektera över begreppslika strukturer kopplade till ett specifikt kunskapsobjekt.

Diskussion

Artikeln syftar till att identifiera och diskutera lärares handlingar som främjar en verksamhet där eleverna utmanas att utforska, ta i bruk och reflektera över begrepp kopplade till cirkel. Inledningsvis förs en diskussion kring lärares handlingar som riktar elevers samtal mot teoretiska begrepp och hur de kan främja etablerandet och upprätthållandet av en lärandeverksamhet. Avslutningsvis diskuteras vårt kunskapsbidrag och några didaktiska implikationer.

För att främja elevers teoretiska arbete behöver läraren stötta eleverna att identifiera ett problem där ett specifikt begrepp behövs. Vidare möjliggör läraren för eleverna att arbeta med modeller för begreppet, reflektera över både modeller och begrepp samt reflektera över hur väl modellerna fungerar för att lösa problemet (Davydov, 2008). Det var först i uppgift 2 som eleverna identifierade problemet med var mittpunkten är placerad i relation till cirkelns diameter. I den uppgiften identifierade de också relationen mellan diameter och radie samt relationen mellan mittpunkten och cirkelbågen. Behovet av att veta radien för att kunna konstruera en så stor cirkel som möjligt identifierades med stöd av lärarens introducerande handlingar. Lärarens

tillbakaknyttande, bekräftande och inkluderande handlingar är alla tre av liknande karaktär, då läraren här tar fasta på elevernas reflektioner, och på olika vis gör deras reflektioner meningsfulla genom att upprepa och inkludera dem i kommande utmaningar. Enligt annan matematikdidaktisk forskning uppskattar elever, som tidigare nämnts, att lärare lyssnar och ger återkoppling (Lim m.fl., 2020). Återkoppling är dock, som framgår av vårt resultat, en del av det en lärare behöver göra för att engagera elever att reflektera över teoretiska begrepp. Lärarna provocerade eleverna genom att påvisa vad ett begrepp inte är eller genom att uppmärksamma relationer som inte gäller, exempelvis som när läraren frågade om mittpunkten kan finnas på flera ställen i kvadrater och cirklar. Fördjupande handlingar identifierades endast i handlingar riktade mot ett teoretiskt innehåll. De utvecklades i slutet av den tredje lektionen, där läraren exempelvis frågade vad eleverna vet om diametern. Den frågan skulle kunna utgöra en uppstart på en uppföljande lektion där begreppet diameter utforskas.

De lärarhandlingar som enligt resultatet främjade elevers utforskande av de teoretiska begreppen behöver lärare känna till. Om lärare är medvetna om de olika handlingarna kan de, tillsammans med kollegor, reflektera över hur de kan agera i klassrummet för att elever ska få möjlighet att utforska teoretiska begrepp (Repkin, 2003). Det är således nödvändigt att som lärare reflektera över vad det innebär att leda en lärandeverksamhet och att olika lärarhandlingar kan ge olika möjligheter för elever att utveckla lärandeverksamhet (Davydov, 2008). Elevgrupper som över tid blir alltmer vana att utveckla lärandehandlingar brukar så småningom behöva mindre stöd av läraren (Repkin, 2003; Zuckerman, 2004, 2007).

Uppgifterna i forskningslektionerna följde inte stegen i van Hiele's (1986) modell för hur geometriskt tänkande bör utvecklas, där empiriska figurer först ska identifieras av eleverna innan de börjar arbeta med teoretiska begrepp gällande geometri. Enligt van Hiele bör läraren först visa visuella figurer och använda ett vardagsspråk för att göra det möjligt för eleverna att inleda ett geometriskt tänkande (Vojkuvkova, 2012). I forskningslektionerna utmanades i stället eleverna med de teoretiska begreppen mittpunkt, radie, cirkelbåge och diameter redan i själva utforskandet av begreppet cirkel. Speciellt i forskningslektion tre startade vi, i motsats till van Hiele, med att eleverna fick reflektera över hur en så stor cirkel som möjligt kan ritas i en given kvadrat med hjälp av teoretiska begrepp. Det är sålunda möjligt att introducera det geometriska begreppet cirkel med hjälp av de teoretiska begreppen.

Utifrån våra erfarenheter av att utveckla lärandeverksamhet tillsammans med elever, och att handleda andra lärare i motsvarande situation, har vi upplevt ett behov av att diskutera vad en lärares handlingar består i, som kan främja elevers utveckling av lärandehandlingar. Vi har erfarenheter från egen undervisning, att spontant fånga och gå vidare med elevers reflektioner, men vi har ibland en känsla av att ha glömt eller missat detaljer och därmed i stället för att möjliggöra för eleverna att utveckla lärandehandlingar eller lärandemodeller, släckt dessa möjligheter (Björk, 2023; Eriksson, 2021; Fred, 2019). Mycket av det som vi lärare gör, som siktar på utveckling av en lärandeverksamhet, är sådant som lärare gör även i annan undervisning, men lärarstödet i en lärandeverksamhet innebär dock ett något annorlunda arbete. Det vi ser som styrkan i lärandeverksamhet är kopplingen mellan det matematiska innehållet i undervisningen och lärarens handlingar som kan främja ett samtal riktat mot teoretiska begrepp. Det som också skiljer är idén i lärandeverksamhet om att utforskandet av teoretiska begrepp ska drivas av eleverna. Lärandeverksamhet som didaktiskt ramverk (Davydov, 2008) tillhandahåller en struktur för vad elever behöver utveckla för ett sådant utforskande och denna struktur kan stödjas genom lärarens handlingar. Dessa handlingar behöver explicitgöras både vad gäller hur de kan genomföras och för vilket teoretiskt innehåll de bör riktas mot. Handlingarna behöver också bli explicita och medvetna för att lärare tillsammans ska kunna diskutera och reflektera

över dem. Resultatkategorierna, med handlingar som riktas mot teoretiska begrepp, utgör i det fallet en möjlig utgångspunkt i kollegiala samtal om hur lärandeverksamhet kan utvecklas i undervisning. Vidare kan kategorierna av handlingar som riktas mot teoretiska begrepp användas för att, tillsammans med lärare, problematisera lärarens stöd till elever i en lärandeverksamhet även för andra kunskapsinnehåll.

Avslutningsvis tror vi att vi har identifierat handlingar som lärare kan utveckla för att främja elevers möjligheter att utveckla lärandeverksamheter som, i vår studie, rör begreppet cirkel. Vi är dock väl medvetna om att fler studier behöver göras för att i detalj verifiera och förfinas beskrivningen av lärares handlingar och för att utforska motsvarande handlingar gällande kunskande om andra begrepp.

Tack

Vi riktar ett stort tack till Helge Ax:son Johnsons stiftelse som gjort arbetet med den här artikeln möjligt. Vi riktar även ett stort tack till de lärare och elever som deltagit i studien, samt till Fia Ek och Annika Petersson för deras bidrag i förarbetet.

Referenser

- Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A. & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecken i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1. *Forskning om undervisning och lärande*, (10), 29–49. <https://doi.org/10.61998/forskul.v1i10.27607>
- Arievitch, I. & Haenen, J. (2005). Connecting sociocultural theory and educational practice: Galperin's approach. *Educational Psychologist*, 40(3), 155–165. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4003_2
- Björk, M. (2023). *Att främja elevers teoretiska utforskande av bassystemet – en undervisningsutvecklande studie i matematik på mellanstadiet*. [Licentiatuppsats, Stockholms universitet]. <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3AAnbn%3Ase%3Aasu%3Adiva-214255>
- Broman, A., Waermö, M. & Chudinova, E. (2022). The modelling in developmental education: A condition for theoretical abstraction and generalization. *Revista Educativa – Revista de Educação*, 25(1), 1–25. <https://doi.org/10.18224/educ.v25i1.12762>
- Carlgren, I. (2017). *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study*. Gleerups.
- Davis, B. (1997). Listening for difference: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 355–376. <https://doi.org/10.2307/749785>
- Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (J. Teller, Övers.). National Council of Teachers of Mathematics.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study* (2 uppl.). Nova Science Publishers.
- Eriksson, H. (2021). *Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksamhet: En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klasser i grundskolans tidigaste årskurser*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. <http://su.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1529155&dswid=-2891>
- Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study* (s. 61–85). Gleerups.
- Eriksson, I. & Jansson, A. (2017). Designing algebraic tasks for 7-year-old students – a pilot project inspired by Davydov's learning activity. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(2), 257–272. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i2.67>

- Eriksson, I. & Polotskaia, E. (2017). Editorial. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(2), 132–135.
- Fred, J. (2019). *Att etablera och upprätthålla ett algebraiskt arbete i årskurs 2 och 3: En undervisningsutvecklande studie med matematiska mönster som innehåll*. [Licentiatuppsats, Stockholms universitet]. <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-176382>
- Hintz, A. & Tyson, K. (2015). Complex listening: Supporting students to listen as mathematical sense makers. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(4), 296–326. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1084850>
- Jones, K., Maschietto, M., Doze, J. & Papadaki, C. (2019). Introduction to the papers of TWGo4: Geometry teaching and learning. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics education*. Utrecht University, Erme.
- Kilhamn, C. & Säljö, R. (2019). *Encountering algebra. A comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17577-1_4
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Nationellt Centrum för Matematik.
- Liljedahl, P. (2022). *Att bygga tänkande klassrum i matematik*. Gleerups.
- Lim, W., Lee, J., Tyson, K., Kim, H. & Kim, J. (2020). An integral part of facilitating mathematical discussions: Follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(2), 377–398. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3>
- Mergenthaler, E. & Stinson, C. (1992). Psychotherapy transcription standards. *Psychotherapy Research*, 2(2), 125–142. <https://doi.org/10.1080/10503309212331332904>
- Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249–266. <https://doi.org/10.1007/BF01273731>
- Moxhay, P. (2008). Assessing the scientific concept of number in primary school children. *International Society for Cultural-historical Activity Research* (s. 1–24). San Diego: ISCAR.
- Radford, L. & Roth, W.-M. (2017). Alienation in mathematics education: a problem solving considered from neo-Vygotskian approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 367–380. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9769-0>
- Repkin, V. (2003). Developmental teaching and learning activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 41(5), 10–33.
- Serin, H. (2018). Perspectives on the teaching of geometry: Teaching and learning methods. *Journal of Education and Training*, 5(1), 131–137. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_10
- Sinclair, N., Bartollini Bussi, M., Villers, M., Jones, K., Kortenkamp, K., Leung, U. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 48, 691–719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed* [elektronisk resurs].
- Vygotsky, L. (1963). Learning and mental development at school age. I B. Simon & J. Simon (Red.), *Educational Psychology in the U.S.S.R.* (s. 21–34). Rutledge & Kegan Paul.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological process*. Harvard University.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477. <https://doi.org/10.2307/749877>

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, XIX(1), 9–18. <https://doi.org/10.1007/BF03173234>

Zuckerman, G. (2007). Supporting children's initiative. *Journal of Russian and East European Psychology*, 45(3), 9–42. <https://doi.org/10.2753/RPO1061-0405450301>

Författarpresentationer

Helena Eriksson

Helena Eriksson är fil.dr och lektor i kombinerad tjänst mellan Borlänge kommun, Högskolan Dalarna och Stockholms universitet med intresse för undervisningsutvecklande forskning.

Marie Björk

Marie Björk är fil.lic. i specialpedagogik, lektor i Stockholms stad och arbetar som speciallärare i matematik på Björkhagens skola i Stockholm. Hennes forskningsintresse rör främst undervisningsutveckling och elevers lärande i grundskolan.

Jenny Fred

Jenny Fred är fil.lic. i matematikämnets didaktik och har en kombinerad tjänst som lärarutbildare och doktorand på Institutionen för ämnesdidaktik på Stockholms universitet. Hennes forskning handlar om hur undervisningen i algebra, för elever i årskurs F-3, kan integrera hållbarhetsfrågor som något mer än en kontext.

Gunilla Pettersson Berggren

Gunilla Pettersson Berggren är grundskollärare och förstelärare på Sjöstadsskolan i Stockholm. Hon är fil.mag/master i didaktik från Stockholms universitet. Hennes forskningsintresse rör undervisningsutveckling tillsammans med verksamma lärare.