Utveckling av räknefärdigheter hos fem- till sjuåringar – Matteuseffekt eller utfall av undervisning

C Björklund & U Runesson Kempe

Sammanfattning

Under ett läsår genomfördes ett interventionsprogram med femåringar, i fem svenska förskolor, för att stötta barns utveckling av taluppfattning och räknefärdigheter. Syftet med denna studie var att undersöka i vilken utsträckning de uppnådda målen i interventionen var ett utfall av undervisningen eller om de är relaterade till de uppfattningar av tal som barnen hade med sig in i interventionen. Fjorton av barnen som deltog visade i uppgiftsbaserade intervjuer att de ett år efter interventionen uppfattade tal som kända fakta och svarade korrekt på uppgifter inom talområdet 1-10. En noggrannare analys av deras sätt att uppfatta tal visar dock att det finns olikheter beträffande vilka aspekter av tal som barnen har urskilt, respektive ännu inte urskilt. Detta visade sig ha inverkan på deras förmåga att lösa nya uppgifter som går utöver talområdet 1-10. Analysen visar även att förkunskaper kan ha inverkan på hur väl barnen kunde tillgodogöra sig vad undervisningen erbjuder.

Nyckelord*:* additiva relationer, lärande, undervisning, uppfattningar, variationsteori

Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Göteborgs universitet och forskar om matematiklärande och -undervisning i förskola och skolans tidiga år i praktiknära forsknings- och utvecklingsprojekt.

Ulla Runesson Kempe är seniorprofessor vid Jönköping University och forskar bland annat om relationen lärande och undervisning. Hon har varit med om att driva och utveckla forskning med learning study som ansats.

Abstract

During one school year, an intervention program for five-year-olds was conducted in five Swedish preschools, aiming to support children's number knowledge and arithmetic skills. The aim of this study was to investigate to what extent the achieved goals in the intervention was a result of the teaching or related to the children's pre-existing ways of understanding numbers. Fourteen of the participating children answered in task-based interviews, one year after the intervention, as if they had known number facts to apply in solving the tasks within the number range 1-10. A detailed analysis of their ways of experiencing numbers showed, on the other hand, differences in what aspects the children had discerned, particularly when bridging through 10. This had an impact on their ability to solve the problems in the larger number range. The results also show that children's pre-existing knowledge of numbers can have an affect on how well they could learn from the intervention.

Keywords: Additive relations, Learning, Teaching, Ways of experiencing, Variation theory of learning

Introduktion

I denna artikel avser vi att problematisera yngre barns uttryck för att de behärskar 'talfakta' i aritmetisk problemlösning genom att belysa hur deras uppfattningar av tal utvecklas över tid, när de deltar i noggrant designad undervisning. Denna artikel utgår från data och resultat som har genererats i en större studie[1]. I denna deltog fem svenska förskolor i ett interventionsprogram med femåringar. Studien gick ut på att pröva i vilken utsträckning det var möjligt att stötta barns utveckling av taluppfattning och räknefärdigheter. Resultatet visade att interventionen var framgångsrik – genom att ha deltagit i lekar och spel som var designade och utförda enligt vissa teoretiska principer, hade barnen lärt sig att lösa additions- och subtraktionsproblem korrekt i större utsträckning än de förskolebarn som hade deltagit i traditionell förskoleundervisning (Kullberg, Björklund, Brkovic & Runesson Kempe, 2020). Dessutom behöll barnen sitt försprång ännu ett år senare, när de hade gått ett helt läsår i förskoleklass, ofta i en annan skolmiljö, med nya lärare och andra klasskamrater (ibid.) Detta resultat skiljer sig från vad en stor del av de interventionsstudier som genomförs i förskola och skola (t.ex. Bailey, Nguyen, Jenkins, Domina, Clements & Sarama, 2016) tidigare har visat. Men en fråga som kvantitativa mätningar av detta slag, det vill säga hur framgångsrik en intervention är i termer av rätt eller fel lösta uppgifter, *inte* svarar på är vad deltagarnas förändrade kunnande innebär. Med utgångspunkt i ett variationsteoretiskt sätt att se på lärande är det väsentliga för ett utvecklat kunnande att barnet har förändrat sitt sätt att uppfatta ett visst fenomen (Marton, 2015). När det gäller att förstå och använda tal och räknestrategier innebär detta att barnet förmår att urskilja fler nödvändiga aspekter av tal, som gör att barnet också kan tillämpa fler strategier på ett framgångsrikt sätt för att lösa problem. I denna studie undersöker vi förändringen, i termer av hur barnen förstår och uppfattar tal utifrån de strategier och resonemang som de uppvisar då de löser aritmetiska problem.

1 Studien ingår i projektet FASETT, finansierat av Vetenskapsrådet (nr. 721-2014-1791)

Resultatet av interventionsstudien visade således att barnen i interventionsgruppen lärde sig att lösa additions- och subtraktionsproblem på ett framgångsrikt sätt. Men sådana resultat kan behöva en fördjupad analys. I interventionsstudier, där man genomför någon typ av undervisning som skiljer sig från vad man tidigare har gjort, brukar alltid någon form av positiv effekt uppkomma. Redan när en forskare tar kontakt med en förskola eller förskollärare, med frågan om det finns intresse för att delta i en studie om matematik, påverkas verksamheten så att en ökad medvetenhet om just matematikinnehållet aktualiseras. Detta brukar kallas Hawthorneeffekten och är på sätt och vis ett problem i utbildningsvetenskaplig forskning eftersom det sällan går att studera effekter av en viss typ av undervisning opåverkad av själva effekten av att medverka i forskningen. I denna artikel undersöks därför mer specifikt vad de barn som tycktes nå målet med interventionen lärde sig. De forskningsfrågor som besvaras är:

- Vad innebär det att barn ger uttryck för att uppfatta tal som kända fakta?
- Hur konstitueras denna uppfattning av tal under en längre tidsperiod?

För att undersöka detta analyseras svar och tillvägagångssätt från uppgiftsbaserade intervjuer med ett urval av de barn som hade deltagit i interventionen före, direkt efter och, fördröjt, ett år efter interventionen. Resultaten kan även visa på i vilken utsträckning som de framgångar som barnen uppvisade är ett utfall av interventionen, eller relaterade till de uppfattningar av tal som barnen hade med sig in i interventionen.

Inledningsvis behandlas interventionsstudien samt den forskning och teori som denna har grundats på. Därefter beskrivs metod och tillvägagångssätt för den aktuella studien.

Teoretiska principer bakom interventionen

Interventionsprogrammet involverade femåringar och syftade till att stötta deras utveckling av taluppfattning och räknefärdigheter. Programmet hade en strukturell ansats för undervisning som utgångspunkt och var utformat enligt variationsteoretiska principer. En strukturell ansats innebär att additiva relationer står i fokus och ses som grund för att utveckla framgångsrika räknefärdigheter (Davydov, 1982; Schmittau, 2004, Neuman, 1987). Additiva relationer är till exempel att talet 5 kan ses som sammansatt av talen 3 och 2, det finns alltså en relation mellan ett tals delar och dess helhet. Denna kan ses som grund för en fördjupad förståelse av tals egenskaper och användning vid mer avancerad aritmetisk problemlösning (Baroody & Purpura, 2017; Nuñes & Bryant, 1996; Piaget, 1952). Barn som kan urskilja talrelationer på detta sätt kan också förstå idén med och tillämpa aritmetiska principer och strategier som kommutativitet, och inversa räknesätt (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) liksom omgruppering inom och mellan delar (Cheng, 2012).

Eftersom ett sådant holistiskt sätt att se additiva relationer har flera fördelar, har vissa forskare förespråkat detta som en didaktisk ansats att utgå ifrån och starta i, snarare än att se detta som något som följer av att utveckla räknefärdigheter (Davydov, 1982; Schmittau, 2004; Polotskaia & Savard, 2018). En konsekvens av att utgå från denna ansats är att målet för undervisningen då blir att eleven ska utveckla en flexibel förståelse av additiva strukturer, det vill säga kan urskilja vad som utgör delar och helhet i ett aritmetikproblem och utifrån det avgöra vilken räknestrategi som är mest effektiv (bland annat tillämpa inversa räknesätt eller omgruppering beroende på uppgiftens struktur).

Interventionsprojektet avsåg att implementera en sådan strukturell ansats i undervisningen om tal och aritmetik i förskolan genom att lyfta fram tals del-helhets-relationer. Det innebar att barnen erbjöds möjligheter att urskilja tal som sammansatta helheter, att tal kan delas upp på olika sätt utan att helheten förändras och att tal kan ses som en triad av del-del-helhet vilket för med sig möjligheten att ”se” en saknad del eller helhet som grund för att lösa additions- och subtraktionsuppgifter och därmed undvika tidskrävande uppräkning som inte förmodas gynna en begreppslig utveckling av förståelsen av tal. Interventionen berörde endast talområdet 1-10. Med inspiration från bland annat Neuman (1989) och Brissiaud (1992) användes fingermönster för att illustrera tal som sammansatta delar och helheter. Detta genomsyrade huvudsakligen fyra aktiviteter som, i en iterativ process i samarbete mellan deltagande förskollärare och forskare, förfinades under en åtta månader lång tidsperiod. Syftet var att barnen i första hand skulle lära sig att uppfatta tal som sammansatta enheter för att kunna se hur tal relaterar till andra tal och att, i möjligaste mån, undvika enstegsräkning, eftersom forskning har visat att barn som fastnar i att använda räknestrategier som grundar sig i att se tal som en-heter i en ordinal mening, får svårigheter att hantera större talområden och mer avancerad aritmetisk problemlösning (Ellemor-Collins & Wright, 2009; Neuman, 1987). Ett relationellt närmande av tal förväntades främja urskiljandet av tals del-helhets-relationer och därmed öppna upp för att tillämpa framgångsrika räknestrategier.

Tidigare forskning

Det finns en stor mängd studier som beskriver hur barn tillämpar räknestrategier såsom ’räkna alla’, ’räkna vidare’ och ’räkna från största’ (se t.ex. Carpenter, Moser & Romberg, 1982; Fuson, 1992). Barn observeras med tiden övergå till alltmer avancerade räknestrategier och memorerande av vissa talkombinationer som ett resultat av upprepade upptäckter av genomförda additioner.

Forskningen är samstämmig i att tidiga kunskaper lägger grund för senare framgångar i matematik, och även att tidiga insatser tycks ha betydelse för utvecklingen av grundläggande färdigheter som sannolikt undanröjer vissa matematiksvårigheter (Aunio & Niemivirta, 2010; Baroody, Eiland & Thompson, 2009; Duncan m.fl, 2007; Mononen, Aunio, Koponen & Aro, 2014). Men sett ur ett långsiktigt perspektiv har det visat sig att det inte är tillräckligt att barn tillägnar sig grundläggande matematikkunskaper. Snarare är det förmågan att tillämpa och utveckla strategier för sin egen problemlösning som är avgörande för utvecklingen av ett barns matematikfärdigheter. Strategier kan visserligen läras som en uppsättning procedurer, men isolerade från den begreppsliga grunden kan de inte utvecklas och tillämpas till exempel i nya matematikområden eller större talområden (Ostad, 1998). Inlärda procedurer, som fungerar i enkla sammanhang, tenderar att resultera i många fler felsvar när de direkt överförs och tillämpas i mer komplexa sammanhang. Ett exempel på detta är dubbelräkning (se Neuman, 1987) som bygger på att räkna fram ett tal åt gången på talraden. Att räkna ut 5 - 3 = _ kan oftast lösas genom att räkna fram till fem, sen räkna ner ”fem, fyra, tre”, antingen genom att ”höra” hur många steg man räknat ner, eller genom att hålla ordning med fingrarna, ett finger för varje nerräknat räkneord. Detta är en omständlig procedur, men den fungerar ofta i mindre talområden och då delen som räknas upp eller ner är möjlig att urskilja perceptuellt. Däremot uppträder ofta svårigheter om, till exempel, uppgiften är 15 - 7 = _ , det vill säga när delen som ska subtraheras är relativt stor. Att då använda samma strategi som för 5 - 3 = _ resulterar i att barnet måste arbeta med två parallella talrader, en för helheten som minskar ett steg åt gången (15, 14, 13, …) och en talrad för antalet steg som räknats bakåt (1, 2, 3, …). För många barn i förskolan och de tidiga skolåren blir uppgiften för arbetsam och leder till felsvar (se Björklund, in review). Vissa forskare menar att barnens svårigheter att använda strategin beror på att denna förutsätter en högre nivå av kognitiva funktioner (Steffe, 2004). Neuman (2013) däremot tolkar det som att svårigheterna beror på att barnen inte uppfattar talrelationer. Hon menar att om de inte *samtidigt* kan relatera olika tal till varandra som en del-helhets-relation, har de inte tillgång till andra strategier än, som i detta fall, enstegsräkning. Enstegsräkningen ger visserligen en form av trygghet, men forskning visar också att barn, som enbart använder den typen av strategier, inte gärna överger dem, trots att de undervisas om andra mer begreppsligt utvecklingsbara strategier (Cheng, 2012). Detta pekar mot att utvecklingen av taluppfattning och räknefärdigheter är långt mer komplex och innebär mera än att bara lära sig att använda ett antal olika strategier.

Interventionsprogrammet, varifrån data i denna artikel är hämtad, syftade till att barnen skulle utveckla talfakta att använda på ett flexibelt och säkert sätt i aritmetisk problemlösning. Talfakta är ett välbeforskat fenomen i matematikdidaktisk forskning, men vad det innebär mer specifikt råder delade meningar om. Steffe, Cobb och Glasersfeld (1988) beskriver till exempel barns svårigheter att lära sig talfakta i termer av att kunna memorera, där vissa talkombinationer tedde sig lättare att komma ihåg än andra, till exempel ”dubblor” som 4 + 4 = 8. Men redan på 1930-talet beskrev Brownell (1935) talfakta som mer komplext än att memorera talkombinationer. Han argumenterade att, om talfakta endast handlade om att lära sig olika kombinationer av tal, skulle barn inte ha några svårigheter att lära sig dem och han jämför med hur barn oftast lätt lär sig ”två hundar och tre hundar är fem hundar tillsammans” eftersom det *är fakta*. Uttrycket ”2 och 3 är 5” är däremot enligt Brownell inte fakta utan en generalisering som bygger på att abstrahera likheter och skillnader från många olika sammanhang och mognar i att uttrycket stämmer varje gång, oavsett om det är hundar eller katter som representeras.

I litteraturen beskrivs att barn som har tillägnat sig talfakta ofta uttrycker sig med snabba, säkra svar. Gray, Pitta och Tall (2000) refererar högpresterande elever som beskriver att svaren tycks dyka upp spontant för dem i deras medvetande, också som numeriska transformationer där till exempel 9 + 7 framträder som 10 + 6 för eleven som genast svarar 16. Med andra ord uppfattas talen som tankeobjekt, vilka inte behöver representeras som fysiska objekt (såsom fingrar) att operera på.

Inom matematikundervisning som kunskapsfält anses talfakta vara ett viktigt mål att uppnå och många har försökt beskriva vad det innebär att ha utvecklat talfakta. Vad vi i empiriska studier och i undervisningssammanhang ställs inför är däremot hur talfakta uttrycks av barn och särskilt hur yngre barn ger uttryck för begreppsligt kunnande om tal. Gray och Tall (1994) argumenterar för att barn som främst förlitar sig på procedurella strategier, som enstegsräkning, sällan tenderar att resonera om hur de tidigare kommit fram till en lösning på samma problem utan upprepar samma strategi varje gång de möter en aritmetikuppgift. Detta innebär att de inte utvecklar talfakta, det vill säga att "veta" att 3 + 3 är 6, utan behöver räkna fram summan varje gång. Vad forskningen om matematiklärande poängterar är vikten av att utveckla just talfakta som en begreppslig förståelse för tal (Fuson, 1992; Baroody & Purpura, 2017), eftersom det öppnar för möjligheter att härleda kända talfakta, såsom "jag vet att 3 + 3 är 6, alltså måste 3 + 4 vara ett mer, 7". I ljuset av det variationsteoretiska ramverk som vi använder som grund för den designade undervisningen och tolkningar av barnens lärande, innebär talfakta därmed *att barnen uppfattar tal som del-helhetsrelationer och förmår urskilja hur delar och helhet kan hanteras i förhållande till olika aritmetiska problem, det vill säga ett flexibelt sätt att se och använda tal som går utöver att memorera talkombinationer.*

Metod och material

Fokus för studien som presenteras i denna artikel är kvalitativa skillnader i barns uppfattningar av tal och hur uppfattningarna relaterar till räknefärdigheter i termer av urskilda aspekter. Av särskilt intresse är att uppmärksamma eventuella mönster av förkunskaper och lärande i termer av förändrade uppfattningar när intervjudata ses i ett longitudinellt perspektiv.

Urval

Alla barn (n=65) som deltog i interventionsprogrammet intervjuades vid tre tillfällen, före, strax efter och fördröjt, ett år efter interventionen. Barnens vårdnadshavare hade skriftligt och muntligt tagit del av information om projektet, samt gett sitt skriftliga medgivande till att barnen deltog och att interventionen och intervjuerna dokumenterades med video.

Vid första intervjun var barnen i medeltal fem år och tre månader gamla (spridning på ålder var fyra år och tio månader till fem år och nio månader), vid andra intervjun var de i medeltal fem år och elva månader gamla och vid sista intervjun sex år och elva månader.

För att besvara forskningsfrågorna i denna artikel, gjordes ett första urval av de barn som i den tredje intervjun svarade rätt direkt, utan längre betänketid, på de aritmetikuppgifter som också ställts i motsvarande intervjuer före och genast efter interventionen (se uppgifter nedan). De 14 barn som uppfyllde detta kriterium valdes således ut för djupare analys. Dessa barn ansågs, utifrån sina svar i den tredje intervjun, ha uppnått det som interventionen hade satt som mål: att utveckla sådan förståelse av tal så att de framgångsrikt finner svar på enkla aritmetikuppgifter. I den tredje intervjun hade dock två nya uppgifter lagts till. I dessa hade talomfånget vidgats till att överskrida 10 (se uppgifter nedan). Detta hade emellertid inte barnen mött i undervisningen i interventionen. Huruvida detta hade varit ett innehåll i förskoleklassens matematikundervisning, finns det däremot ingen information om. Baserat på det stora antalet felsvar på dessa uppgifter i den tredje intervjun kan det dock vara rimligt att tänka sig att detta inte systematiskt undervisats om. Valet av de nya uppgifterna motiverades av att vi ville undersöka i vilken utsträckning barnens taluppfattning omfattade aspekter som öppnar upp för att generalisera principen om talrelationer till högre talområden, det vill säga att kunna härleda talfakta genom att urskilja specifika och generella drag hos talen (Marton, 2006).

Variationsteoretisk ansats för att tolka uttryck för uppfattningar av tal

Datamaterialet från intervjuerna med alla deltagande barn, det vill säga tre gånger 65 intervjuer, har i tidigare studier analyserats för att komma åt uppfattningar av tal så som de kom till uttryck i barnens sätt att lösa additions- och subtraktionsuppgifter inom talområdet 1-10 (se Björklund & Runesson Kempe, 2019; Björklund, Ekdahl & Runesson Kempe, 2020). Uppfattningarna tolkades utifrån hur barnen uttryckte sig i ord och i handling, det vill säga att deras sätt att lösa en uppgift har tolkats som uttryck för deras sätt att uppfatta talen och strukturen i uppgiften. Detta sätt att tolka barns uttryck för uppfattningar av tal grundar sig i en variationsteoretisk ansats.

Variationsteorin har sitt ursprung i fenomenografin (Marton, 1981) och forskning om uppfattningar där det antas finnas ett begränsat antal sätt att uppfatta ett visst fenomen. Utfallsrummet av denna variation av uppfattningar hos en grupp individer har setts som värdefulla att beakta i undervisning, som då utgår från elevers aktuella uppfattning i en strävan att utveckla denna i riktning mot en uppfattning som vidgar individens förståelsehorisont. Variationsteorin bidrar i denna studie med en förklaringsmodell dels till *varför* skillnader i uppfattningar förekommer och vad som konstituerar sådana skillnader, dels till hur undervisning möjliggör att nödvändiga (och för eleven kritiska) aspekter av fenomenet ifråga kan urskiljas (Marton, 2015). Genom att skapa ett systematiskt mönster av variation och invarians i undervisning ges eleven möjlighet att få syn på dessa aspekter.

Urskilda aspekter är det som konstituerar en viss uppfattning av ett fenomen. Om elevens uppfattning ska kunna förändras, är det nödvändigt att undervisningen synliggör de aspekter som ännu inte är urskilda. Ju fler aspekter som samtidigt erfars och relateras till varandra, desto mer komplex uppfattning konstitueras. Detta möjliggör i sin tur användning av fler strategier och större flexibilitet i problemlösning.

I denna studie identifieras barnens uppfattningar av tal i observationer av de strategier och resonemang för problemlösning som barnen tillämpar i våra intervjuer och som beskrivs i termer av urskilda aspekter.

De uppfattningar som kom till uttryck i respektive uppgift har tolkats av två eller flera i forskargruppen. När samstämmighet inte har rått, har observationen diskuterats och tolkningar reviderats tills samstämmighet har uppnåtts. Uppfattningarna föll ut i sex kvalitativt olika kategorier och utgör ett kategoriseringsverktyg som rapporterats även i tidigare publikationer (Björklund & Runesson Kempe, 2019; Björklund, Ekdahl & Runesson Kempe, 2020). Därmed har kategoriernas reliabilitet prövats utifrån ett flertal olika frågeställningar där uppfattningarna utgjort underlag för analys.

A. *Tal som ord*. När barn upprepar samma räkneord som har sagts i uppgiften, säger räkneord som inte kan hänvisas till den aktuella uppgiften (säger ett eller flera räkneord i slumpmässig följd) eller relaterar sitt svar till irrelevanta förhållanden (t.ex. ”det blir fem för jag är fem år”), tolkas detta som ett uttryck för att barnet uppfattar tal som en särskild typ av ord som förekommer i sammanhang där kvantiteter behandlas, men barnet urskiljer inte på vilket sätt tal relaterar till dessa kvantiteter (se även Wynn, 1992).

B. *Tal som namn* innebär att barnet uppfattar att varje objekt tilldelas ett namn (se Brissiaud, 1992; Neuman, 1987), vilket betyder att ett visst finger kan ha namngetts, till exempel ”sex” för höger tumme, men avser endast den tummen och inte en samling av objekt eller fingrar tillsammans (kardinalitet). En följd av denna uppfattning är att barnet på frågan ”du har tio godisar och äter upp sex, hur många har du kvar” svarar med att visa en hel hand och andra handens tumme, viker ner tummen ”den åt jag upp” och kvar är hela handen som barnet benämner ”fem kvar”.

C. *Tal som omfång.* Uppfattningen innebär att tal ses som en mängd med egenskap av omfång som gör att mängder går att jämföra på ett ungefär, mer-mindre, fler-färre, vilket gör att svar på aritmetiska uppgifter ligger nära det korrekta men ter sig oftast som en gissning. Uppfattningen saknar den urskilda aspekten ordinalitet, vilket gör att barnet inte förmår utföra exakta beräkningar såsom att ”en till” motsvarar följande ord i räkneramsan.

D. *Tal som räknebara enheter* innebär att barnet uppfattar tal som enheter att räkna till exempel på en tänkt talrad. Uppgifter där enheter sätts samman löses genom att addera en-heter. Svårigheter uppstår till exempel i subtraktioner, när barnet blir tvunget att operera på två talrader, samtidigt, en för den talrad man räknar ner på och en för att hålla ordning på hur många en-heter som räknats ner, så kallad dubbelräkning (Fuson, 1992; Neuman, 1987; Steffe, Thompson & Richards, 1982).

E. *Tal som struktur.* Till skillnad från föregående kategori uppfattas talen här som sammansatta enheter. Uppfattningen karakteriseras av att barnet urskiljer tal som relaterade till varandra, men relationen behöver konkretiseras till exempel med hjälp av fingermönster. Talrelationerna karakteriseras därmed som lokala relationer (se Venkat, Askew, Watson & Mason, 2019) som barnet upptäcker genom att skapa strukturerna, antingen genom att räkna fram någon del eller helheten, men främst genom att direkt 'se' tal som sammansatta enheter som kan ingå i en större helhet.

F. *Tal som kända fakta.* Denna uppfattning reflekterar en avancerad förståelse av talrelationer (Askew & Brown, 2003) som kommer till uttryck i att barn "vet" svaret direkt utan att räkna ut. Barnet förmår resonera sig fram till svar genom att härleda från tidigare kända talrelationer.

Uppfattningarna som beskrivs ovan är kvalitativt olika. De är teoretiskt förankrade i variationsteorin i termer av aspekter som urskilts respektive ännu inte urskilts för att en viss uppfattning ska komma till uttryck.

Olika uppfattningar av tal föranleder dessutom olika möjlighet att hantera tal och tillämpa strategier för att lösa aritmetiska uppgifter. Det finns därmed en hierarki i uppfattningarna där mer utvecklade uppfattningar av tal karakteriseras av att barnen har urskilt fler nödvändiga aspekter av tal och därmed har tillgång till en bredare repertoar av strategier. På så sätt kan exempelvis kategori F inkludera fler urskilda aspekter än E, och E kan inkludera fler aspekter än C. Att tolka barns förståelse är dock en grannlaga uppgift, eftersom de analysenheter vi har att förlita oss på är deras sätt att hantera en uppgift och olika uttryck i ord och handling. Barnens strategier i problemlösningen blir därför viktiga att beakta, men alltid i relation till hur barnen resonerar om sina svar och deras tillvägagångssätt (t.ex. användning av fingrar). Huruvida barnen kan tillskrivas en uppfattning av tal och förmåga att tillämpa strategier är därmed en empirisk fråga som kräver noggrann undersökning. Så har till exempel gjorts i tidigare publicerade studier vad gäller projektdeltagarnas uppfattning av tal som struktur (Kullberg & Björklund, 2019). I den aktuella studien riktas fokus särskilt mot *tal som kända fakta* för att, på empirisk grund, undersöka vad denna kategori innebär, i termer av urskilda och ännu inte urskilda aspekter samt hur denna uppfattning av tal konstitueras under en längre tidsperiod.

Data för analys

För att svara på forskningsfrågorna om vad det innebär att barn ger uttryck för att uppfatta tal som kända fakta samt hur denna uppfattning av tal konstitueras, har svaren analyserats från de 14 barn som har tolkats ge uttryck för att uppfatta tal som *kända fakta* (kategori F) inom talområdet 1-10 *vid tredje intervjutillfället*. Alla tre intervjutillfällen, och fyra (i intervju 1 och 2) respektive sex (i intervju 3) uppgifter har utgjort underlag för analys (totalt 196 observationer av tillvägagångssätt). Intervjuerna bestod av muntliga uppgifter (se nedan) där barnen uppmuntrades visa och förklara hur de resonerade sig fram till sina svar. Inga manipulativa materiel utöver barnens egna fingrar fanns tillgängliga. Videodata har möjliggjort noggranna analyser av såväl verbala uttryck som fingeranvändning men också subtila uttryck som ögon- och munrörelser.

Fyra uppgifter från de videoinspelade intervjuerna utgör data för den första grundläggande analysen och urvalet, eftersom de kan visa på barnens uppfattning av hur tal används i numerisk problemlösning:

1. Om du har hittat 2 snäckor och din kompis har hittat 5. Hur många har ni tillsammans då?
2. På lördag får du 10 godisar och äter genast upp 6. Hur många har du kvar då?
3. Tänk dig att du ska duka ett bord. Du sätter ut 3 glas på bordet. Ni är 8 barn. Hur många glas behöver du hämta till?
4. På din födelsedag har du blåst upp ballonger. På kvällen har 3 ballonger gått sönder. Nu finns 6 hela ballonger kvar. Hur många ballonger hade du blåst upp från början?

Uppgifterna ges muntligt till barnen i individuella intervjuer. I den tredje intervjun ingår uppgifter som överskrider 10 i talomfång, av vilka en additions- och en subtraktionsuppgift tas med i denna analys:

5. Du har hittat 8 kulor och din kompis har hittat 5 kulor, hur många kulor har ni tillsammans?
6. Du har 15 klistermärken och ger 7 stycken till din kompis. Hur många klistermärken har du kvar då?

Varje barns svar till respektive uppgift i de tre intervjuerna har tolkats och beskrivits som uttryck för hur barnet ifråga uppfattar talen det möter i en viss uppgift. Olika uppgifter förutsätter att barnet kan urskilja vissa aspekter för att kunna närma sig en möjlig lösningsstrategi, vilket gör att analysen kan visa barns olika uppfattningar beroende på vilken uppgift de möter. Barnen kan till exempel tolkas ge uttryck för tal som kända fakta om de svarar snabbt och utan att tveka ”7” på uppgift 1, men ge uttryck för att uppfatta tal som räknebara enheter genom att tillämpa dubbelräkning i uppgift 2 (räkna ner på räkneramsan från 10, 9, 8… tills 6 enheter har räknats bort, med stöd av att visa ett finger för varje nerräknat räkneord). I resultatredovisningen används tabeller för att överskådligt visa på uppfattningar identifierade i respektive uppgift liksom förändringar i uppfattningar över tid (de tre intervjutillfällena). Se exempel nedan (tabell 1).

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	E1	F	F
10-6=_	*C*	E2	F
3+_=8	*C*	E2	F
_-3=6	*C*	E2	F
8+5=_	-	-	E2
15-7=_	-	-	E2

Tabell 1. *Exempel på tabell som illustrerar uppfattningar av tal utifrån de sex olika kategorierna (A-F) per uppgift och intervjutillfälle för ett av barnen.Kursivering innebär att svaret var felaktigt.*

I tabellerna anges uppfattningarna med beteckningen A-E (se beskrivning av kategorisering av uppfattningar ovan). E1 innebär en differentiering inom kategorin där barnet främst gett uttryck för att urskilja struktur men tillämpar både direkta sammansatta representationer (fingermönster) *och* enstegsräkning för att konstruera någon del eller helheten. E2 innebär att barnet direkt representerat en struktur för talen på sina fingrar. Kursiv text i tabellerna betyder att svaret som barnet kommer fram till är felaktigt, normal text indikerar rätt svar på uppgiften.

Resultat

Resultaten av den variationsteoretiska analysen presenteras i två delar: först en översikt av de uppfattningar som framträder i uppgifter inom talområdet 1-10, följt av en breddad analys som inkluderar uppgifterna som överskrider 10. I den senare delen presenteras fyra identifierade mönster i uppfattningar som illustreras i tabeller och med exempel från empirin.

Översikt av uppfattningar inom talområdet 1–10

De 14 barn som vid den tredje intervjun svarade snabbt och gav rätt svar ingick i studiens djupare analys, de fyllde kriteriet att hantera tal som kända talfakta. När vi närmare studerar vilka uppfattningar som dessa barn gav uttryck för i intervjuerna 1 och 2 (strax innan och genast efter interventionen) kan inget direkt mönster urskiljas. Här finner vi att det finns barn som redan innan interventionen svarar snabbt och med rätt svar på alla aritmetikuppgifter men också barn som ger uttryck för uppfattningar där tals innebörder inte koordineras så att barnen förmår använda talen för att försöka lösa uppgifter där en del eller helhet efterfrågas (kategori B och C).

Denna första överblick tycks indikera att undervisningen fångat upp de barn som behövde få möjlighet att erfara fler aspekter av tal och hur tal kan förstås som del-helhets-relationer. Samtidigt tycks observationerna också visa på att de som redan kan, bekräftas i sitt kunnande och kan lösa samma uppgifter som kända talfakta också efter att ha deltagit i undervisning.

Översikt av uppfattningar i talområde som överskrider 10

Vårt intresse riktas dock mot vad det innebär att dessa barn kan lösa uppgifter som kända talfakta inom talområdet 1-10. Har de utvecklat en djupare generaliserad förståelse för talrelationer eller är det memorerade talkombinationer? För att få syn på detta analyserades uppgifterna 5) och 6) i relation till hur barnens uppfattningar kommit till uttryck i de två tidigare intervjuerna. Här framträder intressanta olikheter som kan visa på att barnen, trots att de till synes på ett likadant sätt tillämpar kända talfakta, urskiljer fler eller färre nödvändiga aspekter av tal. Vidare visar detta att det inverkar på hur de förmår att lösa uppgifter i talområden som de inte har mött i undervisningen eller eventuellt inte har förmått att erfara i undervisningen. Den kvalitativa analysen mynnar ut i fyra kvalitativt skilda mönster i hur uppfattningen av tal ter sig över de tre intervjuerna. De exempel som lyfts fram till diskussion illustrerar typiska mönster hos ett eller flera barn.

Talkompisar men inte talrelationer

I och med att barnen i vårt urval ofta svarar snabbt, säkert och korrekt på uppgifterna kan detta likna uttryck där barnen har en utvecklad taluppfattning. En närmare analys av den mer krävande uppgiften 15 – 7 = _ visar emellertid att en del barn har svårigheter. Dessa barn visar att de kan talkombinationer upp till tio, men inte talkombinationer över 10 och förmår inte att härleda dessa från de kombinationer som de kan. Figur 1 visar exempel på svar från ett barn som inte visar förmåga att på uppgiften 15 – 7 = _ kunna urskilja exempelvis den talrelation 7/5/2 (eller 7 = 5 + 2) som hen behärskar (F) i andra uppgifter. Kunskapen om denna talrelation skulle kunna ha använts och hjälpt barnet att lösa uppgiften, till exempel som 15 – (5 + 2), alltså att 7 bryts upp i 5 och 2. Med andra ord, barnen kan visserligen ha lärt sig vissa talkombinationer men har inte urskilt relationerna mellan och inom tal, vilket skulle kunna öppna upp för att hantera talrelationer över tio.

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	F	F	F
10-6=_	*B*	F	F
3+_=8	E2	F	F
_-3=6	E2	*C*	F
8+5=_	-	-	F
15-7=_	-	-	*D*

Räknar tyst fram till fem, rör på munnen medan han viker upp ett finger åt gången på höger hand. Viker (tyst) upp ett finger åt gången igen på samma hand, fortsätter vika upp två fingrar på vänster hand, viker ner dem en åt gången igen och tummen på höger hand, säger ”fyra”.

Figur 1. *Exempel på ett barns progression i uppfattningar samt citat från tillvägagångssätt som tolkats som uttryck för att barnet uppfattar tal som räknebara enheter i form av dubbelräkning på fingrarna.*

Ytterligare ett exempel på att barnen kan ha lärt sig talkombinationer men inte *talrelationer* framträder bland de barn som uppfattar tal som omfång (kategori C) men som har svårigheter att se struktur i uppgifterna. Barnet i exemplet i figur 2 har lärt sig talkombinationer i talområdet 1-10 men måste i talområdet över 10 hantera uppgifterna som enstegsräkning och därmed hålla fokus parallellt på antal enheter som räknats fram och den helhet som de adderade enheterna en efter en bildar. Det mönster vi kan se, att tal uppfattas som omfång (kategori C) både före och direkt efter interventionen, ger anledning att begrunda i vilken utsträckning dessa barn har haft möjlighet att urskilja vad undervisningen de deltagit i har erbjudit. Tals del-helhetsrelationer är svåra att urskilja om barnet inte förmår att koordinera kardinala och ordinala aspekter av tal, samtidigt. De uttryck för talfakta som dessa barn ger är således troligen memorerade talkombinationer. I figur 2 ser vi exempel på hur ett barn visserligen kommer fram till rätt svar på 8 + 5 = _ , men först efter en lång betänketid. Barnets beskrivning av hur hen resonerat sig fram till svaret visar att enstegsräkning är den strategi som hen tillämpar. Detta ser vi som ett uttryck för att barnet urskiljer tals kardinalitet och ordinalitet, dock inte samtidigt, eftersom hen hanterar talen som parallella talrader av en-heter där varje räknat tal för med sig en förändring på den andra talraden ”nio är en, tio är två …” tills alla fem en-heter lagts till den första delen åtta, som successivt ökat med ett för varje räknat tal.

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	F	F	F
10-6=_	*C*	*C*	F
3+_=8	*C*	*C*	F
_-3=6	*C*	*C*	F
8+5=_	-	-	D
15-7=_	-	-	*D*

”Jag vet inte. Kanske två (visar pek- och långfinger). Två tror jag.”

(10 sekunder tyst paus) ”Tretton. Åtta (viker fram fem fingrar på en hand, ett åt gången). Jag räknar samtidigt som jag räknar. Så, åtta (sveper över ena handens rygg på bordet) och en (pekar på bordet med pekfingret) det är nio. Nio är en (visar upp pekfingret) tio är två (pekar på bordet, visar två fingrar i luften) elva är tre (pekar på bordet, visar tre fingrar) tolv är fyra (pekar på bordet, visar fyra fingrar) och tretton är fem” (pekar på bordet, visar fem fingrar).

Figur 2. *Exempel på progression i uppfattningar hos ett barn samt citat från tillvägagångssätt som tolkats som uttryck för att barnet uppfattar tal som omfång (kategori C) och därmed saknar möjlighet att tillämpa några räknestrategier som kunde synliggöra hur delar i uppgiften relaterar till varandra och till helheten, samt i intervju 3 tillämpar enstegsräkning för att lösa uppgifterna över tio.*

Lokala talkombinationer

Två av de barn som uttryckte sig i termer av talfakta genomgående i alla intervjuer inom talområdet 1–10 visade sig ha stora svårigheter att generalisera detta kunnande till det högre talområdet (se exempel i figur 3).

I uppgifterna som överskrider 10 hanterar de beräkningen med räknestrategier där varje räkneord utgör en enhet som markeras med ett finger för att hålla ordning på hur många som räknats upp (dubbelräkning). I subtraktionsuppgiften blir dubbelräkningen för svår för det ena barnet. Det andra barnet tillämpar en gissning, utan försök till att lägga upp en strategi eller struktur för att finna den del som frågas efter (se figur 3). Barnen tolkas här, med grund i att de svarar direkt och säkert redan i första intervjun, ha lärt sig talkombinationer som de ser möjliga att tillämpa i de numeriska problem som de ställs inför. Interventionen behandlar talrelationer inom talområdet 1-10. Dessa barn visar redan i första intervjun att de är bekanta med talkombinationerna inom 1-10 och därför behöver de inte urskilja hur talen utgörs av del-helhets-relationer för att lösa uppgifterna. När talkombinationerna inte kan tillämpas längre, i talområdet över 10, är barnen tvungna att hantera talen som enheter på talraden. Deras talfakta konstitueras därmed av lokala talkombinationer.

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	F	F	F
10-6=_	F	F	F
3+_=8	*B*	F	F
_-3=6	F	F	F
8+5=_	-	-	D
15-7=_	-	-	*C*

”Fem. För att tre plus fem är lika med åtta.”

Barn: ”Nio.”
Intervjuare: ”Hur visste du det? Hur tar man reda på det?”
Barn: ”Jag tänkte. Jag funderade tyst.”

Figur 3. *Exempel på progression i uppfattningar samt citat från tillvägagångssätt som tolkats som uttryck för att barnet uppfattar tal som kända fakta (kategori F). Motiveringarna som barnen ger är olika, vilket med stor sannolikhet härrör från svårigheter att förklara ett matematiskt resonemang i intervju 1 (som femåring) och ett standardsvar i intervju 3 som förvisso är korrekt.*

Att hantera talrelationer strukturellt

I analysen av hur uppfattningarna förändrades från den första till den tredje intervjun finner vi sex barn som hanterar talrelationer strukturellt både inom talområdet 1-10 och över. De svarar direkt (rätt) på uppgifterna i talområdet under 10 vid tredje intervjun, men behöver strukturera på sina fingrar för att lösa uppgifterna som går över 10. Det som utmärker dessa barn är att de urskiljer talrelationerna och ser uppgifterna som strukturer, i vilka talen ges mening i förhållande till varandra. En viktig observation är dock att dessa barn vid den första intervjun uppvisade svårigheter att koordinera tals ordinalitet och kardinalitet i och med att de överlag uppfattade tal som omfång eller tillämpade enstegsräkning (opererade på parallella talrader). Vi kan se två variationer i hur uppfattningarna förändras över tid hos dessa barn.

Flera barn visade i första intervjun en svag taluppfattning som karakteriseras av att de uppfattade tal i aritmetikuppgifterna som *omfång* (kategori C), det vill säga att tal kan användas för att beskriva kvantiteter men att de uppfattade tal som ungefärliga mängder och hanterade därmed inte tal som diskreta enheter. Denna taluppfattning medför att det blir svårt att finna en saknad del eller lista ut helheten om den saknas från början (t.ex. _ - 3 = 6). Däremot visar dessa barn att de i viss mån urskiljer struktur i uppgifterna, eftersom de svarar med att resonera om delar som additiva relationer i den enklaste raka additionen 2 + 5 = _ (kategori E, se figur 4). Detta kan tolkas som att barnen i vissa situationer förmår att urskilja nödvändiga aspekter av tals del-helhets-relationer och därmed har förutsättningar att urskilja denna aspekt i andra talsituationer, när detta har uppmärksammats i interventionens aktiviteter. Slutsatsen är att barnen i och med sin förförståelse av tal har haft förutsättningar att tillägna sig vad interventionen erbjudit, till exempel där ett barn i första intervjun tillämpade enstegsräkning i uppgift 2, men urskiljde uppgiftens struktur och enheter inom denna att räkna på: ”Jag åt upp sex. Sju … (gör fyra cirkelrörelser i luften framför sig) så var det fyra till”. Interventionens utfall visar sig också i intervju 2 där barnen överlag gav uttryck för att uppfatta tal som struktur som inbegriper att hantera tal som sammansatta och som relaterade till andra tal (kategori F och E2).

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	E1	F	F
10-6=_	*C*	E2	F
3+_=8	*C*	E2	F
_-3=6	*C*	E2	F
8+5=_	-	-	E2
15-7=_	-	-	E2

”Får jag räkna med fingrarna? En, två, tre, fyra, fem (viker upp ett finger åt gången med hjälp av andra handen, fortsätter vika upp två fingrar på andra handen) sex, sju!”

Figur 4. *Exempel på ett barns progression i uppfattningar samt utdrag av tillvägagångssätt som tolkats som uttryck för att barnet uppfattar tal som struktur i och med att hen tillämpar en räknestrategi som innebär att två delmängder uppfattas bilda en större helhet.*

Ett barn utmärker sig bland de som utvecklar uppfattningen tal som struktur och som kända fakta i intervju 3, i och med att hen i intervju 1 uppvisade en mycket svag taluppfattning som gör att hen inte förmådde att tillämpa den mest basala 'räkna-alla' strategin i uppgift 1) (se figur 5).

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	*B*	D	F
10-6=_	*C*	E1	F
3+_=8	-	E1	F
_-3=6	-	E1	F
8+5=_	-	-	E2
15-7=_	-	-	*E2*

(Pekar på bordet i en imaginär rad) "en, två, tre, fyra, fem". (Flyttar fingret för varje räkneord, gör en paus och flyttar fingret lite längre bort på bordet, pekar) "En, två, tre, fyra. Hur många blir det?"

Figur 5. *Exempel på progression i uppfattningar för ett barn samt citat från tillvägagångssätt som tolkats som uttryck för att barnet uppfattar tal som namn utan ansats att se enheterna som sammansatta.*

Genom undervisningen i interventionen fick barnen stöd i att urskilja tal som sammansatta enheter vilka kan relateras till andra sammansatta enheter i en del-del-helhets-struktur (Björklund, Ekdahl & Runesson Kempe, 2020). Strax efter interventionen kan vi se att barnet i figur 5 visserligen skapade delar genom att räkna fram enheter, men trots det uppfattade en struktur i uppgifterna till vilka talrelationerna knyts och barnet kunde tillämpa strukturerande strategier för att lösa uppgifterna. Den tredje intervjun visar att barnet uppfattar tal som kända fakta och behöver inte längre skapa delarna och 'se' dem i förhållande till andra delar eller helheten. Av särskilt intresse är att detta barn i den tredje intervjun tillämpar strukturerande strategier för att lösa uppgifter som går över tio, *utan att räkna* fram enheter. Istället hanterar hen tal som sammansatta, till exempel som fingermönster, trots att hen före interventionen hade svårigheter att urskilja tal som sammansatta.

Generaliserade talfakta

Ett barn utmärker sig i studien. Hen gav uttryck för att uppfatta tal som talrelationer redan i den första intervjun. Barnet är den enda deltagaren som resonerade om just tals relationer och hur delar förhåller sig till varandra och till helheten innan interventionen. När talområdet vidgas i uppgifterna 5) och 6) visar barnet att hen både har kända talfakta att tillämpa i additionsuppgiften och hanterar subtraktionsuppgiften med tio som en hållpunkt.

Uppgift	Int. 1	Int. 2	Int. 3
2+5=_	F	F	F
10-6=_	F	F	F
3+_=8	F	F	F
_-3=6	F	F	F
8+5=_	-	-	F
15-7=_	-	-	E2

"Åtta. Fem mindre, då är det två. Fem mindre från femton det är tio då. Sen tar jag två bort igen, då blir det ju åtta."

Figur 6. *Exempel på ett barns uppfattningar samt citat från tillvägagångssätt som tolkats som uttryck för att barnet uppfattar tal som struktur, vilket framkommer i barnets sätt att resonera om delar som sammansatta, samtidigt som delar av delarna hanteras i förhållande till tio som en hållpunkt för resonemanget.*

Diskussion och slutsatser

Den kvalitativa analysen mynnar ut i fyra kvalitativt skilda mönster i hur uppfattningen av tal ter sig över de tre intervjuerna: som *talkompisar men inte talrelationer, lokala talkombinationer, hantering av talrelationer strukturellt* och *som generaliserade talfakta*. De två första visar att barnen, trots att de gett svar som tolkats som talfakta inom talområdet 1-10, i den tredje intervjun inte förmår generalisera talrelationer så att uppgifter som överskrider 10 kan lösas på sätt som är utvecklingsbara. De två senare beskrivningarna visar å andra sidan på en begreppsmässig förståelse av tal som del-helhets-relationer, som barnen förmår hantera strukturellt även i andra sammanhang än vad interventionen har behandlat. De uppfattningar som barnen tar med sig in i interventionsprojektet tycks därmed kunna ha implikationer för deras möjligheter att tillgodogöra sig undervisningen i interventionsprogrammet. Motsvarande analys med alla deltagande barn i interventionsprojektet, även de som inte hade utvecklat talfakta vid tredje intervjun, skulle kunna bidra till att säkerställa om så är fallet. Den data som vi har analyserat utgör ett avgränsat urval och slutsatser som kan dras står naturligtvis i förhållande till denna begränsning. Trots detta kan de mönster av uppfattningar och utvecklingstrender i uppfattningarna som vi har funnit bidra till en fördjupad förståelse av vad det kan innebära att barn tycks ge uttryck för att uppfatta tal som kända fakta. Den variationsteoretiska analysen gör det alltså möjligt att tolka *varför* barns till synes framgångsrika strategier ibland kan generaliseras och tillämpas i nya talområden men ibland förblir lokalt tillämpbara strategier.

De tidiga åren i barns liv omfattar en stor variation av sätt att förstå och använda tal men också en stor potential för att utveckla barns taluppfattning som en grund för fortsatt aritmetiklärande. Det som däremot inte ter sig som självklart, sett mot bakgrund av de resultat som här presenterats, är att barn som ”kan” redan i fyra- till femårsåldern kan lämnas utanför undervisningen, eller att det tas för givet att deras kunnande är uttryck för djupare begreppsmässig förståelse som är generaliserbar i termer av *principer* att tillämpa i nya problemlösningssituationer och matematikområden. För att dra en parallell till uttrycket ”Matteuseffekten”[2], det är inte nödvändigtvis så att det är de som redan har, eller kan i vårt fall, som får ut mer av att delta i undervisning, men undervisning som fångar upp barns begynnande förståelse kan öppna upp för barnen att nå stora framgångar. I den teoretiska diskussionen om matematiklärande finns en ständigt aktuell fråga om förkunskaper och vilka förmågor som lägger grund för mer avancerade färdigheter. Särskilt inom kognitionsvetenskap och utvecklingspsykologisk forskning är intresset för att reda ut samband i konstruktionen av och mellan bärande begrepp i matematik framträdande (Paliwal & Baroody, 2020; Jung m.fl., 2013). Det som vi har påvisat i denna kvalitativa studie av hur barn tycks förmå att tillägna sig det innehåll för lärande som erbjuds i en noggrant designad undervisning, ger också grund för att beakta förkunskaper som är nödvändiga för att utveckla fördjupad och generaliserbar förståelse. Samtidigt tycks det ligga i

2 Jämför Matteusevangeliet 25:29: "Var och en som har, han skall få, och det i överflöd, men den som inte har, från honom skall tas också det han har." Begreppet är myntat av sociologen Robert K. Merton.

sakens natur att barn också behöver finna *behov* av att få syn på nya aspekter som hjälper dem att förstå en uppgift som relationell. När barnen kommer fram till svar som är rätt (se kategori *Talkompisar men inte talrelationer*), men inte bygger på ett resonemang om relationer mellan talen tycks barnen inte heller utmanas att brottas med att förstå samband och aritmetiska grundprinciper.

En slutsats av vår detaljerade studie av barnens uttryck för sina uppfattningar av tal och talrelationer är att det inte räcker med att förlita sig på observationer av barns strategianvändning – uttryck för talfakta kan snarare ses som ett komplex av aspekter som är nödvändiga att urskilja. De barn som har utgjort urval för denna analys uppvisade en strategi som, enligt litteraturen, är den mest avancerade och ska reflektera flexibilitet och begreppsligt kunnande. Vad vi kan konstatera utifrån analysen är att när talområdet vidgas kan barns uttryck för *tal som kända fakta* ändå vara begränsade till lokala relationer, eller till och med memorerade talkombinationer (se Venkat m.fl., 2019). Detta visade sig till och med kunna vara ett hinder för att tillägna sig mer framgångsrika och utvecklingsbara sätt att uppfatta tal. Denna insikt gör också att formuleringen av uppfattningen tal som kända fakta kan behöva nyanseras för att bättre beskriva den egentliga uppfattning av tal som snabba korrekta svar kan vara uttryck för. Studien visar att bakom snabba svar som kan tolkas som kända talfakta, kan olika sätt att förstå tal och talrelationer ligga. Detta ger också anledning att begrunda hur man i forskning kan undersöka barns uppfattningar, där verbala utsagor ofta är sparsamma och förklarande resonemang kräver metakognitiva förmågor att resonera om sitt eget tänkande, något som inte med självklarhet kan förväntas av unga barn (se Pramling, 1983).

Studiens resultat har betydelsefulla pedagogiska implikationer, dels att till synes säkra och snabba svar inte nödvändigtvis är uttryck för den flexibla och begreppsligt grundade förståelse som eftersträvas i matematikundervisning, dels att undervisningen inte får lämna dessa elever att själva upptäcka additiva relationer som kan vidga deras talförståelse och flexibilitet i problemlösning. Detta är särskilt betydelsefullt i undervisning om matematikens grunder som genomförs i förskolan, i och med att både svensk och internationell forskning visar att yngre barn ofta blir bekräftade i sitt kunnande men mycket mer sällan utmanade (Björklund & Barendregt, 2016; Claessens, Engel & Curran, 2014). De barn som redan tycks behärska räknandets grunder kan alltså behöva stöttning lika väl som de barn som inte ännu urskilt relationer inom och mellan tal.

Referenser

Askew, M. & Brown., M. (2003). *How do we teach children to numerate? A professional user review of UK research*. London: BERA.

Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, vol. 20, nr. 5, ss. 427–435.

Bailey, D. H., Nguyen, T., Jenkins, J. M., Domina, T., Clements, D. H. & Sarama, J. S. (2016). Fadeout in an Early Mathematics Intervention: Constraining Content or

Preexisting Differences? *Developmental Psychology*, vol. 52, nr. 9, ss. 1457–1469.

Baroody, A. J., Eiland, M. & Thompson, B. (2009). Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development*, vol. 20, ss. 80–128. doi:10.1080/10409280802206619

Baroody, A. & Purpura, D. (2017). Early number and operations: Whole numbers. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (ss. 308–354). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Björklund, C. & Barendregt, W. (2016). Teachers' mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, vol. 60, nr. 3, ss. 359–377. Doi: 10.1080/00313831.2015.1066426

Björklund, C., Ekdahl, A-L. & Runesson Kempe, U. (2020). Implementing a structural approach in preschool number activities. Principles of an intervention program reflected in learning. *Mathematical Thinking and Learning*. Online first. Doi: 10.1080/10986065.2020.1756027

Björklund, C. & Runesson Kempe, U. (2019). Framework for analysing children's ways of experiencing numbers. I U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis, (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11, February 6 – 10, 2019). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Brownell, W. (1935). Psychological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. I Reeve (Red.), *The tenth yearbook. The teaching of arithmetic. The National Council of Teachers of Mathematics* (ss. 1-31). New York: Teachers College, Columbia University.

Carpenter, T.P., Moser J.M. & Romberg, T.A. (Red.) (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

Cheng, Z.-J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 31, nr. 1, ss. 29–47.

Claessens, A., Engel, M. & Curran, F. C. (2014). Academic content, student learning, and the persistence of preschool effects. *American Educational Research Journal*, vol. 51, nr. 2, ss. 403–434.

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (ss. 224–238). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P. m.fl. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, vol. 43, ss. 1428–1446. Doi:10.1037/0012-1649.43.6.1428.

Ellemor-Collins, D. & Wright, R. B. (2009). Structuring numbers 1 to 20: Developing facile addition and subtraction. *Mathematics Education Research Journal*, vol. 21, nr. 2, ss. 50–75.

Fuson, K. (Red.).(1988). *Children's counting and concepts of number*. New York:

Springer-Verlag.
Gray, E., Pitta, D. & Tall, D. (2000). Objects, Actions, and Images: A Perspective on Early Number Development. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 18, nr. 4, ss. 401-413.
Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, nr.2, ss. 116–140.
Jung, M., Hartman, P., Smith, T. & Wallace, S. (2013). The Effectiveness of Teaching Number Relationships in Preschool. *International Journal of Instruction*, vol. 6, nr. 1, ss. 165–178.
Krajewski,K. & Schneider,W.(2009).Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, vol. 19, nr. 6, ss. 513–526.
Kullberg, A. & Björklund, C. (2019). Preschoolers' different ways of structuring part-part-whole relations with finger patterns when solving an arithmetic task. *ZDM Mathematics Education*. Online First. Doi 10.1007/s11858-019-01119-8
Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I. & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 103, nr. 2, ss. 157-172. Doi: 10.1007/s10649-019-09927-1.
Marton, F. (1981). Phenomenography - describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, vol. 10, nr. 2, ss. 177–200.
Marton, F. (2006). Sameness and difference in transfer. *The Journal of the Learning Sciences*, vol. 15, nr. 4, ss. 499–535. Doi: 10.1207/s15327809jls1504_3
Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.
Mononen, R., Aunio, P., Koponen, T. & Aro, M. (2014). A Review of Early Numeracy Interventions for Children at Risk in Mathematics. *International Journal of Early Childhood Special Education* (INT-JECSE), vol. 6, nr. 1, ss. 25–54.
Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: A phenomenographic approach*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, vol. 18, nr. 2, ss. 3–46.
Nuñes, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.
Ostad, S. (1998). Developmental differences in solving simple arithmetic word problems and simple number-fact problems: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *Mathematical Cognition*, vol. 4, nr. 1, ss. 1–19.
Paliwal, V. & Baroody, A. J. (2020). Cardinality principle understanding: the role of focusing on the subitizing ability. *ZDM Mathematics Education*. Online first. Doi:10.1007/s11858-020-01150-0

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. New York: W.W. Norton & Company Inc.

Polotskaia, E. & Savard, A. (2018). Using the Relational Paradigm: effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in Mathematics Education*, vol. 20, nr. 1, ss. 70–90.

Pramling, I. (1983). *The child's conception of learning*. (Diss.). Göteborg: Göteborgs universitet.

Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education*, vol. 19, nr. 1, ss. 19–43.

Steffe, L.P. (2004). PSSM from a constructivist perspective. I D. H. Clements, J. Sarama & A-M. DiBiase (Red.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. P., Cobb, P. & von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of Mathematics*, vol. 39, nr. 1, ss. 13–17.

Wang, A., Firmender, J., Power, J. & Byrnes, J. (2016). Understanding the program effectiveness of early mathematics interventions for prekindergarten and kindergarten environments: A meta-analytic review. *Early Education and Development*, vol. 27, nr. 5, ss. 692–713. Doi: 10.1080/10409289.2016.1116343

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, vol. 24, nr. 2, ss. 220–251.