

Betydelsen av att variera innehållsliga aspekter för yngre elevers lärande av platsvärde

H Hansson

Sammanfattning

Forskning har visat att elever kan ha svårt att förstå platsvärde och att undervisning inte alltid lyckas med att utveckla deras kunskap om begreppet. Syftet med studien är att bidra med kunskap om undervisning av platsvärde i grundskolans tidigare år. I studien definieras platsvärde som det värde en siffra representerar i ett tal, utifrån var i talet den står. Studien genomfördes av en grupp lärare och en forskare i en intervernerande och iterativ process med 20 elever i grundskolans årskurs 2. Variationsteorin har använts för att analysera videoinspelade lektioner med fokus på vad som gjordes möjligt att lära i undervisningen. Detta jämfördes sedan med eftertest som visade vad eleverna hade lärt sig. Resultatet visar att, när det gäller några av platsvärdets aspekter, verkar vissa variationsmönster som skapades i undervisningen ha varit mer gynnsamma för elevernas förståelse, än andra. Härvidlag förefaller de exempel som används att vara av betydelse. Studiens teoretiska bidrag och relevans för lärares undervisningspraktik diskuteras.

Nyckelord: platsvärde, variationsteori, matematikundervisning, interventionsstudie



Henrik Hansson är lärare i matematik, naturvetenskap samt idrott och hälsa. Han är även lärarfortbildare och skolutvecklare. För närvarande är han också doktorand vid Jönköping University inom forskarskolan Learning Study.

Hansson

Abstract

Research has shown that students may have difficulties understanding place value and that teaching does not always succeed to develop their knowledge about the concept. This study aims to contribute to the knowledge about how place value can be taught in the early years of school. In the study place value is defined as the value represented by a digit in a number on the basis of its position in the number. The study was conducted by a group of teachers and a researcher in an interventional and iterative process with 20 students in primary school grade 2. Variation theory was used to analyse what was possible to learn, which was compared to test results of what the students had learned. The results show that, regarding some aspects of place value, certain patterns of variation created in teaching seemed to have a more positive effect on students understanding, than other. In that respect, the examples used appears to be of importance. The theoretical contribution of the study and its relevance for teaching practice are discussed.

Keywords: Place value, Variation theory, Primary school, Intervention study

Introduktion

Förståelse av decimalsystemet¹ är grundläggande för att kunna utveckla kunskap inom aritmetik (Laski & Vasilyeva, 2014; Tempier, 2016; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Ett centralt begrepp i relation till decimalsystemet är platsvärde (Sun & Bartolini Bussi, 2018a). Insikter om platsvärde ger både en djupare förståelse av rationella tal (Sun, Chambris, Savers, Siu, Dorier, González, Thanheiser, Azrou, McGarvey, Houdement & Ejersbo, 2018b) och tals strukturer (Sun & Bartolini Bussi, 2018) samt är en bra grund för att kunna utföra beräkningar i de fyra räknesätten (Ma, 1999). I denna studie undersöks hur undervisning kan bidra till elevers förståelse av begreppet platsvärde. Data har hämtats från ett samarbete mellan lärare och forskare som gemensamt i en intervenerande och iterativ process undersökt hur platsvärde kan undervisas.

Elever kan ha svårt att förstå platsvärde, till exempel att identifiera vad som är ental, tiotal respektive hundratal i flersiffriga naturliga tal (Cawley, Parmar, Lucas-Fusco, Kilian & Foley, 2007; Fuson, 1990; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Ibland tar de enbart hänsyn till den enskilda siffrans värde istället för att även ta hänsyn till positionens värde (Fuson & Briars, 1990; Kamii, 1986; Verschaffel, Greer & De Corte 2007). När de väl tar hänsyn till positionens värde, beskriver de ibland platsvärde som enbart positionens värde (Ross, 1989). Exempelvis kan de beskriva platsvärdet av siffran '3' i talet 308 som hundra, istället för 3 hundratal eller tre hundra. Även nollans betydelse kan vara problematisk. Istället för att uppfatta siffran '0' som att den beskriver antalet noll av en positions värde (till exempel noll tiotal, i talet 308), kan elever uppfatta den som "ingenting" (Gallardo & Hernandez, 2006). Dessutom kan elever förstå platsvärde på en ytlig nivå. De förstår då inte relationerna mellan positionernas

¹ Decimalsystemet (även kallat det decimala talsystemet eller tiobassystemet) är ett positionssystem med talbasen tio.

värden, till exempel att tio tiotal ger *en* siffran '1' i hundratalpositionen (Cawley m.fl., 2007; Fuson, 1990; Fuson & Kwon, 1992; Herzog, Ehlert & Fritz, 2017; Kamii, 1986; Tempier, 2016; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007).

Undervisning om platsvärde

I tidigare studier framkommer att användning av olika representationer för platsvärde ökar elevers kunskap om begreppet. Då exempelvis elever ritat bilder av ental, tiotal och så vidare (Fuson, Smith & Lo Cicero, 1997), använder tiobasmateriel (Fuson & Briars, 1990) eller relaterar olika representationer till varandra (språkligt, med bilder, konkret materiel, skrivna symboler) (Hiebert & Wearne, 1992) har man funnit positiva effekter på deras lärande. För att tiobasmateriel ska ge avsedd effekt, behöver elever emellertid ha arbetat med det under längre tid, samt förstå dess specifika strukturer och förutsättningar (Mix, Smith, DaSha Stockton, Cheng, & Barterian, 2017). I andra studier framkommer dock att konkreta representationer inte alltid räcker till för att utveckla kunskap om platsvärde utifrån relationerna mellan positionernas värden (Bednarz & Janvier, 1982; Thomas, 2004). Därför kan det vara intressant att undersöka hur undervisning om platsvärde kan genomföras med andra utgångspunkter.

Få studier har undersökt hur innehållet kan varieras i undervisningen för att utveckla elevers kunskap om platsvärde. Ett undantag är en studie av Thanheiser och Melhuish (2018). De utgick från en lokal undervisningsteori till viss del grundad på variationsteoretiska principer. För att vissa aspekter av decimalsystemet skulle bli synliga fick eleverna jämföra detta med andra talsystem. Resultatet visar att eleverna utvecklade kunskap om decimalsystemet och begreppet platsvärde.

I föreliggande studie används, liksom i Thanheiser och Melhuishs (2018) studie, variationsteoretiska principer för att synliggöra aspekter av platsvärde. Variationsteorin är en teori om lärande som betonar att aspekter av innehållet måste varieras för att dessa ska vara möjliga att urskilja (Marton, 2015). Medan Thanheiser och Melhuishs studie gällde lärarstudenter, har denna studie genomförts med elever i grundskolans årskurs 2. Vidare skiljer sig studierna åt när det gäller vilka aspekter av platsvärde som studerats.

Syftet med studien är att fördjupa förståelsen för undervisningens betydelse för elevernas förståelse av platsvärde i grundskolans tidigare år. Forskningsfrågan är:

- Hur kan aspekter av innehållet varieras i undervisning för att skapa möjligheter för eleverna att utveckla förståelse av platsvärde utifrån decimalsystemets principer?

Platsvärde och dess aspekter

I studien definieras platsvärde det värde en siffra representerar i ett tal, utifrån var i talet den står. En siffras plats beskriver värdet för positionen som den står i och siffran beskriver antalet av det värdet (Sun m.fl., 2018b). Exempelvis beskriver siffran '4' i talet 416 platsvärdet 4 hundratal eller 400. Platsvärdet framkommer både av den position som siffran '4' står i samt att siffran '4' representerar antalet fyra av positionens

Hansson

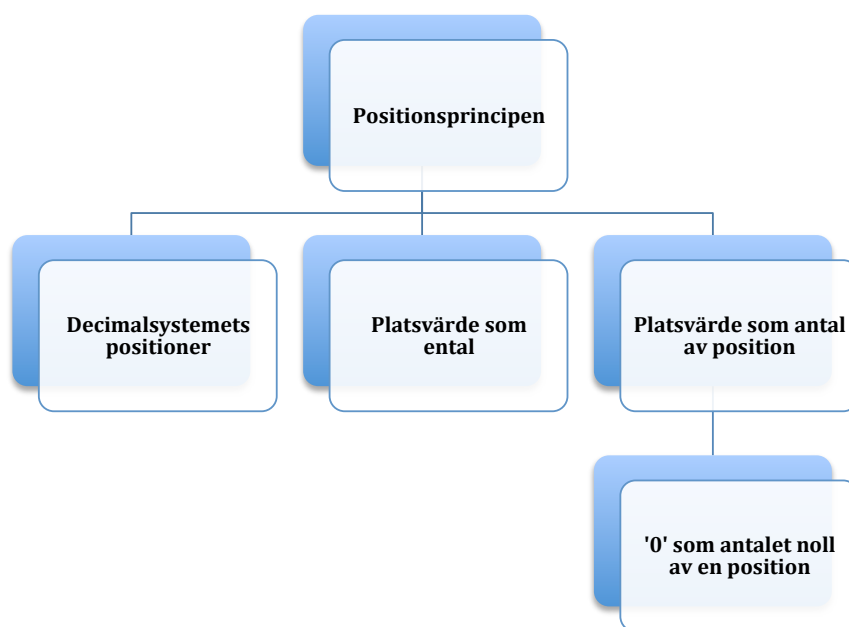
värde. Detta innebär att platsvärde enbart framträder i numeriska representationer av tal och inte i materiel som till exempel tiobasmateriel (Pimm, 2018). En tiostapel visar exempelvis antalet tio som en tiogrupp, men den visar inte positionen. Materiel kan därmed enbart representera ett specifikt värde men inte att det är genom värde och position *tillsammans*, som platsvärdet framkommer.

Platsvärdets aspekter utifrån två principer

I decimalsystemet är platsvärde baserat på två principer; positionsprincipen och decimalprincipen (Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter, Fennema, 1997; Ross, 1989; Tempier, 2016). Positionsprincipen innebär att varje siffras position relaterar till ett specifikt värde (i naturliga tal, de positiva heltalen, innehar andra platsen från höger värdet tio eller tiotal). Decimalprincipen innebär att tio av varje specifik position har samma värde som *en* av den närmast högre positionen, det vill säga positionen till vänster (tio tiotal har samma värde som ett hundratal). Principerna bygger på varandra (Tempier, 2016) men för att tydliggöra de aspekter som studien fokuserar på beskrivs positionsprincipens respektive decimalprincipens aspekter separat.

Positionsprincipens aspekter

Platsvärde utifrån positionsprincipen innefattar många aspekter, men i studien fokuseras på aspekterna *decimalsystemets positioner*, *platsvärde som ental*, *platsvärde som antal av en specifik positions värde*, och *siffran '0' som antalet noll av en position* (se figur 1).



Figur 1. Aspekter av positionsprincipen som fokuseras på i studien.

För att kunna beskriva ett platsvärde är det viktigt att kunna identifiera positionens värde i decimalsystemet (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). I talet 136 innebär det att identifiera att siffran '1' står i hundratalens position, siffran '3' i tiotalens position och siffran '6' i entalens position. Det finns inget gemensamt begrepp i litteraturen för positionernas värden (Chambris, 2018), men i artikeln benämns de som aspekten *decimalsystemets positioner*.

Att enbart kunna identifiera positionernas värden ses emellertid som en procedu-
rell och otillräcklig förståelse av begreppet platsvärde (Ma, 1999). För att också förstå
platsvärde konceptuellt behöver detta förstås utifrån begreppet enhet (översatt från
engelskans unit). En enhet kan ses både som 'en sak' eller 'en grupp som utgör en
sak' (Ma & Kessel, 2018). Till exempel kan både antalet ett och antalet tio ses som
en enhet. Det senare ses då som en enhet i form av ett tiotal bestående av tio ental. I
relation till begreppet platsvärde innebär detta till exempel att förstå platsvärdet för
siffran '3' i talet 136, som både 30 (enhet som 'en sak') och 3 tiotal (enhet som 'en grupp
som utgör en sak'). I artikeln benämns det förra som aspekten *PLV ental* (platsvärde
som ental, 30) och det senare som aspekten *PLV antal av position* (platsvärde som
antal av en specifik positions värde, 3 tiotal). Forskare (Chambris, 2018; Fuson, Smith
& Lo Cicero, 1997; Fuson m.fl., 1997; Thanheiser, 2009) argumenterar för att elever
behöver förstå platsvärde på båda sätten.

I numeriska representationer av tal har siffran '0' viktiga betydelser (Ma & Kes-
sel, 2018; Thanheiser & Melhuish, 2018). Dels uppehåller siffran '0' en position för att
kunna representera ett specifikt tal (Fuson, 1990), dels beskriver den det specifika
antalet noll av en position, till exempel noll tiotal i talet 202. I studien fokuseras på
den senare betydelsen och benämns i artikeln som aspekten *siffran '0' som antalet
noll av en position*. Aspekten ses även som en specifik variant av aspekten *PLV antal
av position* (se figur 1).

Decimalsprincipens aspekter

Ofta får elever endast möjlighet till en begränsad förståelse av platsvärde i form av
enbart positionsprincipen (Cawley, Parmar, Lucas-Fusco, Kilian, Foley, 2007). Fors-
kare (Cawley m.fl., 2007; Fuson, Smith & Lo Cicero, 1997; Fuson, 1990; Kamii, 1986;
Thanheiser, 2009) argumenterar för att elever även behöver förstå platsvärde utifrån
decimalprincipen. Även denna princip innefattar många aspekter, men i studien fo-
kuseras på aspekterna *decimalprincipen gäller oberoende av position, tio siffror ger
max siffran '9' i varje position och tio ger en av närmast högre position*, som illustreras
i figur 2.

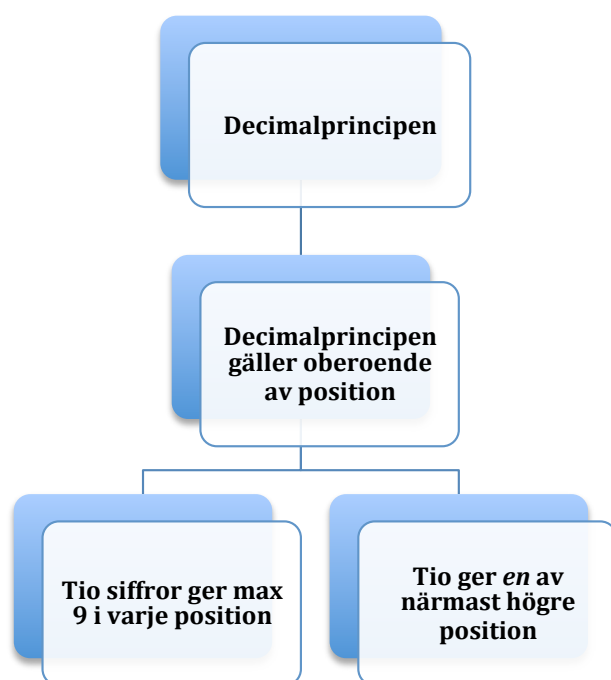
I decimalsystemet finns enbart tio siffror (0, 1, 2, ..., 9) vilket innebär att det inte är
möjligt att ange mer än '9' av en positions värde när tal representeras numeriskt (Fu-
son, 1990). I talet 492 går det till exempel inte att ange fler tiotal i tiotalens position. I
studien kallas detta för aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*.

Som en konsekvens av detta följer att, om det finns tio av en positions värde, be-
skrivs dessa istället som *en* av närmast högre positions värde (Fuson, 1990; Fuson
m.fl., 1997; Thanheiser, 2009), det vill säga positionen till vänster. I talet 120 finns till

Hansson

exempel tolv tiotal och tio av dem beskrivs som ett hundratal, vilket anges med siffran '1' i hundratalens position. I studien kallas detta för aspekten *tio ger en av närmast högre position*.

Även om aspekterna kan beskrivas separat på detta sätt, kan de ej separeras när tal representeras numeriskt. Att tio av en positions värde ger en av den närmast högre positionens värde, är en *konsekvens* av att det enbart går att representera upp till 9 i varje position. Med andra ord är aspekten *tio ger en av närmast högre position* en konsekvens av aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*.



Figur 2. Aspekter av decimalprincipen som fokuseras på i studien.

Decimalprincipen, i termer av dessa två aspekter gäller dessutom oavsett vilken av decimalsystemets positioner som innehåller tio till antalet (Fuson, 1990). Om det till exempel finns tio ental går det inte att representera dem i entalspositionen längre eftersom det endast går att representera upp till nio ental där och därmed måste dessa beskrivas som ett tiotal. På samma sätt gäller att om det finns tio tiotal går det inte att representera dem i tiotalpositionen längre eftersom det maximalt går att representera upp till 9 tiotal där och därmed måste dessa beskrivas som ett hundratal. Denna princip är alltså oberoende av position och kallas i studien för aspekten *decimalprincipen gäller oberoende av position*.

Variationsteori

I studien undersöks hur aspekter av innehållet kan varieras i undervisning för att elever ska utveckla förståelse av begreppet platsvärde. Variationsteorin (Marton, 2015) har använts dels som ramverk för planering och utvärdering av undervisning

när data genererades, dels som redskap för att analysera data.

I variationsteorin ses lärande som en förändring av sättet att erfara ett fenomen (Marton, 2015). En förändring i erfarenhet sker när den lärande urskiljer aspekter av fenomenet som hen inte tidigare urskilt, så kallade kritiska aspekter (Marton & Booth, 2000). Om till exempel platsvärde erfars som enbart de enskilda siffrornas värde, kan en kritisk aspekt vara att även kunna urskilja aspekten *decimalsystemets positioner*. För att en kritisk aspekt ska kunna urskiljas måste den lärande erfara en variation av aspekten i fråga (Marton, 2015) och undervisningens uppgift blir följaktligen att skapa sådana möjligheter att eleverna erfara dessa variationer.

För att ge den lärande möjlighet att urskilja en kritisk aspekt, behöver denna varieras mot en bakgrund av andra aspekter som är invarianta (Marton, 2015; Marton & Booth, 2000). Detta kallas för variationsmönster. När data från undervisningen i denna studie analyserades framkom till exempel ett variationsmönster där siffran '2' var invariant i alla positioner av talet 222. Läraren riktade elevernas uppmärksamhet mot att värdet av respektive tvåa varierar beroende av dess position i talet. Detta variationsmönster gör det möjligt att urskilja aspekten *decimalsystemets positioner*.

Metod

Forskningsansatsen är en form av utvecklingsforskning (Van den Akker, 1999), och har likheter med learning study (Pang & Marton, 2003). Som i de flesta genomförda learning studies har variationsteorin använts som ramverk för att planera och utvärdera undervisning och studien har genomförts av forskare och en grupp lärare tillsammans. En skillnad är emellertid att undervisningen i föreliggande studie har genomförts och reviderats i samma elevgrupp, medan det i learning studies brukar ske i olika elevgrupper.

Urval

Studien genomfördes i en kommunal F-4 skola, inom ramen för ett så kallat Ämnesdidaktiskt kollegium (ÄDK) (Mårtensson & Hansson, 2018). Lärargruppen valdes för att de tidigare har arbetat i ÄDK och därför har erfarenhet av att utveckla undervisning tillsammans. Data som används kommer från undervisning i en av lärarnas elevgrupper. Läraren, som hade 17 års lärarerfarenhet, anmälde sig frivilligt till att delta i studien. Hennes 20 elever som gick i en av grundskolans tidigare årskurser, valdes med anledning av intresset för hur platsvärde kan undervisas i dessa årskurser. De för studien fokuserade aspekterna (se figur 1 och 2) har dels valts för att de i tidigare forskning funnits vara centrala för att förstå platsvärde (till exempel Chambris, 2018; Fuson, 1990; Thanheiser, 2009), dels för att lärargruppen upplevde att eleverna hade behov av att lära dem.

Genomförande

Innan undervisningen påbörjades diskuterade lärargruppen vad platsvärde innebär och vad eleverna kunde ha för svårigheter. Därefter designades och genomfördes ett förtest utifrån studiens intervjustöd, underlag för exempel och frågor (se bilaga 1).

Bilaga 1

Uppgift 1

- a) Eleverna får jämföra två tal på olika lappar: 207 & 027
- b) Kommer inte eleverna med att de är större eller mindre kan vi säga att det är samma siffor i båda talen och då be dem jämföra talens storlek
- c) Vi frågar sedan vad nollorna betyder
- d) Vi frågar dem om man kan ta bort 0:orna i talen eller inte och vad det isåfall ger för nya tal.

Uppgift 2

- a) Vi läser uppgiften för eleverna: En bonde har många kor på sin bondgård. Varje kväll räknar bonden sina kor och skriver upp antalet på en tavla. Han brukade alltid få det till samma antal kor och så även denna kväll, så han skrev talet 87 (vi visar pappret med talet 87). En dag köpte bonden tre nya kor (vi visar lappen med de tre korna och pilen ner mot talet 87). Hur många kor blev det när han räknade dem efter han köpt de nya korna?
 - a. (Lös inte eleverna uppgiften alls kan vi ge dem svaret att det blir 90 och de får ändå försöka förklara utifrån nedanstående frågor)
- b) Förklara vad det är som gör att det blir just de siffrorna (vi kan peka på siffrorna en och en i det nya talet, så de tvingas motivera hur det blivit just 9 och 0 och varför siffrorna förändrades från 8 och 7)
- c) Förklara vad de olika siffrorna betyder i det nya talet

Fortsättning på uppgiften för att komma åt den upprepade principen:

En annan dag köpte bonden ytterligare 12 kor (vi visar lappen med de tolv korna och pilen ner mot talet 90 eller om de har ett annat tal lägger vi det över 90 så de tolv korna och pilen syns ner mot deras tal). Hur många kor blev det när han räknade dem efter han köpt de nya korna?

- e) Förklara vad det är som gör att det blir just de siffrorna i det nya talet
- f) Förklara vad de olika siffrorna betyder i det nya talet

Uppgift 3

- a) Sådär säger en kompis om talet 726. Vad stämmer och vad stämmer inte, samt hur tänker du?
Talet 726
 "Sjuan i talet är värd 700.
 Den största siffran ska alltid stå först, tror jag.
 2:an är mindre värd än 7:an.
 6:an är mindre värd än 2:an.
- b) Om du skulle resonera mer om talet 726, vad skulle du säga då?

Testet avsåg att pröva elevernas förståelse av positionsprincipens aspekter genom flera uppgifter. Uppgift 1c) prövade förståelsen av aspekten *siffran '0' som antalet noll av en position* och 1d) betydelsen av noll som platshållare. Uppgifterna 2c) och 2f) prövade förståelsen av alla de för studien fokuserade aspekterna av positionsprincipen. Med hjälp av påståendet "2:an är mindre värd än 7:an" i talet 726 i uppgift 3a) prövades specifikt förståelsen av aspekten *decimalsystemets positioner*. Elevernas förståelse av decimalprincipens aspekter som fokuseras i studien prövades i två uppgifter. I uppgift 2a) prövades förståelsen av aspekterna *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*, och *tio ger en av närmast högre position*. Uppgift 2e) prövade förståelsen av dessa aspekter

igen samt även förståelsen av aspekten *decimalprincipen gäller oberoende av position*. Uppgift 3b) prövade elevernas förståelse av platsvärde som helhet. I analysen av elevernas svar bedömde lärargruppen att de fokuserade aspekterna (se figur 1 och 2) var kritiska för elevgruppen att urskilja och blev därför utgångspunkter då de planerade undervisningen. Undervisningen planerades och utvärderades av lärargruppen med stöd av variationsteorin, där kommande veckas undervisning utformades utifrån vad eleverna hade lärt sig av föregående veckas undervisning. Efter undervisningen genomfördes även ett eftertest (samma som förtestet, utifrån intervjustödet i bilaga 1), för att få indikationer på vad eleverna hade lärt sig.

Data och analys

I studien undersöks både vilka möjligheter till lärande som skapades i undervisningen och vad eleverna hade lärt sig. Data från för- och eftertest samt videofilmer från undervisningen har analyserats. Testdata utgörs av filmade semistrukturerade intervjuer (Kvale & Brinkmann, 2014). Intervjuerna, som gjordes av mig, genomfördes enskilt med varje elev i ett avskilt rum och var i genomsnitt cirka 18 minuter. Utifrån intervjustödet (bilaga 1) försökte jag hjälpa eleverna att uttrycka sin förståelse av platsvärde, genom frågor och uppmuntrande gester utan att leda dem till specifika svar. Data från undervisningen består av filmer från 14 lektioner á 40 minuter.

I undervisningen växlade elevernas arbete mellan individuella eller gruppvisa uppgifter och lärarledda genomgångar i helklass. Då det i studien undersöks vad som gjordes möjligt för alla elever att lära, har analysen begränsats till data från de lärarledda genomgångarna av de i studien fokuserade aspekterna.

Analysarbetet har genomförts i tre steg. Först har elevernas uttryck för förståelse av aspekterna i för- och eftertest analyserats och jämförts, därefter vilka aspekter som gjorts möjliga att urskilja i undervisningen. I det tredje steget har det som eleverna har lärt sig jämförts med de aspekter som varit möjliga att urskilja i undervisningen.

Intervjuerna har transkriberats ordagrant. För att eleverna ska ha bedömts kunna uttrycka förståelse av respektive aspekt av positionsprincipen fick de inte uttrycka sig felaktigt i någon av uppgifterna. I uppgift 3a) skulle eleverna exempelvis motivera sitt ställningstagande till påståendet att 6:an i talet 726 är mindre värd än 2:an (se bilaga 1). Flera elever menade att det var felaktigt eftersom "sex är mer än två." Detta har tolkats som ett otillräckligt uttryck för aspekten *decimalsystemets positioner*, eftersom eleverna då inte har tagit hänsyn till positionernas värde. I uppgift 2c) skulle eleverna förklara innebörden av siffrorna i talet 87. Om eleven sa att siffrorna står för tiotal respektive ental, har detta tolkats som ett otillräckligt uttryck för aspekterna *PLV ental* respektive *PLV antal av position*, eftersom detta svar enbart uttrycker positionernas värden, men inte antalet av respektive position. Däremot har svaret tolkats som ett tillräckligt uttryck för aspekten *decimalsystemets positioner*. För förståelse av aspekten *PLV ental* behövde eleverna uttrycka att siffrorna står för åttio respektive sju och för aspekten *PLV antal av position* behövde de uttrycka åtta tiotal respektive sju ental. Elevernas förståelse av aspekten *siffran '0' som antalet noll av en position*, har tolkats och bedömts på samma sätt som för aspekten *PLV antal av position*.

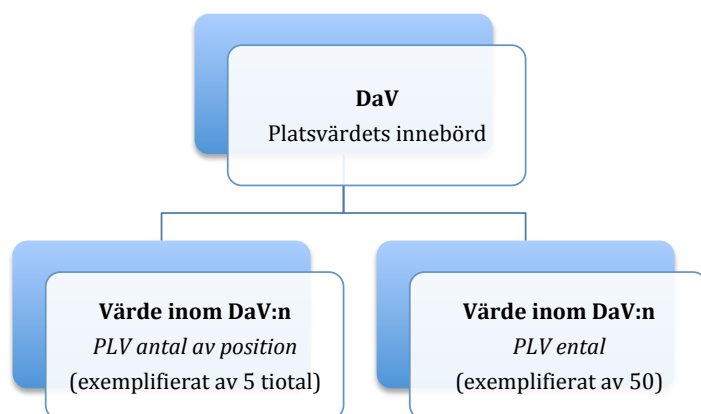
Hansson

I uppgift 2b), där decimalprincipens aspekter prövades, skulle eleverna förklara varför siffrorna i talet 87 förändrades till 90 när tre lades till 87. En elev sa till exempel ”för att jag räknade, jag tänkte att åttiosju och så en ko till och så åttioåtta och så åttionio och nittio”. Visserligen använde eleven sig av en talramsa i sin förklaring och visade en procedurrell kunskap, men eftersom det är den begreppsliga förståelsen av platsvärde som vi ville komma åt, har svaret inte tolkats som uttryck för förståelse av de fokuserade aspekterna. En elev sa att ”entalspositionen blev full, det blev en grupp på tio” ... ”då behövde vi växla över så det blev ett till” ... ”då blev det en till tiogrupp (pekar på nian i 90)”. Eftersom eleven uttryckte att det är på grund av att det var tio ental som gjorde att de växladades över till ett tiotal, har detta tolkats som uttryck för förståelse av aspekten *tio ger en av närmast högre position*. Emellertid har svaret inte tolkats som uttryck för förståelse av aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*, eftersom eleven inte har förklarat att detta sker för att det enbart finns tio siffror att tillgå och att det därför maximalt kan anges upp till nio i entalspositionen. Det har därav inte heller tolkats som ett uttryck för förståelse av decimalprincipen som helhet. För att ha tolkats som att kunna uttrycka förståelse av aspekten *decimalprincipen gäller oberoende av position*, som prövades i uppgift 2e), behövde eleverna ha uttryckt förståelse av aspekterna *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*. och *tio ger en av närmast högre position* i uppgift 2b). Därefter behövde de även kunna uttrycka dels att de tio tiotalen inte kunde representeras i tiotalpositionen därför att det max går att representera nio i tiotalpositionen, dels att de tio tiotalen ger ett hundratal.

När undervisningen har analyserats har den delats upp i olika moment. Startpunkt för ett moment har bestämts av när ett ”nytt” innehåll initierades i undervisningen och slutpunkt när undervisningen om det innehållet avslutades. Till exempel startade ett moment när läraren pekade på siffrorna 0-9 som fanns på tavlan och sa ”det här är ju dom siffrorna vi har” och så följde en diskussion om hur många siffror det finns i decimalsystemet. I undervisningen hänvisar läraren till decimalsystemet som tiobasystemet med benämningen 'tiobas'. Momentet avslutades när läraren sammanfattade diskussionen genom att säga ”i tiobasen har vi tio siffror”.

För att kunna analysera vilka aspekter som gjordes möjliga att urskilja i undervisningen har variationsteorin använts som analysverktyg. Utifrån teorins antagande om att den aspekt som varierar görs möjlig att urskilja när andra aspekter är invarianta, kan undervisning beskrivas i termer av vad som varit möjligt att lära (Al-Murani, Kilhamn, Morgan, Watson, 2018; Kullberg, Runesson Kempe & Marton, 2017). Följande exempel visar hur detta har tillämpats i analysen. Talet 156 fanns skrivet på tavlan och läraren frågade vad siffran '5' i talet betyder. En elev sa: ”den betyder femtio”, en annan ”fem tiotal.” Läraren skrev upp svaren som 50 respektive 5 tiotal på tavlan och konstaterade att båda svaren var korrekta. I analysen har fokus dels legat på vad som lyftes fram i undervisningen, dels vad som var invariant respektive varierade och därav vad som varit möjligt att urskilja. När läraren skrev upp elevernas svar på tavlan och sa att de var korrekta, lyftes det fram att platsvärdet kan beskrivas både som 50 och 5 tiotal. I detta fall var platsvärdet för siffran '5' i talet 156 invariant, eftersom enbart detta platsvärde fokuserades. Genom att eleverna beskrev platsvärdet både som

50 och 5 tiotal, varierade detta. Platsvärde beskrevs således på olika sätt och därmed även dess olika innebörd. Det variationsmönster som då skapades har tolkats så att, det öppnar upp 'platsvärdets innebörd' som en Dimension av Variation (DaV). *PLV antal av position* (exemplifierat av 5 tiotal) respektive *PLV ental* (exemplifierat av 50) utgör då olika värden inom dimensionen (se figur 3).



Figur 3. Exempel på DaV (Dimension av Variation) och värden inom DaV:n som framkom i analysen.

Enligt variationsteorin görs den DaV som öppnats upp i undervisningen möjlig att urskilja (Al-Murani m.fl., 2018; Marton, Runesson & Tsui, 2004). Således visar analysen av detta exempel att det gjordes möjligt att urskilja att platsvärde kan ha olika innebörd dels som *PLV antal av position*, dels som *PLV ental*.

Även om det inte finns ett kausalt samband mellan vad som varit möjligt att urskilja och vad som urskiljs (Kullberg, Runesson Kempe & Marton, 2017), är det troligt att en aspekt urskiljs om den görs möjlig att urskilja (Marton, 2015). Utifrån detta antagande analyserades hur elevresultaten, i termer av de aspekter som analysen visade att eleverna gav uttryck för att de förstod, speglade vilka aspekter som gjorts möjliga att urskilja i undervisningen.

Etik

I enlighet med vetenskapsrådets riktlinjer för god forskningssed (Vetenskapsrådet, 2017) informerades läraren och elevernas målsmän om studien via brev. Alla elevernas målsmän gav tillstånd till elevernas deltagande i studien och att videoinspelningarna fick användas i forskningssyfte. I artikeln har alla informanter anonymiserats och getts fiktiva namn.

Resultat

Avsnittet inleds med resultat från analysen av för- och eftertest (tabell 1). Därefter ges en detaljerad beskrivning av hur respektive aspekt (se figur 1 och 2) behandlats och vilka aspekter som gjorts möjliga att urskilja i undervisningen. Sedan beskrivs hur de aspekter som gjorts möjliga att urskilja i undervisningen (tabell 2) reflekteras i elevresultaten. Slutligen sammanfattas resultatet.

Hansson

Elevresultat i för- och eftertest

Analysen av elevresultat mellan för- och eftertest visar att det finns en tydlig skillnad i ökning av lösningsfrekvens avseende vissa aspekter.

Av tabell 1 framgår att ökningen mellan för- och eftertest är betydande när det gäller vissa aspekter, men att det inte fanns någon ökning alls när det gäller andra aspekter. När det gäller siffrornas värde i flersiffriga tal uttryckte flertalet elever den enskilda siffrans värde istället för platsvärdet, fyra elever uttryckte förståelse av aspekten *decimalsystemets positioner* och enbart två elever kunde uttrycka platsvärde på något sätt i förtestet. I eftertestet däremot uttryckte 16 fler elever förståelse av aspekten *decimalsystemets positioner*, 15 fler kunde uttrycka förståelse av aspekten *PLV antal av position* och 14 fler kunde uttrycka förståelse av aspekten *PLV ental*. Även när det gäller nollans betydelse fanns en förändring. I förtestet uttryckte 14 elever att "nollan betyder ingenting" och inte någon elev uttryckte förståelse av aspekten *siffran '0' som antalet noll av en position*. I eftertestet däremot uttryckte 16 fler elever förståelse av denna aspekt. På samma sätt skedde en förändring det gäller aspekten *tio ger en av närmast högre position* och hur eleverna förklarade varför siffrorna i talet 87 förändrades till 90 när 3 lades till 87. I förtestet förklarade de flesta elever detta enbart med att det har lagts till 3 fler till 87 och därför räknar man upp till 90 medan ingen av eleverna uttryckte förståelse av aspekten *tio ger en av närmast högre position*. I eftertestet däremot uttryckte 12 av eleverna att när 3 lades till 87 blev det tio ental, vilket innebär att de växlas till ett tiotal och därmed ökas tiotalen från 8 till 9. Detta har tolkats som att dessa elever urskilt aspekten *tio ger en av närmast högre position* och att de har förstått relationen mellan entalen och tiotalen i numeriska representationer av tal.

Aspekter (uppgifter som prövade respektive aspekt i testen)	Förtest N=20	Eftertest N=20	Ökning av lösningsfrekvens
Decimalsystemets positioner (uppgift 2c, 2f, 3a, 3b)	4	20	16
PLV ental (uppgift 2c, 2f, 3b)	2	16	14
PLV antal av position (uppgift 2c, 2f, 3b)	0	15	15
0 som antalet noll av en position (uppgift 1c, 2c, 2f)	0	16	16
Tio ger en av närmast högre position (uppgift 2a, 2e)	0	12	12
Tio siffror ger max 9 i varje position (uppgift 2a, 2e)	0	0	0
Decimalprincipen gäller oberoende av position (i termer av aspekterna tio siffror ger max 9 i varje position och tio ger en av närmast högre position) (uppgift 2a, 2e)	0	0	0

Tabell 1. Antal elever som tolkats uttrycka förståelse av respektive aspekter i för- och eftertest.

Emellertid har inte någon elev, varken i för- eller eftertest, förklarat *varför* tio av en position ger *en* av närmast högre position. Därför har ingen elev tolkats kunna uttrycka förståelse av aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*. och inte heller av aspekten *decimalprincipen gäller oberoende av position* (tabell 1).

Aspekter som gjordes möjliga att urskilja

Analysen visar att aspekterna *decimalsystemets positioner*, *PLV ental*, *PLV antal av position*, *siffran '0' som antalet noll av en position* och *tio ger en av närmast högre position* gjordes möjliga att urskilja i undervisningen. Nedan beskrivs de variationsmönster som skapades och gjorde det möjligt att urskilja respektive av dessa aspekter.

Aspekten decimalsystemets positioner

I två moment var det möjligt att urskilja aspekten *decimalsystemets positioner*. I ett av momenten fanns talet 222 på tavlan. Eleverna diskuterade först i par om siffrorna i talet var lika mycket värda. Läraren frågade sedan vad skillnaden mellan siffrorna var och en elev svarade:

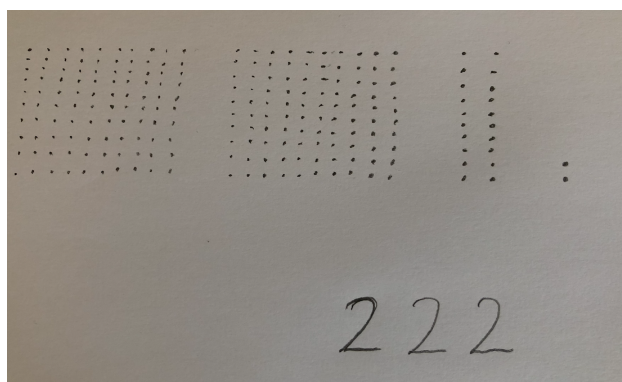
Excerpt 1

Emil: Vi tänkte att det här är ett hundratal (pekar på tvåan längst till vänster i representationen 222) och det här är ett tiotal (pekar på tvåan i mitten i representationen 222) och det är ett ental (pekar på tvåan längst till höger i representationen 222).

Av excerpt 1 framgår att Emil uttryckte att siffran '2' representerar de olika värdena hundratal, tiotal respektive ental, beroende av position siffran har i 222.

Sedan visades talet 222 med grupperade prickar, ovanför den numeriska representationen 222 (se figur 4) och läraren sa:

L: Ni sa så att den är värd två hundratal (flyttar tvåan längst till vänster till under de tvåhundra prickarna) ... sen sa ni att vi har två tiotal (flyttar den mittersta tvåan till under de tjugo prickarna) ... och så har vi två stycken ental (flyttar tvåan längst till höger till under de två prickarna)



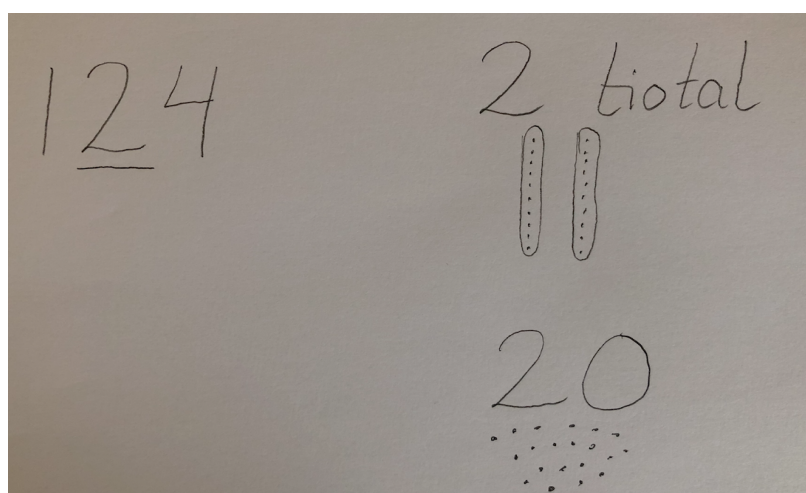
Figur 4. På tavlan fanns 222 prickar grupperade som hundratal, tiotal respektive ental och den numeriska representationen 222

Hansson

Läraren förstärkte på detta sätt Emils förklaring av vad respektive 'tvåa' representerar. Med hjälp av de grupperade prickarna visade hon att 'tvåan' längst till vänster i 222 representerar två hundratal, 'tvåan' i mitten två tiotal och 'tvåan' längst till höger två ental. Här var siffran 'två' invariant i alla positioner (222) och positionernas värden (hundratal, tiotal, ental) varierade i relation till den position som respektive 'tvåa' stod i. Variationsmönstret öppnade upp aspekten *decimalsystemets positioner* som en Dimension av Variation (DaV), vilket har tolkats som att det gjordes möjligt att urskilja denna aspekt (se tabell 2).

Aspekterna PLV ental och PLV antal av position

Det fanns flera moment där det gjordes möjligt att urskilja aspekterna *PLV ental* och *PLV antal av position*. Dock var det enbart i två av dessa som det fanns möjlighet att urskilja aspekterna utifrån begreppet enhet. En uppgift med talet 124 visade exempel på dessa (se figur 5).



Figur 5. På tavlan fanns talet 124 och två olika sätt att beskriva platsvärdet för siffran '2' i talet, 2 tiotal som två tiogrupperade prickar respektive 20 som tjugo enskilda prickar

I momentet fick eleverna först tänka själva och sedan parvis diskutera skillnaden mellan att beskriva tvåans värde i talet 124, som 2 tiotal respektive 20. Några elever presenterade sina tankar och läraren och eleverna drog sedan en slutsats med hjälp av vad som fanns på tavlan (figur 5) på följande vis:

Excerpt 2

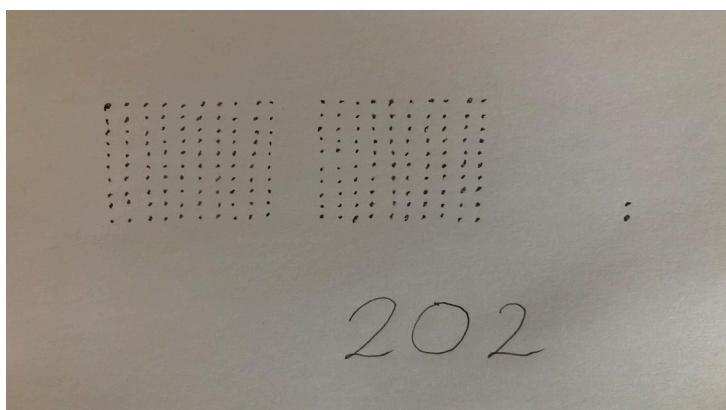
1. Elsa: Då är det typ samma sak att det är två tiotal eller tjugo.
2. L: Ja det är samma sak, skillnaden är om jag har två tiotal, Elsa. Då har jag satt dom i grupper om tio (pekar på de två grupperna med tio prickar i varje under "2 tiotal").
3. Elsa: Men där nere är det huller om buller.

4. L: Här är det huller om buller (pekar på de enskilda prickarna under "20" som ej var grupperade).

Av excerpt 2 framgår att Elsa drog slutsatsen att 2 tiotal och 20 var två olika sätt att beskriva tvåans värde i talet 124 (rad 1). Läraren lyfte därefter fram skillnaden mellan de två sätten att beskriva värdet: å ena sidan som 2 tiotal, där två grupper med tio ~~10~~ prickar i varje grupp tillsammans beskriver tvåans värde (rad 2), och å andra sidan som 20, där de enskilda prickarna tillsammans beskriver tvåans värde (rad 4). Platsvärdet var invariant (värdet för siffran '2' i talet 124) medan sätten att beskriva platsvärdet, varierade (2 tiotal respektive 20). Dels beskrevs platsvärdet som *PLV ental* utifrån begreppet enhet som 'en sak' (20 stycken), dels som *PLV antal av position* utifrån begreppet enhet som 'en grupp enheter som en sak' (2 tiotal). Genom variationsmönstret öppnades 'platsvärdets innebörd' upp som en DaV. Eftersom aspekterna *PLV ental* och *PLV antal av position* var värden i DaV:n, har det tolkats som att det gjordes möjlighet att urskilja dessa båda aspekter (se tabell 2).

Aspekten siffran '0' som antalet noll av en position

I två andra moment var det möjligt att urskilja aspekten *siffran '0' som antalet noll av en position*. Ett moment med talet 202 illustrerar detta (se figur 6).



Figur 6. På tavlan fanns 202 prickar grupperade som hundratal respektive ental och den numeriska representationen 202.

På tavlan representerades talet 202 både numeriskt och av grupperade prickar (se figur 6). Läraren tog bort nollan från 202 och flyttade ihop de kvarvarande siffrorna så att det istället stod 22 under prickarna och sa:

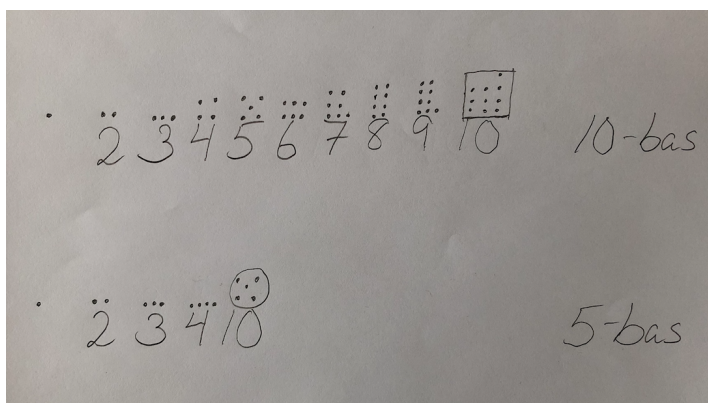
- L: tjugotvå det stämmer inte överens med detta (pekar på de tvåhundra två prickarna) det är inte det antalet som är här ... ofta säger ni såhär nollan det betyder ingenting, men det gör den visst det ser vi ju ... då får vi ett annat tal så det kan inte vara så att nollan inte betyder någonting den betyder ju någonting ... den ger oss information att vi har noll tiotal den bär på information den betyder någonting (skriver 0 tiotal under nollan i 202).

Hansson

Läraren lyfte fram att siffran '0' behövs för att representera talet 202 korrekt ("tjugotvå det stämmer inte överens med detta [pekar på de tvåhundra två prickarna]). Detta jämfördes med elevernas uppfattning av nollan som "ingenting" och att talet utifrån den isåfall skulle skrivas som 22, vilket inte skulle vara korrekt ("ofta säger ni så här nollan det betyder ingenting, men det gör den visst det ser vi ju ... då får vi ett annat tal så det kan inte vara så att nollan inte betyder någonting"). Läraren lyfte sedan fram att nollan i 202, beskriver antalet noll tiotal ("den ger oss information att vi har noll tiotal"). Talet 202 var invariant (i form av de grupperade prickarna) medan nollans betydelse varierade på tre sätt. Dels visades att nollan är nödvändig för att kunna beskriva tal korrekt, dels att det är inkorrekt att tänka att nollan inte betyder någonting samt att siffran '0' beskriver antalet noll av en position. Genom variationsmönstret öppnades 'nollans betydelse' upp som en DaV. Eftersom aspekten *siffran '0' som antalet noll av en position* var ett av värdena i DaV:n, har det tolkats som att undervisningen gjorde det möjligt att urskilja denna aspekt (se tabell 2).

Aspekten tio ger *en* av närmast högre position

Det fanns två moment då undervisningen gjorde det möjligt att urskilja aspekten *tio ger en av närmast högre position*. I det ena jämfördes antalet som grupperas som *en* i närmast högre position i olika bassystem (se figur 7).



Figur 7. På tavlan fanns tio inringade prickar och under dem siffrorna '1' och '0' som var relaterade till tiobassystemet respektive fem inringade prickar och under dem siffrorna '1' och '0' som var relaterade till fembassystemet.

I momentet diskuterade eleverna och läraren att det är antalet tio som grupperas och ger *en* av högre position i tiobassystemet. Sedan lyfte läraren fram att antalet som grupperas och ger *en* av högre position skiljer sig mellan fembas- och tiobassystemet, genom att säga:

- L: Här har jag en grupp på tio, fullt men jag har noll ental (pekar på de inringade tio prickarna och representationen 10 på 10-bas raden). I fembasen (pekar på raden för 5-bas) är det fullt så fort vi har en grupp på fem (ringar in de fem prickarna). Så jag har en grupp som består av fem för det är fullt när det är fem (sätter en etta och nolla under de fem prickarna i raden för 5-bas).

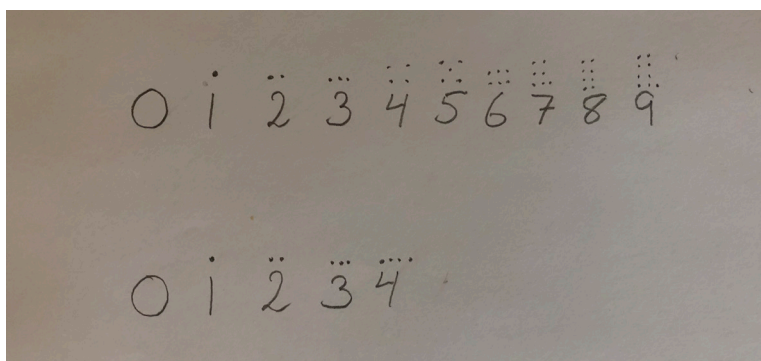
Genom att läraren pekade på antalet prickar som var inringade i relation till respektive bas och att dessa beskrevs som '10', lyfte hon fram att antalet tio ger representationen 10 i tiobassystemet, respektive att antalet fem också ger representationen 10 i fembassystemet. Den numeriska representationen av grupperingarna var invariant i form av siffrorna '1' och '0' (10), medan antalet (tio respektive fem) som gav en av närmast högre position varierade. Detta variationsmönster öppnade upp 'beroende av bassystem ger olika antal en av närmast högre position', som en DaV. Eftersom aspekten *tio ger en av närmast högre position* var ett av två värden i DaV:n, har det tolkats som att aspekten gjordes möjlig att urskilja (se tabell 2).

Aspekter som inte gjordes möjliga att urskilja

Analysen visar att, när aspekterna *tio siffror ger max siffran '9' i varje position.* och *decimalprincipen gäller oberoende av position* avsågs att behandlas, var variationsmönstret som skapades sådant att det var andra aspekter än de avsedda som gjordes möjliga att urskilja. Nedan beskrivs de variationsmönster som skapades relaterat till dessa två aspekter och vad som gjordes möjligt att urskilja.

Aspekten tio siffror ger max siffran '9' i varje position.

Trots att läraren avsåg att göra aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position.* möjlig att urskilja, visade analysen att detta inte framkom i undervisningen. Istället gjordes det möjligt att urskilja att 'tiobasen har tio siffror'.



Figur 8. På tavlan fanns tio siffror i den övre raden och fem siffror i den undre

I momentet så läraren att den övre raden visar siffrorna som finns i tiobassystemet och att den undre visar siffrorna som finns i fembassystemet (figur 8). Hon frågade "vad är det som skiljer tiobasen från fembasen?" Eleverna svarade:

Excerpt 3:

1. Tilda: fembasen är fem mindre.
2. L: Fembasen är fem mindre, vaddå?
3. Tilda: Än tiobasen.

Hansson

4. L: Fem mindre vaddå?

5. Erik: Siffror.

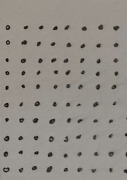
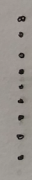
6. L: Siffror. Fembasen har fem siffror, tiobasen har tio siffror.

Som framgår av excerpt 3 beskrev eleverna skillnaden mellan tiobassystemet och fembassystemet, som att det är fem färre siffror i fembassystemet (rad 1 och 5). Läraren förklarade att "fembasen har fem siffror, tiobasen har tio siffror" (rad 6). Det som var invariant var att talen representerades av siffror, medan antalet siffror varierade beroende av basystem: tio siffror i tiobassystemet (0,1...9) respektive fem (0,1...4) siffror i fembassystemet. Genom variationsmönstret öppnades 'beroende av bas finns ett visst antal siffror' upp som en DaV. 'Tiobasen har tio siffror' respektive 'fembasen har fem siffror' var värden i DaV:n, vilket har tolkats varit möjligt att urskilja. Däremot synliggjorde inte variationsmönstret att de tio siffrorna i tiobassystemet enbart ger möjlighet att ange upp till nio i varje position. Därav har det tolkats som att det inte gjordes möjligt att urskilja den aspekt som avsågs, *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*. (se tabell 2).

Aspekten decimalprincipen gäller oberoende av position

När *decimalprincipen gäller oberoende av position* behandlades visade analysen att principen enbart synliggjordes utifrån aspekten *tio ger en av närmast högre position*, men inte utifrån aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*.

I ett moment fanns först nio prickar i entalskolumnen och nio tiogrupper med prickar i tiotalskolumnen, samt siffran '9' skrivet under respektive kolumn (se figur 9).

usental	Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental
				
			9	9

Figur 9. På tavlan fanns nio prickar i entalskolumnen respektive nio prickar i tiotalskolumnen, samt siffran '9' under respektive kolumn.

Läraren lade sedan till ytterligare en prick i entalskolumnen, så att det nu var tio prickar i denna kolumn. Eleverna fick först parvis diskutera vad som händer när det är tio i entalskolumnen och därefter förklara sina tankar. Sedan flyttade läraren över de tio prickarna som en tiogrupp till tiotalskolumnen och fortsatte:

Excerpt 5

1. L: Den gruppen blev full. Det blev tio stycken (pekar på entalskolumnen). Då flyttar den gruppen genast hit (pekar på tiotalskolumnen och de tio prickarna som flyttats över dit) och då har jag tio grupper på tio stycken och vad händer då, Siv?
2. Siv: Då växlar det och blir hundra.
3. L: Då har jag ett helt hundratal (flyttar de tio grupperna med tio prickar i varje över till hundratalskolumnen). Så jag får ett helt hundratal (skriver en etta under hundratalskolumnen) inga tiotal (skriver en nolla under tiotalskolumnen) och inga ental (skriver en nolla under entalskolumnen). Det blev fullt (pekar på entalskolumnen). Jag växlade upp till tiotalet (pekar på tiotalskolumnen), det blev tio stycken tiotal gruppen var full och hundratalet kommer, etthundra (pekar på hundratalskolumnen).

Som framgår av excerpt 5 lyfte läraren först fram att tio ental bildar en tiogrupp och att entalen växlas till ett tiotal (rad 1) och att det då fanns tio tiotal i tiotalskolumnen (rad 1). Siv förklarade att dessa då växlas och blir hundra (rad 2). Läraren förtydligade Sivs svar som ett hundratal (rad 3). I momentet upprepades aspekten *tio ger en av närmast högre position*, genom att det först var tio ental som gav *en* av närmast högre position och sedan tio tiotal som gav *en* av närmast högre position. Därav har denna aspekt tolkats som invariant i momentet. Det som har tolkats variera är de positioner som innehöll tio och gav *en* av närmast högre position. I det första fallet var det entalen som var tio och i det andra fallet var det tiotalen som var tio. Genom variationsmönstret öppnades 'tio ger *en* i närmast högre position gäller oberoende av position' upp. Däremot synliggjorde inte variationsmönstret att även aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*, gäller oberoende av position. Eftersom decimalprincipen i studien har tolkats som att innehålla både aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position*, och *tio ger en i närmast högre position* har det tolkats som att undervisningen inte gav möjlighet att urskilja aspekten *decimalprincipen gäller oberoende av position*, som helhet (se tabell 2).

Relationen mellan elevernas lärande och undervisningen

För att besvara frågan vilka variationsmönster som har gett möjlighet och kan ha bidragit till elevernas lärande av platsvärde, har skillnaden i elevresultat på för- och eftertest jämförts med vilka aspekter som varit möjliga att urskilja i undervisningen. Tabell 2 sammanfattar vilka exempel som användes, vilka aspekter som gjordes möjliga att urskilja och förändringen i elevresultatet i relation till respektive aspekt.

Hansson

Tabell 2. Mönster av variation, aspekter möjliga att urskilja, samt ökning i lösningsfrekvens.

Aspekter av platsvärde	Exempel som användes	Invariant i momentet	Aspekter möjliga att urskilja som DaV och värden i DaV:n (exempel av värden)	Ökning av lösningsfrekvens mellan för- och eftertest (jämför tabell 1)
Aspekter som gjordes möjliga att urskilja				
1. Decimalsystemets positioner	Talet tvåhundra-tjugotvå representerat av grupperade prickar och 222. Begreppen: hundratal, tiotal, ental	Siffran '2' i alla positioner, 222	DaV: Decimalsystemets positioner Värden: - Hundratal (2:an längst till vänster) - Tiototal (2:an i mitten) - Ental (2:an längst till höger)	16
2. PLV antal av position och PLV ental	124 - 2 tiotal/två tiogrupper med prickar - 20/tjugo enskilda prickar	Platsvärdet för 2:an i talet 124	DaV: Platsvärdets innebörd Värden: - Som PLV antal av position (2 tiotal/två tiogrupper med prickar) - Som PLV ental (20/tjugo enskilda prickar)	15 (PLV antal av position) 14 (PLV ental)
3. '0' som antalet noll av en position	Talet tvåhundra-två representerat av grupperade prickar. Sifferrepresentati onerna: 202, 22, 0 tiotal	Talet tvåhundra två represente rat av grupperad e prickar	DaV: Nollans betydelse Värden: - Nollans betydelse för att beskriva tal korrekt (202) - Nollans betydelse som "ingenting" är inkorrekt (22) - 0 som antalet noll av en position (0 tiotal)	16
4. Tio ger <i>en</i> av närmast högre position	Tiobas ger att tio prickar representeras som 10 respektive fembas ger att fem prickar representeras som 10	Representa tionen 10 ("ett" "noll")	DaV: Beroende av basystem ger olika antal <i>en</i> av närmast högre position Värden: - Antalet tio ger <i>en</i> av närmaste högre position i tiobas (tiobas som gör att tio prickar representeras som 10) - Antalet fem ger <i>en</i> av närmast högre position i fembas (fembas som gör att fem prickar representeras som 10)	12
Aspekter som inte gjordes möjliga att urskilja				
5. Tio siffror ger max 9 i varje position	Tiobasen har siffrorna 0, 1,...9 respektive fembasen har siffrorna 0, 1,...4	Den numeriska representa tionen av talen	DaV: Beroende av bas finns ett visst antal siffror Värden: - Tiobasen har tio siffror (tiobasen har siffrorna 0, 1, ...9) - Fembasen har fem siffror (fembasen har siffrorna 0, 1,...4)	0
6. Decimalprincipen gäller oberoende av position (i termer av aspekterna tio siffror ger max 9 i varje position och tio ger <i>en</i> av närmast högre position)	Tio prickar i entalskolumnen flyttas som en tiogrupp till tiotalskolumnen, tio tiogrupper i tiotalskolumnen flyttas som en hundragrupp till hundratalskolum nen	Antalet tio av en position ger <i>en</i> i närmast högre position	DaV: Tio ger <i>en</i> i närmast högre position, gäller oberoende av position Värden: - Tio ental ger ett tiotal (tio prickar i entalskolumnen flyttas som en tiogrupp till tiotalskolumnen) - Tio tiotal ger ett hundratal (tio tiogrupper i tiotalskolumnen flyttas som en hundragrupp till hundratalskolum nen)	0

Av tabell 2 framgår att testresultatet speglar undervisningen. Det var fler elever som utvecklade förståelse av de aspekter som analysen visade var möjliga att urskilja i undervisningen (tabell 2, aspekterna 1-4) jämfört med de aspekter som avsågs behand-

las, men där variationsmönstret var sådant att det var andra aspekter som gjordes möjliga att urskilja istället (tabell 2, aspekterna 5 och 6). I genomsnitt var det cirka 15 elever som utvecklade förståelse av de aspekter som gjordes möjliga att urskilja, medan inte någon elev utvecklade förståelse av de aspekter som avsågs behandlas, men där andra aspekter gjordes möjliga att urskilja. De variationsmönster som skapades relaterat till de aspekter som analysen visade gjordes möjliga att urskilja, förefaller att ha varit mer gynnsamma för elevernas lärande än de variationsmönster som skapades relaterat till de aspekter som avsågs behandlas, men där andra aspekter istället gjordes möjliga att urskilja.

Resultatsammanfattning

Resultatet har visat hur olika mönster av variation och invarians skapar olika möjligheter för elever i årskurs 2 att förstå platsvärde. Vidare visar resultatet att de exempel som användes i undervisningen förefaller att vara kritiska för att skapa sådana variationsmönster som är gynnsamma för elevernas lärande av de aspekter som avses. Med exempel avses här ett specifikt fall av något mer generellt (Mason, 2006; Mason & Pimm, 1984; Rowland, 2008; Watson & Mason, 2005; Zodiak & Zaslavsky, 2008). Exempelvis, hundratalpositionen är ett exempel (ett specifikt fall) på decimalsystemets positioner (det generella). Tiotalspositionen är ett annat specifikt fall, det vill säga ett annat exempel på detta.

Då aspekterna *decimalsystemets positioner*, *PLV ental*, *PLV antal av position*, *siffran 'o' som antalet noll av en position* och *tio ger en av närmast högre position* behandlades visar resultatet att exemplen som användes skapade variationsmönster som var gynnsamma för elevernas lärande. Genom att använda 222 (se tabell 2) som ett exempel på ett tresiffrigt tal med samma siffror gjordes det möjligt för eleverna att få syn på aspekten *decimalsystemets positioner*. I exemplet var siffrorna i talet samma (2), medan innebörden av respektive siffra skilde sig åt beroende på den position siffran stod i. Genom detta mönster av variation/invarians gjordes aspekten möjlig att urskilja.

När läraren visade 2 tiotal/två tiogrupperade prickar som ett exempel på aspekten *PLV antal av position* respektive 20/tjugo enskilda prickar som ett exempel på aspekten *PLV ental* (se tabell 2), gavs eleverna möjlighet att få syn på skillnaden mellan aspekterna. Dessa exempel beskrev samma platsvärde, för siffran '2' i talet 124, medan det som skilde dem åt var hur platsvärdet beskrevs, och därmed dess olika innebörd. Eftersom exemplen jämfördes, varierade båda aspekterna samtidigt och gjordes därmed möjliga att urskilja samtidigt.

Genom de fyra exemplen tvåhundra två grupperade prickar, 202, 22 och 0 tiotal (se tabell 2) gavs eleverna möjlighet att få syn på aspekten *siffran 'o' som antalet noll av en position*. Tvåhundra två grupperade prickar och 202 är exempel på korrekt representation av talet tvåhundra två. När nollan togs bort från 202 fanns 22 kvar. Detta är ett exempel på att representera talet tvåhundra två inkorrekt och kunde knytas till en vanlig elevuppfattning ("nollan betyder ingenting"). 0 tiotal för siffran 'o' i talet 202 användes som ett exempel på att beskriva platsvärde som noll av en positions värde.

Hansson

I momentet fokuserades samma tal (exemplifierat av de tvåhundra två grupperade prickarna). Det som skilde exemplen 202, 22 och 0 tiotal åt var innebörden av nollans betydelse. Därigenom gjordes det möjligt att urskilja både aspekten *siffran '0' som antalet noll av en position* och 'nollans betydelse'.

När aspekten *tio ger en av närmast högre position* behandlades, användes talet fem i fembassystemet respektive talet tio i tiobassystemet som exempel. Läraren visade först att tio prickar representeras av siffrorna 10 i basen tio. Därefter visades att fem prickar också representeras av siffrorna 10 i fembassystemet (se tabell 2). Dessa två exempel visade på att ett specifikt antal beroende av talbasen (tio respektive fem) ger *en* av närmast högre position. Variationsmönstret som skapades med hjälp av exemplen var att antalet prickar var olika men detta representerades numeriskt på samma sätt; som 10 i respektive bas. Genom denna skillnad gavs eleverna möjlighet att urskilja aspekten *tio ger en av närmast högre position*.

När aspekterna *tio siffror ger max siffran '9' i varje position.* och *decimalprincipen gäller oberoende av position* behandlades visar resultatet att exemplen skapade variationsmönster som troligen var otillräckliga för elevernas lärande. När aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position.* avsågs att behandlas användes de båda exemplen tiobassystemet (som har siffrorna 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) respektive fembassystemet (som har siffrorna 0, 1, 2, 3, 4) (se tabell 2). Dessa är exempel på att varje bassystem har ett visst antal siffror varmed talen kan skrivas. I exemplen var den numeriska representationsformen densamma, men det som skilde exemplen åt var antalet siffror som finns tillgängliga i respektive bas. Vad som framkom då var, att 'beroende av bas finns ett visst antal siffror', istället för aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position.*, vilket egentligen var avsikten.

I ett moment användes de båda exemplen tio prickar i entalskolumnen flyttas som en tiogrupp till tiotalskolumnen å ena sidan och tio tiogrupper i tiotalskolumnen flyttas som en hundragrupp till hundratalskolumnen å andra sidan (se tabell 2). Dessa exempel visar på att positioner som innehar tio ger *en* av närmast högre position. Genom exemplen gavs eleverna möjlighet att få syn på en annan aspekt än *decimalprincipen gäller oberoende av position*, vilket läraren ville. Gemensamt i båda exemplen var att tio av en position ger *en* av närmast högre position och det som skilde exemplen åt var vilka positioner som var tio och gav *en* av närmast högre position. I det ena fallet var det entalen som var tio och i det andra fallet var det tiotalen som var tio. Det som gjordes möjligt att lära var då att 'tio ger *en* i närmast högre position gäller oberoende av position'. Visserligen innehåller decimalprincipen denna aspekt, men även aspekten *tio siffror ger max siffran '9' i varje position.* Den senare var inte möjlig att lära genom exemplen och därav inte heller aspekten *decimalprincipen gäller oberoende av position*, som helhet.

Diskussion

Forskare har funnit att, vissa aspekter av platsvärde kan vara svåra för elever att förstå (till exempel Cawley m.fl., 2007; Fuson, 1990; Gallardo & Hernandez, 2006; Herzog, Ehlert & Fritz, 2017; Tempier, 2016; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), vilket

även denna studie har visat. En del av dessa svårigheter kan överkommas genom att använda olika representationsformer i undervisningen (Fuson & Briars, 1990; Fuson, Smith & Lo Cicero, 1997; Hiebert & Wearne, 1992), men det räcker emellertid inte alltid för att eleverna ska utveckla djupare förståelse av platsvärde (Bednarz & Janvier, 1982; Thomas, 2004). Det finns ingenting i denna studie som motsäger betydelsen av att använda olika representationsformer i undervisning av platsvärde, men studien visar framför allt hur aspekter som eleverna behöver lära för att förstå platsvärde kan göras möjliga att lära då olika mönster av variation skapas i undervisningen. Härvidlag pekar resultatet mot att de exempel som används är betydelsefulla för att skapa mönster av variation och invarians som är gynnsamma för elevernas lärande. Resultatet visar att de exempel som användes i relation till några av platsvärdets aspekter skapade variationsmönster som var gynnsamma för elevernas lärande, medan de exempel som användes i relation till andra aspekter var otillräckliga. Resultatet pekar därmed på att valet av exempel bör ske med omsorg, så att de har potential att skapa variationsmönster i relation till de aspekter av platsvärde som ska läras.

Resultatet kan även ge ett bidrag till hur andra talsystem kan användas för att undervisa om decimalsystemet. För att eleverna skulle lära sig att det enbart får plats 9 i varje position och att tio av en position ger *en* av närmast högre position jämfördes decimalsystemet med fembassystemet. Detta har likheter med Thanheiser och Melhuishs (2018) studie som visade att detta var framgångsrikt för att eleverna skulle lära sig platsvärde. Även Vygotsky (1934/2010) och Marton (2015) argumenterar för att behandla andra talsystem i undervisningen för att elever ska förstå principer av decimalsystemet. Emellertid visar resultatet i föreliggande studie att det inte är oproblemiskt att använda andra talsystem för att elever ska lära sig aspekter av decimalsystemet. När läraren ville att eleverna skulle lära att det enbart får plats 9 i varje position, skapades ett variationsmönster där en annan aspekt gjordes möjlig att lära. Avseende att tio av en position ger *en* av närmast högre position skapades visserligen ett variationsmönster som gjorde det möjligt att urskilja aspekten, men enbart drygt hälften av eleverna kunde uttrycka förståelse av aspekten i eftertestet. Att använda andra talsystem för att undervisa om platsvärde i decimalsystemet är troligen en god idé. Resultatet indikerar emellertid att aspekter av decimalsystemet inte synliggörs per automatik bara för att andra talsystem används. För att en aspekt ska synliggöras krävs att talsystemen tillsammans skapar ett *kraftfullt* variationsmönster relaterat till den aspekt som ska läras.

Studien bidrar med detaljerade beskrivningar av undervisningsmoment inklusive de exempel som användes och som skapade variationsmönster som var mer eller mindre gynnsamma för elevernas lärande. Dessa beskrivningar kan fungera som utgångspunkter när lärare planerar och undervisar om platsvärde. Till exempel kan undervisning planeras och genomföras utifrån de exempel som studien har visat vara gynnsamma för elevernas lärande av aspekterna platsvärde som ental och platsvärde som antal av position. Emellertid bör lärare dels ta hänsyn till sin egen elevgrupps behov av lärande och skapa variationsmönster utifrån det, dels bör mönstren prövas och preciseras i lärares egen undervisningspraktik. Beskrivningarna kan även

Hansson

bidra med en begreppsapparat för lärare att använda när de tänker och diskuterar med andra lärare om undervisning av platsvärde. Till exempel kan de använda sig av begreppen variation och invarians på liknande sätt som i studien för att planera och kritiskt granska planeringar samt utvärdera undervisning utifrån vilka aspekter som varit möjliga att lära.

Genom att använda variationsteorin för att analysera data har det varit möjligt att fokusera på hur innehållet i undervisningen behandlas och specifikt att studera hur platsvärde kan undervisas om utifrån hur aspekter av innehållet varierar. Emellertid bör uppmärksammas att variationsteorin ger en begränsad bild av den komplexa praktik som undervisning innebär och vad som har betydelse för elevernas möjlighet att lära. Men då variationsteorin beskriver undervisning och lärande i samma temer – urskiljning och variation – har det varit möjligt att studera relationen mellan dessa.

Resultatet, i form av de mer eller mindre gynnsamma variationsmönstren, grundas i tolkningen av elevernas svar på uppgifterna i testen. Både testens utformning och tolkningen utgör centrala delar i studien. Testen var inte standardiserade utan designades av lärargruppen. Det är därför inte säkerställt att uppgifterna i alla avseenden prövade vad som avsågs. Däremot prövar flera uppgifter samma aspekter, vilket kan ses som en styrka i testen. I tolkningen av elevernas svar har hänsyn tagits till vad eleverna uttryckte muntligt och vilka gester de gjorde (till exempel vilka siffror de pekade på i anslutning till frågan: vad betyder siffrorna i talet 90?). Tolkningen har även gjorts utifrån vilka aspekter eleverna inte uttryckte förståelse av, men däremot har inte hänsyn tagits till varför det inte uttrycktes. En risk är till exempel att eleverna uppfattade att frågorna efterfrågade något annat än vad som avsetts. För att minska denna risk användes uppföljande frågor.

Fortsatt forskning

Ytterligare forskning behövs när det gäller vilka variationsmönster som är gynnsamma för elevernas lärande om platsvärde och vilka exempel som kan användas för att skapa dessa. Särskilt intressant är att ytterligare studera vilka variationsmönster som kan användas för att eleverna ska lära att det enbart får plats upp till 9 i varje position och att decimalprincipen gäller oberoende av position, eftersom undervisningen i denna studie inte verkade vara särskilt framgångsrik avseende dessa aspekter. En kvasiexperimentell studie med kontrollgrupp skulle kunna ge ytterligare insikter i dessa frågor.

Referenser

- Al-Murani, T., Kilhamn, C., Morgan, D. & Watson, A. (2018): Opportunities for learning: the use of variation to analyse examples of a paradigm shift in teaching primary mathematics in England. *Research in Mathematics Education*, vol. 2, nr. 1, ss. 1-19. DOI: 10.1080/14794802.2018.1511460
- Bednarz, N. & Janvier, B. (1982). The understanding of numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 13, nr. 1, ss. 33-57.
- Cawley, J.F., Parmar, R.S., Lucas-Fusco, L.M., Kilian, J.D, Foley, T.E. (2007). Place

- Value and Mathematics for Students with Mild Disabilities: Data and Suggested Practices. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, vol. 5, nr. 1, ss. 21-39.
- Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 97, nr. 2, ss. 185-207. DOI: 10.1007/s10649-017-9790-3
- Fuson, K. (1990). Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction Learning and Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, nr. 4, ss. 273-280.
- Fuson, K. & Briars, D. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First- and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, nr. 3, ss. 180-206.
- Fuson, K. C. & Kwon, Y. (1992). Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development*, vol. 63, nr. 2, ss. 491-506.
- Fuson, K., Smith, S. T. & Lo Cicero, A.M. (1997). Supporting Latino First Graders' Ten-Structured Thinking in Urban Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 28, nr. 6, ss. 738-766.
- Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T., Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 28, nr. 2, ss. 130-162.
- Gallardo, A. & Hernández, A. (2006). The zero and negativity among secondary school students. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (red.), *Proceedings of the 30th international conference of the international group for the psychology of mathematics education 3 Prague, Czech Republic: PME*, ss. 153-160.
- Herzog, M., Ehlert A. & Fritz A.-M. (2017). A Competency Model of Place Value Understanding in South African Primary School Pupils. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, vol. 21, nr. 1, ss. 37-48. DOI:10.1080/18117295.2017.1279453
- Hiebert, J. & Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 23, nr. 2, ss. 98-122.
- Kamii, C. (1986). "Place Value: An Explanation of Its Difficulty and Implications for the Primary Grades." *Journal for Research in Childhood Education*, vol. 1, nr. 2, ss. 75-86.
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.
- Kullberg, A., Runesson Kempe, U. & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education*, vol 49, nr. 4, ss. 559-569. DOI 10.1007/s11858-017-0858-4
- Laski, E. V., Ermakova, A. & Vasilyeva, M. (2014). Early use of decomposition for addition and its relation to base-10 knowledge. *Journal of Applied Developmental Psychology*, vol. 35, nr. 5, ss. 444-454.

Hansson

- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ma, L. & Kessel, C. (2018). The theory of School Arithmetic: Whole Numbers. I M.G. Bartolini Bussi, & X.H. Sun (red.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study*, Cham, Schweiz: Springer International Publishing, ss. 439-463.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). Om lärande. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. (2004). The space of learning. I F. Marton & A. B. Tsui (red.), *Classroom discourse and the space of learning* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, ss. 3-40.
- Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. I R. Zazkis, & S. R. Campbell (red.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Press, ss. 41-68.
- Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 15, nr. 3, ss. 277-289.
- Mix, K., Smith, L., DaSha Stockton, J., Cheng Y-L. & Barterian, J. (2017) Grounding the Symbols for Place Value: Evidence From Training and Long-Term Exposure to Base-10 Models. *Journal of Cognition and Development*, vol. 18, nr. 1, ss. 129-151. DOI:10.1080/15248372.2016.1180296
- Mårtensson, P. & Hansson, H. (2018) Challenging teachers' ideas about what students need to learn: Teachers' collaborative work in subject didactic groups", *International Journal for Lesson and Learning Studies*, vol. 7, nr. 2, ss. 98-110. DOI: 10.1108/IJLLS-11-2017-0048
- Pang, M. F. & Marton, F. (2003). Beyond lesson study: Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Science*, vol. 31, nr.3, ss. 175-194. DOI:10.1023/A:1023280619632
- Pimm, D. (2018). On Number Language: A Commentary on Chapter 3. I M.G. Bartolini Bussi, & X.H. Sun (red.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study*, Cham, Schweiz: Springer International Publishing, ss. 71-87.
- Ross, S. (1989). Parts, wholes and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher*, vol. 36, nr. 6, ss. 47-51.
- Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematic*, vol. 69, nr. 2, ss. 149-163.
- Sun, X. H. & Bartolini Bussi, M. G. (2018a) Language and Cultural Issues in the Teaching and Learning of WNA. I M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (red.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study*, Cham, Schweiz: Springer International Publishing, ss. 35-70.
- Sun, X.H, Chambris, C., Savers, J., Siu M.K, Cooper, J. Dorier, J-L., González de Lora

- Sued, S.I., Thanheiser, E., Azrou, N., McGarvey, L., Houdement, C. & Ejersbo, L.R. (2018b). The What and Why of Whole Number Arithmetic: Foundational Ideas from History, Language and Societal Changes. I M.G. Bartolini Bussi, & X.H. Sun (red.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study*, Cham, Schweiz: Springer International Publishing, ss. 91-124.
- Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 19, nr. 2, ss. 261-276. DOI 10.1007/s10857-015-9333-8
- Thanheiser, E. (2009). Elementary School Teachers' Conceptions of Multidigit Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 40, nr. 3, ss. 251-281.
- Thanheiser, E. & Melhuish, K. (2018). Leveraging variation of historical number systems to build understanding of the base-ten-place-value system. *ZDM Mathematics Education*, vol. 51, nr. 1, ss. 39-55. DOI: 10.1007/s11858-018-0984-7
- Thomas, N. (2004). The development of structure in the number system. I M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (red.), *28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Bergen: Bergen University College Press, ss. 305-312.
- Van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. I J. van den Akker (red.), *Tools in education and training*, Boston, N.Y. Kluwer Academic, ss. 1-14.
- Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. I F.K. Lester (red.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning*, Charlotte, NC: Information Age Pub, ss. 557-628.
- Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed. Vetenskapsrådets rapportserie VR1708*. Stockholm: Vetenskapsrådet
- Vygotsky, L.S. (1934/2010). *Tänkande och språk*. Borgå: WS Bookwell AB.
- Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies Mathematics*, vol. 69, nr. 2, ss. 165-182.