FORSKUL
FORSKNING OM
UNDERVISNING
& LÄRANDE

Undervisning som utvecklar elevers förmåga att förstå likvärdiga bråk

Orginalartikel

Cecilia Sveider[1]*, Anja Thorsten[1] & Joakim Samuelsson[1]

[1] Linköpings universitet

*Korresponderande författare:
Cecilia Sveider
cecilia.sveider@liu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s. 39–59
DOI: [10.61998/forskul.v12i3.26656](https://doi.org/10.61998/forskul.v12i3.26656)
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-10-14

Sammanfattning

Syftet med studien, som ligger till grund för artikeln, är att bidra med kunskap om vilka möjligheter elever får för att lära sig förstå likvärdiga bråk vid olika lektionsdesigner. För att besvara detta syfte genomfördes en Learning study i tre cykler i årskurs 5 med 58 elever. Elevernas möjligheter till lärande analyserades både kvalitativt genom observation av undervisningen och kvantitativt genom test där eleverna fick visa sina kunskaper om likvärdiga bråk före och efter lektionerna. Lektionerna designades med stöd av variationsteori och matematikdidaktisk forskning. Resultaten visar att eleverna utvecklade sin förmåga i alla tre cykler, särskilt i den sista. Framgångsfaktorer i undervisningen inkluderade lärarens användning av kontraster, tallinjen och ett strukturerat sätt att hantera elevernas svar. Dessa faktorer visade sig vara effektiva för att främja elevernas lärande. Studiens resultat kan användas som underlag för lärare och forskare för att ytterligare öka kunskapen om hur undervisningen kan möjliggöra att elever lär sig förstå likvärdiga bråk.

Nyckelord: matematikundervisning, likvärdiga bråk, learning study, variationsteori

Abstract

The aim of the study is to contribute knowledge about the opportunities students get to learn to understand equivalent fractions through various enacted objects of learning in different lesson designs. To address this, a Learning study was conducted in three cycles in grade 5 with 58 students. Students' learning opportunities were analyzed both qualitatively through observations and quantitatively through tests where students demonstrated their knowledge of equivalent fractions before and after the lessons. Lessons were designed with the support of variation theory and mathematics education research. Results show that students improved their ability in all three cycles, especially the last one. Success factors included the teacher's use of contrasts, the number line, and a structured approach to student responses. These factors proved effective in promoting students' learning. Teachers and researchers can use the study's results to increase understanding of how teaching can enable students to learn equivalent fractions.

Keywords: Mathematics education, Equivalent fraction, Learning study, Variation theory

Introduktion

Rationella tal i bråkform är en central del av matematikundervisningen (Pedersen & Bjerre, 2021) och anses vara ett av de mest komplexa och utmanande områdena för elever att förstå (Barbieri m.fl.,2020; Fazio m.fl., 2016; Schneider & Siegler, 2010). För läsbarheten använder vi framöver enbart uttrycket *bråk*. Det avser då rationella tal i bråkform, det vill säga tal som uttrycks av formen $^{a}/_{b}$, där a och b tillhör heltalen (jfr Kiselmann & Mouwitz, 2008). En särskilt utmanande aspekt för elever är att förstå likvärdiga bråk, det vill säga bråk som representerar samma värde trots att de har olika täljare och nämnare (Kamii & Clark, 1995; Wong, 2010).

Elevers kunskaper om likvärdiga bråk är avgörande för deras förståelse av bråk och deras förmåga att utföra bråkberäkningar (Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007). För att anses ha förståelse för likvärdiga bråk behöver eleverna kunna se bråk som en mängd som mäts i relation till en referensenhet, konstruera bråk med hjälp av konkreta eller visuella representationer, använda symboliska representationer för att konstruera likvärdiga bråk, samt inse att likvärdiga bråk representerar samma mängd (Cathcart m.fl., 2006; Lamon, 2020). Dessutom behöver eleverna förstå det multiplikativa förhållandet hos likvärdiga bråk, vilket innebär att de kan identifiera sambandet mellan täljare och nämnare (Hecht m.fl., 2003; Van Steenbrugge m.fl., 2014) och förstå att ett bråk kan ha samma värde även om dess täljare och nämnare är olika. Att förstå likvärdiga bråk kräver en integrering och kombination av dessa aspekter (Wong, 2010).

Elever möter flera utmaningar när det gäller likvärdiga bråk. En av dessa är utmaningar är svårigheten att identifiera likvärdighet när bråken har olika uttryck och kräver förlängning med stora tal, som att förstå att $^{2}/_{3}$ och $^{28}/_{42}$ är likvärdiga (Boyer & Levine, 2012; Huinkers, 2002). Vissa elever kan även felaktigt tro att bråk är likvärdiga om de innehåller samma siffror, exempelvis att $^{2}/_{3}$ skulle vara likvärdigt med $^{3}/_{2}$ (Erlwanger, 1973; Skolverket, 2008). Elever tenderar att förbise att täljare och nämnare byter plats och anser detta vara irrelevant. En annan utmaning som påverkar elevers förmåga att uppfatta likvärdigheten är deras uppfattning av täljaren och nämnaren som separata heltal i stället för som en enhet, vilket gör att $^{2}/_{3}$ inte uppfattas som likvärdigt med $^{4}/_{6}$ (Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007; Tian m.fl., 2021). Elevers förståelse av likvärdiga bråk påverkas också av en bias mot heltalet, vilket innebär att de inte ser bråk som proportioner mellan två relaterade heltal som är kopplade till täljare och nämnare. Detta kan påverka deras förmåga att förstå att ett bråk kan uttryckas på olika sätt (Rodrigues m.fl., 2016; Siegler & Pyke, 2013). Flera studier har belyst dessa utmaningar i elevers bråkförståelse. Däremot behövs fortfarande mer kunskap om hur undervisningen kan designas för att eleverna ska utveckla detta kunnande (Lee m.fl., 2011; Mills, 2016). I flera tidigare studier (t.ex. Maunula, 2018; Sveider, 2021) har matematikundervisning analyserats med hjälp av variationsteorin, eftersom den fokuserar på relationen mellan undervisningen och lärandet av ett ämnesinnehåll. Föreliggande studie syftar till att bidra med kunskap om vilka möjligheter elever får för att lära sig förstå likvärdiga bråk vid olika lektionsdesigner.

Bråkundervisning

När lärare undervisar elever om bråk måste de ta hänsyn flera aspekter, såsom val av representationer (Sveider, 2021), exempel (Sun, 2015; Watson & Mason, 2006) och hur elevsvar hanteras (Maunula, 2018; Karlsson & Wennergren, 2014). Tidigare forskning visar att lärare använder olika representationer, som areamodeller och längd- eller linjemodeller (tallinjen), för att fördjupa elevernas förståelse av bråk (Van de Walle m.fl., 2018). Visuella modeller, såsom areamodeller med både cirkulära och rektangulära figurer används för att illustrera hur bråk utgör en del av en helhet (Sidney m.fl., 2019; Tunç -Pekkan, 2015). Även om areamodeller ofta används i undervisning om bråk finns det olika åsikter om deras effektivitet (Moss, 2005; Vig m.fl., 2014).

En lärare som däremot vill att eleverna ska förstå att ett bråk är ett tal som kan representeras som en position på en tallinje (se Cramer m.fl., 2019; Eriksson, 2015) kan använda längd- eller linjemodeller (Schumacher m.fl., 2018). Hamdan och Gunderson (2017) visade att elever som placerade bråk på en tallinje var mer framgångsrika vid jämförelse av bråk än de som använde areamodeller. Vikten av tallinjen i undervisning om bråk, där fokus riktas mot bråkets storlek, har betonats av flera forskare (t.ex. Baribieri m.fl, 2020; Cramer m.fl., 2019; Fuchs m.fl., 2017; Jordan m.fl., 2017; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Siegler m.fl., 2010). En fördel med att använda tallinjen är att den även kan användas för att representera negativa bråk och bråk som är mycket stora (Fuchs m.fl., 2021).

För att underlätta elevernas förståelse av bråk är det avgörande att läraren aktivt integrerar olika representationer i undervisningen, oavsett om de är konkreta, visuella bilder eller abstrakta symboler. Det är särskilt viktigt att koppla de visuella bilderna till de abstrakta representationerna (Flores. m.fl., 2018; Hudson & Miller, 2006), vilket kan hjälpa eleverna att fokusera på de centrala aspekterna av det matematiska innehållet och därigenom uppnå en djupare förståelse av matematiska begrepp (Dündar, 2015; Ekdahl, 2019; Lesh, 1981).

Forskning om hur olika undervisningsmetoder i helklass hjälper elever att tillägna sig kunskaper om likvärdiga bråk är begränsad. Tidigare studier har framför allt studerat individuell eller gruppvis undervisning med elever som beskrivs ha matematiksvårigheter (t.ex. Dyson m.fl., 2020; Eriksson, 2015; Flores m.fl., 2018; Siegler m.fl., 2011). Tidigare studier har exempelvis undersökt effekter av specifika *undervisningsmetoder* som explicit undervisning (t.ex. Ennis & Losiniski, 2019). Andra studier har utvärderat effektiviteten hos ett *matematikprogram*, så som Fraction Face Off! (FFO!), för fjärdeklassare (t.ex. Fuchs m.fl., 2013). Det finns även studier (t.ex. Wang m.fl., 2019) som har studerat elevers *självreglering*, där eleverna själva fick sätta upp mål, skatta sig själva och fick stöd i positivt tänkande. Det finns några studier om undervisning om likvärdiga bråk, såsom Levenson (2010) och Inagaki med flera (1999). I Levensons (2010) studie undersöktes vilken typ av *förklaring* eleverna föredrog i undervisningen om likvärdiga bråk. Resultaten visade att elever som bedömdes vara högpresterande elever föredrog förklaringar som innehöll abstrakta symboler, medan elever som bedömdes som medelpresterande eller lågpresterande elever föredrog förklaringar där bilder användes för att visualisera likvärdiga bråk. I Inagaki med flera (1999) observerades amerikanska och japanska matematiklektioner för att undersöka *feedback och frågor* från lärare, samt hur mycket tid som ägnades åt detta.

Resultaten visade ingen skillnad i interaktionstid mellan amerikanska och japanska matematiklektioner. Däremot hade de amerikanska lektionerna över tre gånger så många interaktioner. Under de amerikanska lektionerna bad lärarna eleverna att berätta vilken procedur de använt, medan de japanska lärarna uppmanade eleverna att förklara och motivera sina procedurer. De japanska elevernas svar var mer komplexa, och lärarna involverade andra elever i interaktionen, vilket gav dem möjlighet att utveckla resonemang och argumentation för sina procedurer. Studien visade att de japanska eleverna erbjöds mer generell förståelse som kunde appliceras på olika uppgifter än de amerikanska elever, trots liknande interaktionstid och matematikinnehåll. Ovanstående forskningsresultat har varit vägledande i konstruktionen av våra lektioner.

Variationsteori

En ytterligare utgångspunkt för våra lektioner och analys av dem är variationsteori. Grundläggande i teorin är att lärande alltid är riktat mot något, *ett lärandeobjekt,* (Marton, 2015). I denna studie är lärandeobjektet *att kunna identifiera bråk och att omvandla likvärdiga bråk*. För att eleverna ska kunna utveckla det avsedda kunnandet behöver de urskilja nya aspekter av lärandeobjektet som gör det möjligt att förstå det på ett nytt sätt. Dessa aspekter benämns som *kritiska aspekter* (Marton, 2015). För att undervisningen ska bli framgångsrik behöver läraren identifiera vilka aspekter som är kritiska för den aktuella elevgruppen. Det gör att undervisningen riktas mot det som är utmanande för eleverna i relation till det som är centralt för att förstå lärandeobjektet. Kritiska aspekter går att finna genom att analysera hur eleverna erfar lärandeobjektet innan de har fått undervisning (Pang & Ki, 2016). I en elevgrupp brukar det vanligen finnas ett begränsat antal sätt att förstå lärandeobjektet på.

Marton (2015) beskriver att lärande möjliggörs främst när vi erfar skillnader, inte likheter, vilket gör att det är en bra grundprincip att utgå från i undervisningen. Det innebär att kontrast och jämförelser är kraftfulla verktyg för att möjliggöra för eleverna att urskilja nya aspekter av ett lärandeobjekt. Aspekterna blir möjliga att urskilja för att en dimension av variation öppnas när två värden inom dimensionen kontrasteras (Lo, 2014; Marton, 2015). Om läraren till exempel vill att eleverna ska urskilja formen på trianglar så kan läraren öppna en dimension av variation genom att *variera* aspekten form, vilket kan göras genom att kontrastera en triangel mot en kvadrat. Andra aspekter, så som färg, storlek är däremot *invarianta*, vilket innebär att de är lika. Genom att variera den fokuserade aspekten mot en invariant bakgrund riktas elevernas uppmärksamhet mot den kritiska aspekt som är i fokus, i det föregående exemplet innebär det att själva formen. När en aspekt är utskild, bör läraren använda sig av *generalisering*. Då varieras systematiskt de aspekter som inte är kritiska, vilket innebär att en aspekt varieras i taget, samtidigt som övriga aspekter är invarianta (Lo, 2014; Marton, 2015). I föregående exempel innebär det att den fokuserade aspekten form är invariant, men att andra aspekter varieras, till exempel kan trianglar med olika vinklar jämföras för att på så sätt peka ut att det är fortfarande trianglar.

Genom att analysera hur variationsteorins grundprinciper iscensätts i undervisningen, och sätta detta i relation till elevers lärande, går det att analysera vilka lärandemöjligheter eleverna erbjöds (Marton, 2015).

Metod

En learning study (LS) genomfördes för att undersöka vilka möjligheter elever får för att lära sig förstå likvärdiga bråk vid olika lektionsdesigner. Studien genomfördes av två forskare i samarbete med två erfarna lärare. Processen bestod av tre cykler bestående av följande steg: förtest, identifiering av kritiska aspekter, planering av två lektioner, genomförande av lektionerna, eftertest och analys.

Deltagare och urval i studien

Vi valde lärare med vilka vi redan hade en kontakt, vilket innebär att urvalet var målinriktat (se Bryman, 2018). Båda lärarna var erfarna och hade visat intresse för att utveckla sin matematikundervisning. De två lärarna som deltog i studien arbetade på varsin skola men på samma ort. I studien deltog tre klasser från årskurs 5. Klasserna valdes ut för att de fanns på samma skolor som lärarna arbetade och där lärarna hade etablerat kontakt med eleverna. Total deltog 58 elever fördelade på tre klasser; cykel 1 (19 elever), cykel 2 (16 elever) och cykel 3 (23 elever). Två av klasserna var placerade på en skola, medan den tredje klassen fanns på en annan skola. Båda skolorna är kommunala och belägna i en mindre ort i mellersta Sverige.

För- och eftertest

För att utvärdera elevernas kunskaper utvecklades ett test som fungerade både före och efter undervisningen. Konsistensen mellan testen bedömdes vara 0,75 enligt Cronbachs alfa. Syftet med testet var att (a) analysera elevernas förmåga att hantera bråk och (b) utvärdera om det fanns skillnader i elevernas prestationer på uppgifter om likvärdiga bråk före och efter undervisningen (jfr Marton, 2015). För att säkerställa att eleverna förstod uppgifterna i testet, genomgick uppgifterna en pilottestning med en grupp elever som inte deltog i den aktuella undervisningen.

Testet bestod av tre kategorier (testvariabler): (1) att identifiera och skilja bråk från decimaltal, heltal, negativa tal och tal skrivna i procentform, (2) att uttrycka likvärdiga bråk med hjälp av areamodeller och (3) att uttrycka likvärdiga bråk utan hjälp av areamodeller. Syftet med den första kategorin var att bedöma elevernas kunskap om bråk som matematiskt begrepp. För att få maximala poäng behövde eleverna identifiera både ensiffriga bråk, exempelvis $\frac{7}{8}$ och tvåsiffriga bråk som $\frac{48}{63}$, som bråk. Maximalt antal poäng för denna kategori var 1 poäng. Syftet med den andra kategorin var att bedöma elevernas förmåga att, med hjälp av visuella representationer, skapa likvärdiga bråk. För att få full poäng behövde eleverna kunna rita två bråk som var likvärdiga med det ursprungliga bråket, vilket innebar att de hade samma numeriska värde. Maximalt antal poäng för denna kategori var 2 poäng. Den tredje kategorin, som utgjorde huvuddelen av testet, inkluderade tre olika typer av uppgifter. Syftet med dessa uppgifter var att bedöma elevernas förmåga att identifiera likvärdiga bråk, såsom $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, samt att identifiera bråk som inte var likvärdiga, såsom $\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{1}$. Dessutom skulle eleverna själva kunna skriva bråk som var likvärdiga med givna bråk, exempelvis $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{10}$. Den sista uppgiften inkluderades för att bedöma elevernas förmåga att hantera omvandling av nämnaren och eller täljaren. Maximalt antal poäng för denna kategori var 9 poäng. Testet genomfördes både före och efter eleverna undervisades om likvärdiga bråk. Testet genomfördes i början av studien i alla tre klasser. Samma test utfördes sedan igen i klasserna i cykel 2 och 3, för att testresultaten skulle vara nära forskningslektionerna. Resultaten från andra testomgången skilde sig enbart marginellt från den första.

Kvalitativ analys

För att få insikt om hur eleverna erfor likvärdiga bråk och för att identifiera kritiska aspekter genomfördes även en kvalitativ analys av förtesten som genomfördes i de tre klasserna. Analysen inspirerades av Pang och Kis (2016) beskrivning av att kritiska aspekter kan identifieras genom att utgå från en analys av hur elever erfar lärandeobjektet.

Initialt analyserades hur eleverna erfor bråk. Detta gjordes genom att först gruppera likartade lösningar på uppgifterna, vilket gjorde att vi kunde identifiera de olika strategier och tillvägagångssätt som eleverna använde (se första kolumnen i tabell 1). I nästa steg använde vi de identifierade strategierna för att beskriva hur eleverna erfor bråk. Vi utgick då från andra ordningens perspektiv (se Marton & Booth, 2000), vilket innebar att vi försökte beskriva hur eleverna förstår bråk. Vi ställde oss då bland annat följande frågor: *Om denna strategi används, hur förstår då eleverna bråk? När eleven löser uppgiften på detta sätt, vad fokuserar eleven på då?* På så sätt kunde vi fånga de kvalitativt skilda sätt som bråk kan erfaras som, utifrån vårt dataunderlag (se andra kolumnen i tabell 1). Detta resulterade i fem kategorier.

Baserat på dessa kategorier identifierades kritiska aspekter genom att utgå från varje kategori och analysera vad eleverna ännu inte hade urskilt och vad de behöver urskilja (se tredje kolumnen i tabell 1).

Kvantitativ analys

I den kvantitativa analysen användes beroende t-tester för att utvärdera om det fanns några medelvärdesskillnader i elevernas prestationer före och efter LS-cyklerna (1–3) på de tre testvariablerna vid både för- och eftertesten. Om det fanns en signifikant skillnad mellan för- och eftertest användes Hedges' g för att beräkna effektstorleken. Hedges' g-värden på 0,2, 0,4–0,5 och 0,8 eller högre indikerar en liten, måttlig eller betydande effekt. Om empirin inte uppfyllde kraven för normalfördelning, enligt Hair med flera (2010)[1], utfördes inga t-tester.

Arbete med lektionsdesign och analys under pågående Learning study

Lektionerna designades gemensamt av forskar-lärargruppen med utgångspunkt i variationsteorin och tidigare forskning om bråkundervisning (se bilaga 1). Syftet var att synliggöra de kritiska aspekter som identifierades i förtestet. Vi strävade efter att skapa kontraster som riktade elevernas uppmärksamhet mot de kritiska aspekterna (jfr Marton, 2015). Dessutom användes flera representationer, särskilt tallinjen (jfr Fuchs m.fl., 2017; Jordan m.fl., 2017; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Siegler m.fl., 2010), för att stödja elevernas förståelse av likvärdiga bråk.

I varje cykel höll en av de deltagande lärarna i två lektioner. Lektionerna observerades av en av forskarna och dokumenterades genom videoinspelning med hjälp av en iPad. Ett par dagar efter lektionerna genomförde eleverna eftertestet för att utvärdera deras kunskapsutveckling.

Efter varje cykel analyserades medelvärdesskillnaden mellan för- och efterresultaten. Då söktes efter vilka områden eleverna hade utvecklats på. Därefter analyserades lektionerna med fokus på hur lärandeobjektet och de kritiska aspekterna framträdde, samt om andra aspekter visade sig vara kritiska än de som hade identifierats i förtestet. Inga nya kritiska aspekter framkom på detta sätt. Efter varje cykel genomfördes däremot revideringar avseende hur de kritiska aspekterna synliggjordes.

Reanalys av lektionerna

Efter att lektionerna hade genomförts analyserades de inspelade och transkriberade lektionerna i förhållande till resultaten från för- och eftertesten ännu en gång. Analysen utfördes av de ursprungliga forskarna samt en tredje forskare som tidigare inte hade varit involverad i studien.

Baserat på variationsteoretiska antaganden (utifrån Lo, 2014; Marton, 2015) analyserades initialt varje cykel separat med fokus på hur lärandeobjektet och de kritiska aspekterna framträdde. Analysen riktades mot vad som blev i förgrunden i undervisningen. Det innebar hur läraren och eleverna pratade om dessa exempel samt hur elevsvaren användes. Analysen sattes också i relation till elevers lärande både så som det uttrycks på lektionen och det som framkom i skillnaden mellan för- och eftertest.

I nästa steg jämfördes resultaten från för- och eftertesten mellan cyklerna för att identifiera specifika undervisningsmoment där elevernas prestationer skilde sig åt. Dessa sekvenser analyserades sedan djupgående utifrån variationsteoretiska antaganden för att förstå vad som eventuellt påverkade elevernas resultat. Jämförelserna fokuserade på hur de kritiska aspekterna framträdde avseende variationsmönster och hur läraren hjälpte eleverna i att rikta sin uppmärksamhet mot dessa aspekter.

Etik

För att säkerställa efterlevnad av etiska principer (se Vetenskapsrådet, 2017) gav eleverna och deras vårdnadshavare skriftligt samtycke att delta i projektet. Samtliga elever deltog i undervisningen, förutom de som inte gav sitt medgivande att bli filmade. För att skydda elevernas och lärarnas konfidentialitet, inkluderas inga namn, skolor eller orter i artikeln. Det insamlade materialet används endast i forskningssyfte och förvaras säkert i enlighet med riktlinjerna vid Linköpings universitet.

1 Enligt Hair m.fl. (2010) bör data anses vara normalfördelad om skevheten ligger mellan -2 och +2 samt kurtosis mellan -7 och +7.

Resultat

Resultatet presenteras i två delar. Den första delen beskriver dels resultat från den kvalitativa analysen, dels resultat från kvantitativa analysen av elevtesterna. Den andra beskriver hur de kritiska aspekterna hanterades i undervisningen.

Nedan presenteras först analysen av elevernas olika tillvägagångssätt och de kritiska aspekter som identifierades baserat på dem. Därefter beskrivs de resultat som eleverna fick på för- och eftertesten.

Elevers olika sätt att erfara likvärdiga bråk och identifierade kritiska aspekter

Genom den kvalitativa analysen identifierades fem olika sätt att erfara likvärdiga bråk. I tabell 1 redovisas, i den första kolumnen, elevers sätt att erfara bråk. Kolumn två presenterar de strategier som eleverna använder för att lösa uppgifterna. Den tredje kolumnen specificerar vilken kritisk aspekt som har identifierats i relation till varje kategori. För att förstå likvärdiga bråk behöver de urskilja vad ett bråk är. Därför handlar de första strategierna om bråk och de resterande om likvärdiga bråk. De två översta kritiska aspekterna är likartade, skillnaden består i att den understa av dem är inriktad mot ett specifikt sätt att erfara bråk som begränsade till täljare och nämnare mindre än 10. I resultatdelen *Hantering av de kritiska aspekterna under lektionerna* kommer dessa kritiska aspekter behandlas under samma rubrik.

Tabell 1
Elevers erfaranden, strategier och kritiska aspekter.

Elevers erfarande	Strategier	Kritisk aspekt
Ser decimaltal som bråk	Ringar in 23,67 som bråk. Skiljer inte på bråktal, decimaltal och procent.	Ett bråk uttrycks i formen ${}^{a}/_{b}$.
Ser bråk som begränsade till täljare och nämnare mindre än 10	Ringar in ${}^{7}/_{8}$ men inte ${}^{44}/_{64}$. Vid förlängning av bråk överskrids aldrig talet 10 i nämnaren eller täljaren (${}^{1}/_{10} = {}^{2}/_{5}$).	Ett bråk uttrycks i formen ${}^{a}/_{b}$ oberoende av vilka tal som står i täljaren och nämnaren.
Ser likvärdiga bråk som likadana tal på ny plats.	Byter plats på täljaren och nämnaren (${}^{1}/_{4} = {}^{4}/_{1}$).	Talens position ändrar bråkets värde.
Ser likvärdiga bråk som en additiv relation det vill säga nämnare eller täljare adderas med samma tal.	Förlänger bara täljaren (${}^{2}/_{5}= {}^{4}/_{5}$). Förlänger bara nämnaren (${}^{3}/_{4}= {}^{3}/_{8}$).	Det finns en multiplikativ relation och förhållandet mellan nämnare och täljare är proportionellt.
Ser likvärdiga bråk som en matematisk procedur med addition.	Adderar täljaren och nämnaren med samma tal (${}^{3}/_{4}= {}^{4}/_{5}$).	För att förlänga bråk multipliceras täljaren och nämnaren med samma tal.

Elevernas prestationer på för- och eftertest

Elevernas prestation på matematiktestet presenteras för varje cykel. Beskrivande statistik visas, i form av medelvärde (M), standardavvikelse (SD) och medelvärdesskillnad (MD), för elevernas prestationer avseende (a) Bråkidentifiering (BI), (b) Likvärdiga bråk med areamodeller (LBMA), och (c) Likvärdiga bråk utan areasmodeller (LBUA), se tabell 2.

Analysen av elevernas prestationer före och efter undervisning (cykel 1) visade att eleverna presterade signifikant bättre på uppgifter relaterade till bråkidentifiering (BI), t(19) = 2,99, p =0,008 och uppgifter om likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA), t(19) =3,17, p = 0,005 . På bråkidentifieringsuppgiften observerades en stor skillnad i prestation före och efter undervisning (Hedges´g = 0,95), medan likvärdiga bråk utan areamodeller visade en måttlig förbättring (Hedges´g = 0,55).

I cykel 2 presterade eleverna signifikant bättre på eftertestet jämfört med förtestet på bråkidentifieringsuppgiften, t(16) = 2.40, p = 0,029, samt på uppgifterna som involverade likvärdiga bråk utan areamodeller, t(16) = 4,26, p < 0,01. En betydande effektstorlek observerades för utvecklingen av prestationen i uppgifter med likvärdiga bråk utan areasmodeller (Hedges´g = 0,82), medan en måttlig effektstorlek påvisades för utvecklingen av prestationen i bråkidentifieringsuppgiften (Hedges´g = 0,73).

I cykel 3 observerades signifikanta effekter på uppgiften för att identifiera bråk, t(23) = 3,49, p = 0,02, och på uppgifter för likvärdiga bråk utan areamodeller, t(23) = 6,11, p < 0,01. Effektstorleken avseende skillnaden mellan prestation före och efter undervisning var för likvärdiga bråk utan areamodell (Hedges´g = 1,76) och för förändringen av prestationen på uppgiften för att identifiera bråk (1.1) var betydande.

Tabell 2

Resultat från för- och eftertest, cykel 1–3.

	Cykel 1 n=19					Cykel 2 n=16					Cykel 3 n=23				
Testvariabel	Förtest M (SD)	Eftertest M (SD)	MD	t (19)	Hedges´g	Förtest M (SD)	Eftertest M (SD)	MD	t (16)	Hedges´g	Förtest M (SD)	Eftertest M (SD)	MD	t (23)	Hedges´g
BI	0.50 (0.51)	0.90 (0.31)	0.40	2.99**	0.95	0.61 (0.50)	0.91 (0.24)	0.30	2.40*	0.73	0.46 (0.51)	0.92 (0.28)	0.46	3.49**	1.10
LBMA	1. 85 (0.52)	1.80 (0.37)	-0.05	0.75	0.11	1.74 (0.62)	1.76 (0.56)	0.02	0.37	0.03	1.96 (0.19)	2.00 (0.00)	0.04	Ns	0.00
LBUA	3.35 (3.63)	5.50 (4.22)	2.15	3.17*	0.55	2.96 (3.18)	5.76 (3.75)	2.80	4.26**	0.82	3.93 (3.34)	8.64 (1.63)	4.71	6.11**	1.76

Not. * p < 0,05. ** p < 0,001

Sammanfattningsvis visar resultaten varierande effekter inom varje cykel för de olika testvariablerna. I cykel 1 framträdde en betydande positiv effekt för bråkidentifiering (BI) med en Hedges´g effektstorlek på 0,95, medan effekten för likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) var mindre positiv med en Hedges´g effektstorlek på 0,55. I cykel 2 var effekten för bråkidentifiering (BI) något mindre med en Hedges´s g effektstorlek på 0,73, medan effekten för likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) ökade till 0,82. Cykel 3 uppvisade en markant ökning av effekten för både bråkidentifiering (BI) med en Hedges´g effektstorlek på 1,10 och likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) med en Hedges´g effektstorlek på 1,76.

Inom varje cykel observerades också ökningar i medelvärden för testvariablerna BI och LBUA. För bråkidentifiering (BI) observerades en gradvis ökning från 0,4 (cykel 1) till 0,46 (cykel 3). Likaså ökade medelvärdesskillnaden för likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) från 2,15 (cykel 1) till 4,71 (cykel 3). Dessa resultat antyder en positiv utveckling över tid inom varje cykel för båda testvariablerna. De flesta elever förbättrade sina resultat avseende både bråkidentifiering och förståelse av likvärdiga bråk utan visuella modeller efter att de hade fått undervisning.

Hantering av de kritiska aspekterna under lektionerna

I nedanstående resultat framställs hur de kritiska aspekterna synliggörs i undervisningen.

Ett bråk uttrycks i formen $^a/_b$

En kritisk aspekt vad gäller lärande av bråk är att förstå hur ett bråk uttrycks. I denna studie handlar det om att eleverna kan särskilja hur bråk, decimaltal och procent uttrycks och förstå skillnaden i funktionen hos bråkstrecket och decimaltecknet. De behöver också urskilja att ett bråk kan ha både ensiffriga och tvåsiffriga nämnare och täljare.

För att denna aspekt skulle bli urskiljningsbar för eleverna, fick eleverna i uppgift att särskilja bråk, procent och decimaltal från varandra. Läraren visade tre separata korgar, märkta med orden ”bråk”, ”procent”, och ”decimaltal” och placerade talen 25,8, $^1/_4$, 33%, $^{27}/_{65}$ och 4% över dem. Genom att öppna en dimension av variation av hur rationella tal och tal i procentform kan uttryckas hjälpte läraren eleverna att rikta sin uppmärksamhet mot de olika sätten att skriva tal. Det var viktigt att inkludera bråk där täljaren och nämnaren överskred 10, eftersom detta hade visat sig vara utmanande för vissa elever.

Därefter ledde läraren en diskussion där lärare och elever gemensamt placerade talen i sina respektive korgar. Under denna aktivitet fick eleverna bidra med förslag och läraren klargjorde vilka tecken som användes i de olika uttrycken. Ett exempel på en sådan aktivitet ses i excerpt 1.

Excerpt 1. Utdrag cykel 3, lektion 1

Elev:	25 komma 8 ska vara i decimaltal.
Lärare:	Det är ju ett decimaltal ja det finns ett decimaltecken där [pekar].
Elev:	4 procent ska vara i procent.
Lärare:	Den ska ner där ja för där har vi ju procenttecknet där [pekar].
Elev:	Tjugosju av sextiofem ska till bråk, precis som en fjärdedel
Lärare:	Precis, tjugosju sextifemtedelar och en fjärdedel ska ju ner till bråkkorgen.

I excerpt 1 (cykel 3, lektion 1) framgår det att läraren förklarade på vilket sätt de olika talen skrivs, inklusive decimal- och procenttecken och bråkstreck. Genom att det finns en variation avseende hur rationella tal och procenttal skrivs, möjliggör det att eleverna lättare urskiljer dessa skillnader. I denna studie använde vi dock inte samma siffror i de olika talen, vilket gör att även dessa varierar. Detta skulle kunna ha påverkat kontrastens tydlighet. Baserat på resultaten så verkar det emellertid inte ha haft avgörande betydelse för elevernas lärande.

Dessutom var läraren noga med att korrekt uttrycka talen verbalt, även om eleverna inte gjorde det. Detta illustreras när en elev säger ”tjugosju av sextiofem” (excerpt 1, cykel 3, lektion 1). I detta exempel bekräftar läraren svaret, samtidigt som läraren ändrar formuleringen och betonar ”delar” i uttrycket för att matematiskt korrekt uttrycka talet. Genom att variera uttryckssättet av bråket möjliggjorde läraren att eleverna kunde urskilja hur talet ska uttryckas.

Denna aktivitet genomfördes på samma sätt under samtliga tre cykler, eftersom nästan alla elever redan i den första cykeln förbättrade sin förmåga att identifiera bråk, se tabell 2, cykel 3, testvariabel BI.

Talens position ändrar bråkets värde

En annan kritisk aspekt är att eleverna behöver urskilja att likvärdiga bråk handlar om förhållandet mellan bråken och att detta förhållande förändras när täljaren och nämnaren byter plats.

På en övergripande nivå förändrades undervisning från att ge eleverna en möjlighet att själva notera kontraster till att lärarna explicit uppmärksammade eleverna på kontraster och kontrollerade hur eleverna uppfattat innehållet.

I cykel 1 inleddes momentet genom att läraren presenterade det matematiska uttrycket ½, både som en halv rektangel och genom en halv sträcka på tallinjen. Eftersom ½ är invariant blir representationerna i förgrunden, vilket möjliggör att eleverna urskiljer att ½ kan representeras på olika sätt. Med detta som utgångspunkt skrev läraren bråkuttrycken ½ och 2⁄1 på tavlan, vilket skapade en kontrast där enbart positionen på talen i täljaren och nämnaren varierade. Läraren ställde sedan en fråga till eleverna om de båda bråken var lika mycket värda. Genom att ställa den frågan gavs eleverna en möjlighet att se att talens position i ett bråk påverkar dess värde. En elev fick möjlighet att uttrycka sina tankar kring detta, se excerpt 2 (cykel 1, lektion 1) nedan:

Excerpt 2. Utdrag cykel 1, lektion 1

Lärare:	Är de lika mycket värda?
Elev:	De är inte samma.
Lärare:	De är inte samma. Varför är de inte samma?
Elev:	Du har bytt plats på dem.
Lärare:	Jag har bytt plats på dem och då blir det inte samma värde.

Elevens fokus riktades mot om talen har samma position, snarare än mot att jämföra om uttrycken har samma numeriska värde. Läraren hanterade detta elevinspel genom att upprepa det eleven sa. Vid elevens andra svar gjorde läraren ett tillägg och sa att ”då blir det inte samma värde” (excerpt 2, cykel 1, lektion 1). Det indikerar att eleven riktade sitt fokus mot positionen, men detta utforskades inte vidare. Läraren konstaterade sedan att det inte blir samma värde men förklarade inte varför det är så, vilket innebar att eleverna lämnades själva att förstå det. Eleverna fick därför inte hjälp med den begreppsliga förståelsen av bråk. I ovanstående exempel (excerpt 2, cykel 1, lektion 1) användes en kontrast, men eftersom enbart talens position blev i förgrunden, och inte hur talens position påverkade bråkens värde, minskade elevernas lärandemöjligheter.

I cykel 3 genomfördes förändringar för att förbättra elevernas möjlighet till lärande. Ordningen på vissa moment ändrades samtidigt som läraren introducerade både benämningen och funktionen av täljaren och nämnaren utifrån bråket ½. Detta innebär att elevernas uppmärksamhet inte enbart riktades mot benämning, som i cykel 1, utan även mot den begreppsliga förståelsen. För att göra detta använde läraren areamodellen i form av en rektangel som var uppdelad i två lika stora delar. I excerpt 3 nedan exemplifieras lärarens förklaring:

Excerpt 3. Utdrag cykel 3, lektion 1

Lärare:	Täljaren visar ju hur många utav de här delarna som jag har fyllt i, och nämnaren visar hur många delar jag har delat någonting i [pekar]. Så här har vi en halv. Om jag skulle ha fyllt i hela den här [fyller i andra halvan], vad hade jag fått för bråktal då? Om jag hade fyllt i båda delarna?

I citatet från excerpt 3 (cykel 3, lektion 1) framgår det att läraren förklarar både täljarens- och nämnarens funktion kopplat till det givna exemplet som visas på tavlan. Dessutom ger läraren en generell förklaring av deras betydelse. Bråket är invariant och representationen av bråket varierar, vilket gör att uttryckssättet kommer i förgrunden, särskilt när talen 1 respektive 2 i bråket kopplas ihop med den visuella representationen. När läraren sedan frågar vilket bråk det blir när andra halvan fylls i, riktas uppmärksamheten mot täljarens funktion, eftersom det är den som varierar mot en invariant bakgrund, då nämnaren inte ändras i det svar som eftersöks ($\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{2}$). Eleverna får också stöd i hur de kan tänka för att koppla ihop den visuella representationen med det matematiska uttrycket.

När kontrasten ($\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$) sedan introduceras gör läraren en koppling till det förtest som eleverna genomfört (se excerpt 4, cykel 3, lektion 1), vilket inte förekom i cykel 1. Denna koppling kan hjälpa eleverna att se relevansen i de exempel som läraren presenterar.

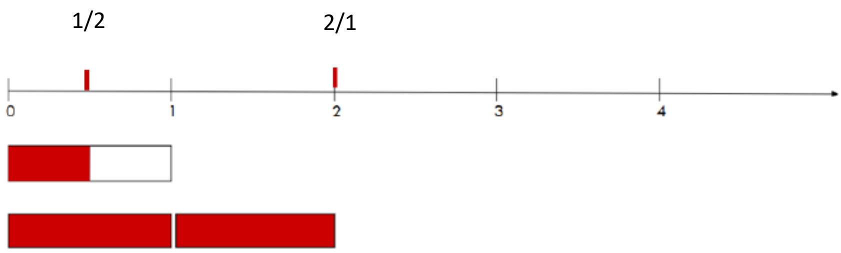
Excerpt 4. Utdrag cykel 3, lektion 1

Lärare:	När vi gjorde det här förtestet, kommer ni ihåg? Då fick man sätta ut värdet på olika bråk och då var det några elever som skrev så här [skriver] att en halv var lika med två endelar ($\frac{1}{2} = \frac{2}{1}$). Men nu undrar jag: Är det så? Om ni funderar lite, om ni kopplar det till vad ni vet om täljaren och nämnaren och så. Är det här två bråken lika mycket värda? Prata med dem du sitter bredvid. [Eleverna pratar med varandra] Är de här bråken lika mycket värda?
Elev:	Nej.
Lärare:	Varför inte då?
Elev:	För att det andra talet … det här ju två hela.
Lärare:	Jättebra. Ska jag visa vad du sa?

I excerptet 4 (cykel 3, lektion 1) syns att läraren först knyter an till elevernas tidigare uppfattning, men också uppmanar dem att använda den kunskap om täljarens och nämnarens funktion som de precis har gått igenom när de diskuterar skillnaden mellan de två bråken. Detta möjliggör att elevernas tidigare sätt att förstå bråk kan kontrasteras mot ett nytt sätt, vilket gör att det nya sättet blir lättare att urskilja.

Därefter fortsätter läraren genom att, baserat på elevens inspel, använda areamodellen och tallinjen för att illustrera innebörden. Läraren visar en halv och kontrasterar detta mot två hela och gör samtidigt en koppling till de matematiska uttrycken. Detta följs av att läraren visar samma tal på tallinjen och markerar både $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$ (se figur 1).

Figur 1



Tallinje och rektanglar som visar bråken 1/2 och 2/1

Genomgående visas båda talen samtidigt, först i areamodellen och sedan på tallinjen. De kopplas också direkt samman med de matematiska uttrycken. I denna sekvens sker en progression där eleverna först får se kontrasten mellan $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$ i rektanglarna, för att sedan också se dem på tallinjen. Det blir då också en kontrast mellan de båda representationerna. I den kontrasten är bråken invarianta och representationerna varierar, vilket gör att uttrycksformen för bråken blir i förgrunden.

Sekvensen avslutas med att även $\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{1}$ visas på samma sätt. På så sätt får eleverna ytterligare ett exempel (både via areamodellen och på tallinjen) på att de olika bråken är olika stora och att de hamnar långt ifrån varandra på tallinjen, vilket möjliggör en generalisering av de insikter från de tidigare exemplen. I cykel 3 är det läraren som använder kontraster för att synliggöra de kritiska aspekterna. Läraren kontrollerar hur undervisningen tagits emot och går utifrån elevernas inspel vidare.

Konstruktion av likvärdiga bråk görs med multiplikation

För att förlänga bråk behöver eleverna urskilja att för att behålla proportionaliteten mellan bråken behöver både täljaren och nämnaren multipliceras med samma tal.

En gemensam utgångspunkt i alla cykler var att introducera hur bråket 1/2 kunde uttryckas på olika sätt och markera dess position på tallinjen som ett inledande moment. Eleverna fick föreslå alternativa sätt att uttrycka samma värde. Undervisningen kring denna kritiska aspekt hanterades på delvis olika sätt i de tre cyklerna, med betydande skillnader avseende hur läraren arbetade med de kontrasterande exemplen och hur elevinspelen användes i relation till det.

Excerpt 5 (cykel 1, lektion 2) visar följande samtal mellan elever och lärare efter att läraren har visat eleverna en halv på tallinjen och frågar hur det ska skrivas.

Excerpt 5. Utdrag cykel 1, lektion 2

Lärare:	[Skriver $\frac{1}{2}$ vid markeringen på tallinjen] Där har vi en halv … Nu skulle jag vilja att vi hittar på andra bråk som är lika mycket som en halv. De ska vara värda lika mycket som en halv. Vi ska skriva fler bråk här. Det ska vara lika mycket som en halv.
Elev:	Tre delat på sex.
Lärare:	Tre delat på sex [skriver $\frac{3}{6}$ under $\frac{1}{2}$]. Det är lika mycket som en halv.
Elev:	Fem delat på tio.
Lärare:	Fem delat på tio [skriver $\frac{5}{10}$ under $\frac{3}{6}$].

I excerpt 5 (cykel 1, lektion 2) framgår det att läraren uppmanar eleverna att skapa bråk som är likvärdig med en halv. Efter denna sekvens fortsätter eleverna att ge exempel på samma sätt, och även dessa skrivs upp och upprepas av läraren. Här öppnas en dimension av variation som handlar om olika sätt att skriva en halv, värdet (dvs. en halv) är invariant, men sättet det skrivs på varierar. Detta gör att elevernas uppmärksamhet riktas mot att samma bråk kan uttryckas på olika sätt.

Av excerpt 5 framgår att läraren genomgående upprepar elevernas formuleringar. Läraren öppnar inte upp en dimension av variation som handlar om hur bråk uttrycks. Det innebär att när eleverna uttrycker bråket som division, såsom ”tre delat på sex”, kontrasteras inte det mot det korrekta sättet att uttrycka bråk det vill säga ”tre sjättedelar”. Detta gör att ett felaktigt tanke- och uttryckssätt riskerar att befästas. Dessutom förlorar eleven lärandemöjligheten i att förstå varför det är ett felaktigt uttryckssätt.

Efter att eleverna har fått ge exempel på hur en halv kan uttryckas fokuserar läraren (se excerpt 6, cykel 1, lektion 2) på den matematiska förklaringen till att två bråk kan vara lika mycket värda. Läraren skriver $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ och frågar:

Excerpt 6. Utdrag cykel 1, lektion 2

Lärare:	Vad har hänt här? Vad har vi gjort med den här ettan för att göra den till en tvåa? Vad har vi gjort med tvåan för att det ska bli fyra?
Elev:	Man har plussat på en till etta så att det blir två och en till tvåa så att det blir fyra.

Lärare:	Ja. Här skulle man kunna tänka att det skiljer ett här emellan [pekar på täljarna] och att det skiljer två här emellan [pekar på nämnarna]. Absolut.

Ur excerpt 6, cykel 1, lektion 2 framgår att lärarens första fråga leder elevernas uppmärksamhet till täljaren och nämnaren som separata enheter, istället för att betrakta bråken som helheter. Elevinspelet bekräftar detta tillvägagångssätt, med fokus på täljaren och nämnaren separat och använder en additiv strategi istället för ett multiplikativ. Läraren bekräftar elevens svar med ordet ”Absolut”, vilket riskerar att förstärka uppfattningen att bråk kan förlängas med hjälp av additiv strategi. Excerptet ovan följs av att läraren frågar: ”Kan vi tänka något annat räknesätt än addition?”. Detta öppnar upp en dimension av variation där alternativa strategier kan ges eftersom uppgiften är invariant och strategierna varierar. En elev föreslår då att det går att rita ”en rund figur” som delas i fyra delar och fylla i två av dem och att det blir en halv. Läraren bekräftar elevens förslag och sedan sker nedanstående konversation (se excerpt 7, cykel 1, lektion 2).

Excerpt 7. Utdrag cykel 1, lektion 2

Lärare:	NN var ju inne på ett spår att vi har gjort någonting med ettan för att det ska bli två och vi har gjort något med tvåan för att det ska bli fyra. Vad är det vi har gjort då?
Elev:	Dubblat.
Lärare:	Vi har dubblat ser ni? Vad multiplicerar jag med när vi har dubblat?
Elev:	Två.
Lärare:	Med två. Kolla här! Med två tänker vi här (pekar på täljaren) och med två tänker vi här. [Skriver ·2 i täljaren och nämnaren] Ser ni … Ett multiplicerat med två blir … två va? Och två multiplicerat med två blir …?
Elev:	Fyra.
Lärare:	Ja det blir fyra, så vi har alltså dubblat, vi har dubblat både i täljaren och i nämnaren och det är viktigt.

I ovanstående excerpt 7 (cykel 1, lektion 2) finns inslag av att läraren lotsar eleverna genom att ställa korta frågor som leder till rätt svar, men det kan samtidigt innebära att eleverna inte förstår grundprincipen bakom uppgiften fullt ut. När eleven föreslår dubbling som metod är inte det felaktigt, men det kan innebära att eleven använder en additiv strategi för att omvandla bråket, istället för en multiplikativ. När läraren introducerar att dubbling innebär multiplikation kan det fungera som en kontrast mellan att använda en additiv respektive en multiplikativ strategi.

I hanteringen av denna uppgift öppnas en dimension av variation genom att olika sätt att tänka kring uppgiften tas upp, men det är ändå inte självklart att det ökar elevernas lärandemöjligheter. De lösningsförslag som kommer från eleverna utforskas inte gemensamt, utan det blir otydligt (framför allt i excerpt 6, cykel 1, lektion 2) att elevens svar inte fungerar matematiskt. De olika sätten att hantera uppgiften skulle kunnat användas som kontraster, där elevens sätt att tänka skulle utforskas systematiskt i relation till matematiskt hållbara lösningar.

En analys av elevernas lärande avseende denna kritiska aspekt visade att flera elever hade förbättrat sina resultat, testvariabel LBUA, men många hade fortfarande svårt. Analysen av undervisningen visade också på flera problem, vilket gjorde att dessa moment reviderades. Inför cykel 2 och 3 gjordes förändringar som främst handlar om hur läraren använder elevsvar, dels genom att genomgående rikta uppmärksamheten mot hur bråk uttrycks, dels genom att aktivt använda elevernas svar på förtestet som lektionsinnehåll.

I cykel 3 inledde läraren, på liknande sätt som i de andra cyklerna, den andra lektionen genom att eleverna får bidra med förslag på olika matematiska sätt att uttrycka en halv. I denna omgång är läraren noga med att det korrekta bråk. Därefter går läraren igenom förlängning av bråk med eleverna, vilket exemplifieras i excerpt 8 nedan.

Excerpt 8. Utdrag cykel 3, lektion 2

Lärare:	En halv sa vi ju var lika mycket som två fjärdedelar [pekar på 2/4 under tallinjen, skriver samtidigt 1/2 = 2/4]. De var ju värda en halv båda två och ser ni här nu då, att för att komma hit [pekar på ettan och tvåan i de båda täljarna] har jag multiplicerat med någonting. För att ettan ska bli en tvåa har jag multiplicerat med någonting [pekar på ettan och tvåan] och för att tvåan ska bli en fyra har jag multiplicerat med samma tal [pekar på tvåan och fyran].

I ovanstående excerpt 8 (cykel 3, lektion 2) visas hur läraren förklarar för eleverna hur täljaren och nämnaren multipliceras med samma tal för att få ett likvärdigt bråk. Genom att peka på både 1/2 och 2/4 på tallinjen visar läraren att båda bråken har samma värde och är lika stora. Läraren är explicit med att täljare och nämnare i en 1/2 har multiplicerats med samma tal. Därefter uppmanas eleverna att fundera över vilket tal som har använts för att multiplicera både täljaren och nämnaren och därmed göra bråken likvärdiga. I excerpt 8 är bråkens värde invariant, men täljaren och nämnaren varierar, vilket innebär att förändringen i hur bråken representeras skriftligt blir i förgrunden.

Läraren beskriver sedan att detta kallas förlängning och presenterar följande text på tavlan: ”Förlänga bråk: Multiplicera med samma tal i både täljaren och nämnaren.” Läraren initierar sedan en diskussion om hur en tredjedel kan förlängas till niondelar. Genom detta får eleverna möjlighet att generalisera sina kunskaper.

Efter den gemensamma genomgången får eleverna exempel där de ska bedöma om två bråk bråk är likvärdiga eller inte baserat på den uppskrivna regeln. Dessutom ombeds de att beskriva hur de tror att eleverna har tänkt vid de felaktiga exemplen. De valda exemplen baseras på de elevsvar som framkommit i förtestet, till exempel enbart användning av additiv strategi för att förlänga täljaren eller nämnaren, eller användning av en multiplikativ strategi för att förlänga bråkuttrycket. I detta moment uppstår en ytterligare lärandemöjligheter jämfört med cykel 1. I denna cykel har läraren först en genomgång och i nästa steg bjuds eleverna in för att i par undersöka just det som har visat sig vara svårt inom området. Inför detta har de fått undervisning i hur det matematiska innehållet ska hanteras. I excerpt 9 (cykel 3, lektion 2) visas delar av när läraren leder samtal om hur eleverna har svarat.

Excerpt 9. Utdrag cykel 3, lektion 2

Lärare:	Då tar vi uppgift B här nu då. Är tre fjärdedelar lika med fyra femtedelar?
Elev:	Mmm. De har bara lagt till en på varje.
Lärare:	De har bara lagt till. De har bara adderat där. De har gjort så här [skriver +1 vid täljaren och +1 vid nämnaren]. Är de lika mycket värda då?
Elev:	Naeej …
Lärare:	Naej. Varför inte det? Vad var man tvungen att använda för räknesätt?
Elev:	Multiplikation.
Lärare:	Precis. Multiplicera [pekar på regeln] med samma tal i både täljaren och nämnaren. Här [pekar på uppgiften] har de adderat i både täljaren och nämnaren och då är inte den lika mycket värd [drar streck över likhetstecknet].

I excerpt 9 (cykel 3, lektion 2) får eleverna möjlighet att undersöka samma vanliga felaktiga svar som spontant uppstod under cykel 1. Denna gång kan eleverna och läraren använda sig av den etablerade regeln för att identifiera att förfarandet är felaktigt. Det innebär att de felaktiga svaren som eleverna får undersöka inte uppstår spontant, utan att lektionen är designad med utgångspunkt i de felaktiga svaren som framkom i förtestet. När eleven uttrycker att "de har bara lagt till" fångar läraren upp elevens förklaring, och språkliggör strategin med att säga att dom bara adderat. Sedan kontrasteras den felaktiga additiva strategin mot den korrekta multiplikativa. I exemplet är det felaktiga elevsvaret invariant. I relation till det synliggörs ett additivt tankesätt. Detta kontrasteras mot ett multiplikativt tankesätt. Detta gjordes delvis även i cykel 1 (se excerpt 7, cykel 1, lektion 2), men då framkom inte kontrasten lika tydligt eftersom det inte utforskades huruvida eleven tänkte additivt eller multiplikativt. Eftersom denna lektion istället tog elevsvaren som utgångspunkt möjliggjorde det att läraren på ett strukturerat sätt kunde lyfta elevernas vanliga felsvar och undersöka dem tillsammans med eleverna.

Resultaten från eftertestet tyder på att eleverna gör betydande framsteg under denna cykel, se tabell 2, cykel 3, testvariabel LBUA. Detta innebär att en majoritet av eleverna efter denna lektion presterar korrekt på denna typ av uppgifter.

Diskussion och slutsatser

Denna studie handlar om hur undervisning kan designas och analyseras med variationsteorin som grund för att stödja elevers förmåga att omvandla och få en begreppslig förståelse av likvärdiga bråk. Trots den omfattande forskning om hur elever förstår likvärdiga bråk (se Fazio m.fl., 2016; Schneider & Siegler, 2010), har det funnits ett påtagligt behov av ytterligare kunskap om hur undervisningen kan utformas för att stödja elevernas utveckling av denna förmåga, vilket tidigare studier påpekat (jfr Lee m.fl., 2011; Mills, 2016).

Resultaten i denna studie bidrar med kunskap om hur undervisningen kan designas baserat på variationsteoretiska principer för att öka elevernas möjlighet till lärande. Vid designen och genomförande av undervisningen vill vi diskutera tre områden som framstår som särskilt betydelsefulla: (a) utgå från identifierade kritiska aspekter, (b) använda kraftfulla kontraster, (c) utgå från elevsvar och (d) använda tallinjen.

För att undervisningen ska vara framgångsrik blir det mest centrala att läraren har klart för sig vad eleverna ska lära sig (Marton, 2015). Det behöver ta sin utgångspunkt i hur eleverna erfar lärandeobjektet, vilket gjorde att förtestet fick stor betydelse i den här studien. De kritiska aspekter som identifierades hade likheter med det som visats i tidigare forskning (t.ex. Boyer & Levine, 2012; Erlwanger, 1973; Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007), vilket tyder på att elever ofta stöter på samma typ av utmaningar inom detta område. I årskurs 5 förväntar sig nog många lärare att eleverna kan särskilja bråk från procent och decimaltal innan undervisningen om likvärdiga bråk. I denna studie framgick det att detta inte kunde tas för givet utan behövde ingå i lektionsdesignen, vilket gjorde den första kritiska aspekten viktig att starta med. Enligt Kilpatrick med flera (2001) och Lamon (2020) är det dock känt att de många olika tolkningarna, representationerna och symboliska konventionerna för rationella tal kan utgöra en av svårigheterna med att förstå talen och eleverna behöver tydligt se skillnaderna mellan bråk, decimaltal och procent för att de ska få en fördjupad taluppfattning.

Genomgående användes grundprincipen i variationsteorin som handlar om att öppna upp en dimension av variation genom att variera den fokuserade aspekten mot en invariant bakgrund (Marton, 2015). Kontrasterna hjälpte eleverna att urskilja det matematiska innehållet eftersom de bidrar till att eleverna riktar sin uppmärksamhet mot de kritiska aspekterna (Kullberg & Runesson, 2013; Sveider, 2021). Men det räcker inte med enbart kontraster. Det blev tydligt att användandet av elevsvar och att eleverna själva var aktiva var viktigt för att elevers lärande. Vi använde i flera cykler samma kontrast, men den bäddades in i olika typer av aktiviteter och samtal, där läraren också hanterade de elevsvar som uppkom på lektionen på olika sätt. Det blev tydligast då läraren signalerade att felsvar var korrekt (se excerpt 5 och 6). Denna typ av interaktion liknar det som Björklund Boistrup (2010) kallar för ”anything goes”. Det innebär att läraren inte problematiserar felaktiga svar, utan berömmer elevernas deltagande. Detta riskerar att leda till att missuppfattningar befästs hos eleverna. Manula (2018) visar i sin avhandling att elevsvar som handlar om lärandeobjektet kan användas som underlag i undervisningen eftersom elevers olika lösningar kan användas för att skapa kontraster som gör att deras uppmärksamhet riktas mot de kritiska aspekterna. I vår studie använde vi i alla cykler felsvar från förtesten i lektionsdesignen. Denna grundprincip genomfördes dock på olika sätt. Det visade sig att det var viktigt att den matematiska principen var tydlig för eleverna och att de själva fick undersöka regeln i relation till olika typer av svar och sedan diskutera det tillsammans med läraren (se excerpt 9, cykel 3, lektion 2). Även Hughes med flera (2017) påtalar att läraren behöver förklara matematiska principer för eleverna och modellera hur de ska tänka, men att det också är viktigt att eleverna själva är aktiva. Att skapa aktiva elevdiskussioner kan vara svårt och Svantesson Wester (2022) framhåller att läraren behöver designa uppgifter som kräver att eleverna diskuterar lärandeobjektet. Vid en jämförelse mellan cyklerna i vår studie framkommer vikten av att läraren inte bara designar uppgifter som eleverna kan diskutera, utan även att läraren leder samtalet genom att ställa fördjupande frågor, vilket även framkommer i flera tidigare studier (Inagaki m.fl., 1999; Mercer, 2018).

En annan faktor som också visade sig vara betydelsefull är hur övergången mellan det konkreta och det abstrakta. Hudson och Miller (2006) har påtalat att många elever har svårigheter med denna övergång, vilket även framkom i denna studie då eleverna då eleverna kunde använda areamodellen för att skapa likvärdiga bråk, men hade svårt med den skriftliga representationen, se tabell 2, cykel 1–3, testvariablerna LBMA och LBUA. Om undervisningen fastnar i att representera ett bråk med hjälp av areamodellen riskerar det att förstärka elevers uppfattning om att bråk är två enskilda heltal (Tian m.fl., 2021) och att det kan förstärka elevers additiva tänkande (Moss, 2005). För att förhindra detta använde vi i vår studie tallinjen som en brygga mellan det konkreta (areamodellen) och det abstrakta (matematiskt uttryck), vilket även visats i andra studier (Schumacher m.fl., 2018).

Tallinjen fungerar både som en representation av del-helhet, genom att den representerar en sträcka längs linjen och kan markera olika positioner (Hamdan & Gunderson, 2017; Schumacher m.fl., 2018). Det gör den visuell och konkret, samtidigt som bråkets värde kan jämföras med andra bråk på tallinjen för en djupare förståelse (Cramer m.fl., 2019). Vi använde tallinjen för att koppla bråk med naturliga tal, vilket är ett sätt att tydliggöra sambanden mellan olika talrepresentationer (Eriksson, 2015). Tallinjen kan användas på alla typer av bråk, vilket är svårare med areamodellen. Användandet av tallinjen har visat sig vara framgångsrikt, men det krävde att läraren hanterade detta på ett sätt som synliggjorde kopplingarna mellan areamodellen, tallinjen och den skriftliga representationen.

Studien är liten och resultaten är med största sannolikhet inte generaliserbara för alla elevgrupper. Det är inte oproblematiskt att göra statistiska beräkningar på så pass små elevgrupper, då det ställer höga krav på urval och genomförande för att resultaten ska kunna visa på metodens effektivitet. Den insamlade datan bygger på ett målinriktat urval, vilket enligt Bryman (2018) innebär att resultaten inte kan generaliseras till hela populationen. Detta är en nackdel då en kvantitativ forskningsstrategi syftar till att möjliggöra generalisering. I den här studien har de kvantitativa resultaten behandlats i relation till omfattande beskrivningar av undervisningssituationer. Dessa beskrivningar möjliggör att studiens resultat kan överföras till liknande kontexter (se Larsson, 2005) av lärare och forskare och därigenom bidra till en kumulativ kunskapsbas inom matematikdidaktik.

Den begränsade varaktigheten av lektionsdesignen reser viktiga frågor kring överensstämmelsen mellan design och mätning av dess effekter. Enligt Ruiz-Primo med flera (2002) kan kortvariga interventioner främst avspegla kortsiktiga beslut och inte nödvändigtvis reflektera de långsiktiga kumulativa effekterna av mer långvariga undervisningsinsatser. Å andra sidan kan detta korta tidsfönster vara fördelaktigt när man betraktar hur snabbt eleverna utvecklade sin förmåga att omvandla likvärdiga bråk.

I denna studie spelade det nära samarbetet mellan forskare och lärare en central roll i utformningen av lektionerna. Genom detta samarbete preciserades undervisningens mål, vilket potentiellt ledde till en mer riktad och ändamålsenlig undervisning, vilket i sin tur kan ha haft en positiv inverkan på effektstorlekarna (Cook m.fl., 2023).

En annan övervägning var användningen av både för- och eftertester för att utvärdera elevernas kunskaper. Denna design tillät oss att mäta förändringar i elevernas prestation över tid och bedöma effekterna av undervisningsinterventionen. Dock kan det finnas frågor kring beroende mellan för- och eftertester, vilket Bakker med flera (2019) påpekar som en potentiell begränsning. För att mildra detta genomförde vi en pilottestning för att säkerställa att eleverna förstod testuppgifterna och att de var lämpliga för vår elevgrupp.

En ytterligare aspekt att beakta är rapporteringen av effektstorlekar. Enligt Bakker med flera (2019) kan effektstorlekar variera beroende på studiens design, och det är viktigt att tolka dem med hänsyn till detta. Vi använde Hedges' g för att bedöma effekterna av LS-cyklerna på våra testvariabler, vilket tillät oss att kvantifiera och jämföra effekterna av undervisningen.

Slutligen, trots studiens begränsade varaktighet, indikerar resultaten en märkbar förbättring i elevernas prestation, särskilt på uppgifter för likvärdiga bråk utan användning av areamodeller. Denna observation stödjer möjligheten att även korta och intensiva undervisningsperioder kan ha positiva effekter på elevernas förståelse inom området likvärdiga bråk. Det är dock viktigt att följa upp studien genom att mäta elevernas prestationer vid andra tidpunkter än enbart direkt efter för att kunna bedöma om effekterna är hållbara på lång sikt.

Referenser

Bakker, A., Cai, J., English, L., Kaiser, G., Mesa, V. & Van Dooren, W. (2019). Beyond small, medium, or large: Points of consideration when interpreting effect sizes. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 1–8. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09908-4

Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N. & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology, 112*(3), 628–648. https://doi.org/10.1037/edu0000384

Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: A multimodal social semiotic study*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet].

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (3 uppl.). Liber.

Boyer, T. W. & Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3=2/6=3/9=4/12? *Journal of Experimental Child Psychology, 111*(3), 516–533. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.11.001

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H. & Bezuk, N. S. (2006). *Learning mathematics in elementary and middle schools* (4 uppl.). Merrill/Prentice Hall.

Cook P. J., Dodge K., Farkas G., Roland G., Fryer R. G., Guryan J., Ludwig J., Mayer S., Pollack H. & Steinberg L. Not too late: Improving academic outcomes for disadvantaged youth. *American Economic Review, 113*(3), 738–65.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Wyberg, T., Pettis, C. & Fagerlund, C. (2019). Reconstructing the unit on the number line: Tasks to extend fourth graders' fraction understandings. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(3), 180–194. https://doi.org/10.1080/19477503.2016.1245035

Dündar, S. (2015). Mathematics teacher-candidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1379–1397. https://doi.org/10.12973/EURASIA.2015.1396A

Dyson, N. I., Jordan, N. C., Rodrigues, J., Barbieri, C., & Rinne, L. (2020). A fraction sense intervention for sixth graders with or at risk for mathematics difficulties. *Remedial and special education*, *41*(4), 244–254. https://doi.org/10.1177/0741932518807139

Ekdahl, A.-L. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections*. [Doktorsavhandling, Jönköping University].

Ennis, R. P. & Losinski, M. (2019). Interventions to improve fraction skills for students with disabilities: A meta-analysis. *Exceptional Children*, *85*(3), 367–386. https://doi.org/10.1177/0014402918817504

Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap*. [Licentiatavhandling, Stockholms universitet].

Erlwanger, S. H. (1973). Benny´s conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, *1*(2), 7–26.

Fazio, L. K., DeWolf, M. & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory, and Cognition*, *42*(1), 1–16. https://doi.org/10.1037/xlm0000153

Flores, M. M., Hinton, V. M. & Taylor, J. J. (2018). CRA fraction intervention for fifth-grade students receiving tier two interventions. *Preventing School Failure*, *62*(3), 198–213. https://doi.org/10.1080/1045988X.2017.1414027

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Jordan, N. C., Siegler, R., Gersten, R. & Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, *105*(3), 683–700. https://doi.org/10.1037/a0032446

Fuchs, L., Malone, A., Schumacher, R., Namkung, J. & Wang, A (2017). Fraction intervention for students with mathematics difficulties: Lessons learned from five randomized controlled trials. *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 631–639. http://doi.org/10.1177/0022219416677249

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B. & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Reginal Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J. & Anderson, R. E. (2010). *Multivariate data analysis* (7 uppl.). Prentice-Hall.

Hamdan, N. & Gunderson, E. A. (2017). The number line is a critical spatial-numerical representation: Evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology*, *53*(3), 587–596. https://doi.org/10.1037/dev0000252

Hecht, S. A., Close, L. & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *86*(4), 277–302. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2003.08.003

Hudson, P. P. & Miller, S. P. (2006). *Designing and implementing mathematics instruction for students with diverse learning needs*. Pearson.

Huges, C. A., Morris, J. R., Therrien, W. J. & Benson, S. K. (2017). Explicit Instruction: Historical and contemporary context. *Learning Disabilities Research and Practice, 32*(3), 140–148. https://doi.org/10.1111/ldrp.12142

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. I B. Litwiller (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (s. 72–78). National Council of Teachers of Mathematics.

Inagaki, K., Morita, E. & Hatano, G. (1999). Teaching-learning of evaluative criteria for mathematical arguments through classroom discourse: A cross-national study. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 93–111. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0102_1

Jigyel, K. & Afamasaga-Fuataí, K. (2007). Models of fractions and equivalence. *Australian Mathematics Teacher, 63*(4), 17–25.

Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N. & Dyson, N. (2017). Delaware longitudinal study of fraction learning: Implications for helping children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 621–630. https://doi.org/10.1177/0022219416662033

Kamii, C. & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(4), 365–378. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90035-7

Karlsson, E. & Wennergren, A. C. (2014). Att använda elevsvar i undervisningen. *Forskning om undervisning och lärande*, (13), 53–66. https://doi.org/10.61998/forskul.v2i13.27562

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan* (1 uppl.). Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kullberg, A. & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 547–567. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0080-9

Lamon, S. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teacher* (4 uppl.). Lawrence Erlbaum Associates.

Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik, 25*(1), 25–38.

Lee, S. J., Brown, R. E. & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198–220. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.564993

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 235–264. https://doi.org/10.1007/BF00305624

Levenson, E. (2010). Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 121–142. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9208-y

Lo, M. L. (2014). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Acta Universitatis Gothoburgensis.

Manula, T. (2018). *Students' and teachers' jointly constituted learning opportunities*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet]

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Studentlitteratur.

Mills, J. (2016). Developing conceptual understanding of fractions with year five and six students. I B. White, M. Chinappan & S. Trenholm (Red.), *Opening up mathematics education research* (Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia) (s. 479–486). MERGA.

Mercer, S. (2018). Psychology for language learning: Spare a thought for the teacher. *Language Teaching*, *51*(1), 1–22. https://doi.org/10.1017/S0261444817000258

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and breakers: New approaches to teaching the rational number system. I M. S. Donovan & J. D. Bransford (Red.), *How students learn: history, math, and science in the classroom* (s. 121–162). National Academies Press.

Pang, M. F. & Ki, W. W. (2016). Revisiting the idea of 'critical aspects'. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *60*(3), 323–336. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1119724

Pedersen, P. & Bjerre, M. (2021). Two conceptions of fraction equivalence. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 135–157. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7

Rodrigues J., Dyson N., Hansen N. & Jordan N. C. (2016). Preparing for algebra by building fraction sense. *Teaching Exceptional Children*, *49*, 134–141. https://doi.org/10.1177/0040059916674326

Ruiz-Primo, M., Shavelson, R., Hamilton, L. & Klein, S. (2002). On the evaluation of systemic science education reform: Searching for instructional sensitivity. *Journal of Research in Science Teaching*, *39*, 369–393. https://doi.org/10.1002/tea.10027

Schneider, M. & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *36*(5), 1227–1238. https://doi.org/10.1037/a0018170

Schumacher, R. F., Jayanthi, M., Gersten, R., Dimino, J., Spallone, S. & Haymond, K. S. (2018). Using the number line to promote understanding of fractions for struggling fifth graders: A formative pilot study. *Learning Disabilities Research & Practice*, *33*(4), 192–206. https://doi.org/10.1111/ldrp.12169

Sidney, P. G., Thompson, C. A. & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, *58*, 288–298. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science*, *26*(4). https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994–2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L. & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide (NCEE #2010-4039).* National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Skolverket. (2008). TIMSS 2007: *Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv* (Rapport 323).

Sun, X. (2015). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 65–85. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9263-4

Svanteson Wester, J. (2022). *Teaching and learning mathematics with integrated small-group discussions. A learning study about scaling geometric figures.* [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].

Sveider, C. (2021). *Representationer av tal i bråkform. En studie om matematikundervisning på mellanstadiet.* [Doktorsavhandling, Linköpings universitet].

Tian, J., Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2021). Distributions of textbook problems predict student learning: Data from decimal arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 113*(3), 516–529. https://doi.org/10.1037/edu0000618

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 419–441. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (10 uppl.). Pearson.

Van Steenbrugge, H. V, Lesage, E., Valcke, M. & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers ' knowledge of fractions : A mirror of students ' knowledge? *Journal of Curriculum Studies, 46*(1), 138–161. https://doi.org/10.1080/00220272.2013.839003

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningsed* [elektronisk resurs].

Wang, A. Y., Fuchs, L. S., Fuchs, D., Gilbert, J. K., Krowka, S. & Abramson, R. (2019). Embedding self-regulation instruction within fractions intervention for third graders with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 52*, 337–348. https://doi.org/10.1177/0022219419851750

Watson, A. & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 91–111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1

Vig, R., Murray, E. & Star, J. R. (2014). Model breaking points conceptualized. *Educational Psychology Review, 26*, 73–90. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9254-6

Vikström, A., Kullberg, A. & Runesson Kempe, U. (2017, 29 aug-2 sep). *Can public knowledge be created through practitioner research?: Learning studies and variation theory as mechanisms and strategies behind knowledge production in practitioners´ research* [konferenspresentation] 17:e Biennial EARLI 2017, Tampere, Finland.

Wong, M. (2013). Locating fractions on a number line. *Australian Primary Mathematics Classroom, 18*(4), 22–26.

Författarpresentationer

Cecilia Sveider

Cecilia Sveider är fil.dr i pedagogik med ämnesdidaktisk inriktning vid Linköpings universitet och forskar med fokus på matematikdidaktik för att förbättra undervisning och lärande inom matematik.

Anja Thorsten

Anja Thorsten är docent i pedagogik vid Linköpings universitet med ett särskild intresse för undervisningsutvecklande forskning.

Joakim Samuelsson

Joakim Samuelsson är professor i pedagogik med inriktning mot matematikdidaktik vid Linköpings universitet. Han undervisar på lärarprogrammet och bedriver forskning om undervisning och lärande i matematik, från förskola till gymnasieskola.