Frågan är vad frågan gör – olika frågeställningars betydelse för hur elever uttrycker och använder förändringstakt i matematik

P Håkansson & R Gunnarsson

Sammanfattning

*Syftet med denna studie är att jämföra olika frågeställningars betydelse för hur elever relaterar och uttrycker relationer mellan olika storheter i uppgifter om förändringstakt i matematik. Genom en kvalitativ analys jämför vi hur elever i årskurs 9 besvarar två olika typer av uppgifter om hur snabbt vätskevolymen i två medicinska droppåsar förändras. Analysen pekar bland annat på att en **jämförande** uppgift (”**vilken** förändras snabbast?”) kan öppna ett brett utfallsrum, där vi kunde observera fem kvalitativt skilda sätt att lösa uppgiften. Vidare verkar en uppgift som efterfrågar ett värde (”**hur** snabbt förändras den?”) kunna leda eleverna mot multiplikativa jämförelser, som ligger nära den vedertagna matematiska innebörden i begreppet förändringstakt. Avslutningsvis diskuterar vi de olika frågeställningarnas potential för att lyfta olika aspekter av begreppet förändringstakt och hur de skulle kunna användas av lärare för olika syften i undervisningen.*

Nyckelord: förändringstakt, matematikundervisning, uppgiftsdesign, proportionalitet

Per Håkansson är lärare på Vasaskolan i Skövde i matematik och naturvetenskap och förstelärare i Skövde kommun. För närvarande är han också doktorand vid Jönköping University inom forskarskolan Learning Study.

Robert Gunnarsson är docent och lektor vid Jönköping University. Efter att ha doktorerat i fysik på Chalmers, arbetat på Niels Bohr Institutet, Köpenhamn, arbetar han med lärarutbildning och matematik- och naturvetenskapernas didaktik.

Abstract
*The aim of this study is to compare the impact of different framings of questions as of how students relate and express relations between different quantities in student tasks concerning rate of change. Through a qualitative analysis we compare how students in ninth grade (age 15) respond to two different framings of questions, concerning how fast the volume of fluid in two medicine bags change. The analysis indicates that a comparing question (”**which** changes fastest?”) can open up a wide outcome space, in which we could observe five qualitatively distinct ways of solving the task. Furthermore, a question that requests a value (“**how** fast does it change?”) seem to encourage students to make multiplicative comparisons, which is close to the mathematical meaning of rate of change. Finally, we discuss the potential of each question for pointing to different aspects of rate of change, and how they could be used by teachers for different purposes in teaching situations.*

Keywords: Rate of change, Mathematics teaching, Task design, Proportionality

Introduktion
Hur elevers möjligheter till lärande påverkas av uppgifters design är en del av det matematikdidaktiska forskningsfältet, men också centralt i lärares yrkespraktik. Vid sidan av olika talvärden, kontexter och representationer, kan också de specifika frågeställningarna antas påverka vilket matematiskt innehåll som elever möter i en uppgift. I den här studien fokuserar vi på olika frågeställningars betydelse. Med det menar vi hur *vad som efterfrågas*, snarare än hur frågan är *formulerad*, påverkar elevers användning av förändringstakt.

Begreppet förändringstakt beskriver med vilken takt en variabel förändras i förhållande till en annan (samvarierande) variabel. Tidigare studier har visat att begreppet kan innebära svårigheter för elever i olika åldrar, och både före och efter undervisning i matematisk analys (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Herbert & Pierce, 2008; Orton, 1984). På senare tid (Johnson, 2015) har det också föreslagits att elever som uttrycker förändringstakt med en enda storhet har bättre möjligheter att fördjupa sitt kunnande av begreppet, jämfört med elever som inte gör det. Johnson (ibid) beskriver detta i termer av intensiva och extensiva storheter. En extensiv storhet är direkt mätbar (till exempel sträcka och tid), medan en intensiv storhet (till exempel hastighet) används för att uttrycka storleken av ett förhållande mellan två extensiva storheter. Ett fördjupat kunnande av förändringstakt innefattar gymnasiematematikens derivatabegrepp som ibland beskrivs som den momentana förändringstakten. Det finns flera studier som berör elevers förståelse av förändringstakt och samvariation mellan variabler (till exempel Johnson, 2012). Vilken roll en specifik frågeställning spelar för elevers uttryck eller användning av förändringstakt som en intensiv storhet är dock relativt oproblematiserat.

För att undersöka vilka effekter olika typer av frågeställningar kan få i uppgifter om förändringstakt har vi analyserat elevers lösningar till två uppgifter som handlar om medicinska droppåsar där varje påses innehåll förändras i en konstant takt. Uppgifterna är identiska vad gäller talvärden, kontext och representationsformer, men skiljer sig åt genom att den ena efterfrågar en jämförelse av två takter (härefter *jämförande* uppgift), medan den andra efterfrågar ett värde på den förändringstakt som är högst (härefter kallat *värderande* uppgift). I analysen fokuserades på hur elever relaterar två samvarierande storheter, volym och tid, till varandra vid respektive frågeställning. Vi jämför sedan hur uppgifter som efterfrågar en jämförelse respektive ett värde kan påverka elevers användning av förändringstakt som en intensiv storhet.

Samvariation, förhållande och förändringstakt

I läromedel definieras ofta (Thompson & Carlson, 2017) en matematisk funktion som en *korrespondens* mellan specifika x- och y-värden (se till exempel Adams och Essex, 2017). Samtidigt lyfts ofta *samvariation* mellan variabler fram som avgörande för vidare kunskapsutveckling inom matematisk analys (Carlson m.fl., 2002). I motsats till korresponderande värden, är det alltså variablernas förändringar, eller hur de varierar i förhållande till varandra, som står i förgrunden. Utöver ett sådant samvarierande perspektiv har man nyligen pekat också på andra begrepp, såsom kvot och förhållande, som grundläggande för en stabil förståelse för begreppet förändringstakt (Thompson & Carlson, 2017). På engelska används termerna 'quotient', 'ratio' och 'rate', för vilka vi här använder 'kvot', 'förhållande' respektive 'takt'. Det sistnämnda i betydelsen "takt med vilket något förändras" eller "förändringstakt" (eng. rate of change). Medan 'kvot' (quotient) ofta avser ett numeriskt resultat av en division finns det i den matematikdidaktiska litteraturen flera olika uppfattningar av begreppen förhållande (ratio) och takt (rate) och det verkar heller inte finnas några entydiga definitioner av, eller skillnader mellan, begreppen (Lamon, 2007).

Olika innebörder av begreppet takt har framförts beroende på om man utgår från egenskaperna hos de storheter som ingår, eller om det ses som en intensiv storhet (Thompson, 1994). Homogeniteten i en sådan storhet har också lyfts fram som avgörande för att förstå förändringstakt (Kaput & West, 1994). Att vandra 14 km på 2 timmar är inte samma sak som att vandra 7 km på 1 timme, men båda vandringarna innebär att den tillryggalagda sträckan förändras i samma takt (7 km/h). Homogeniteten innebär här alltså att samma takt svarar mot olika par av sträcka och tid. På samma sätt innebär homogenitet att smakstyrkan hos saft kan vara densamma oberoende av mängden saft som tillreds. Förutom homogenitet lyfter Confrey och Smith (1994) fram att förändringstakt är en egen storhet som kan variera i sig själv. De menar också att det är avgörande att urskilja en sådan variation för en övergång till formell funktionslära (ibid., s. 154). Thompson (1994) beskriver takt som ett "genomtänkt abstraherat konstant förhållande" (ibid, s. 192, vår översättning) och föreslår att skillnaden mellan takt och förhållande snarare ligger i hur en situation uppfattas än i situationen som sådan. En person som jämför att vandra 14 km på 2 timmar med att vandra 7 km på 1 timme (förhållandena mellan 14 km och 2 timmar respektive mellan 7 km och 1 timme) behöver inte nödvändigtvis jämföra takterna med vilken vandringarna genomförs (7 km/h respektive 7 km/h).

I denna studie använder vi termen *förhållande* för multiplikativa jämförelser mellan två storheter. Med (förändrings-) takt avser vi en egen (intensiv) storhet med syfte att uttrycka intensiteten i ett sådant förhållande. I exemplet med vandring innebär ett förhållande att storheterna sträcka och tid jämförs multiplikativt medan en takt innebär att en ny storhet (hastighet) konstrueras och används för att uttrycka intensiteten i förhållandet, vilket också innebär att man tilldelar storheten en egen och sammansatt enhet, till exempel km/h. Det mer specifika begreppet hastighet begränsar dock sammanhanget till *tid* som oberoende variabel medan takt kan användas även i andra sammanhang.

Betydelsen av sammanhang, representationsformer och frågor

I en studie med australiensiska elever i årskurs 10 konstaterar Herbert och Pierce (2011) att elevernas ”uppfattningar av förändringstakt i en representationsform eller kontext inte nödvändigtvis följer med till andra representationsformer eller kontexter” (ibid., s. 476, vår översättning). Johnson, McClintock och Hornbein (2017) visar på en motsvarande problematik när det gäller resonemang om samvarierande variabler mellan olika uppgifter med olika kontext. Elevers förståelse av såväl förändringstakt som samvariation verkar alltså påverkas av såväl uppgifters sammanhang som representationer. Men även om man håller sig till *ett* sammanhang och *en* representationsform kan vad som specifikt efterfrågas i uppgifter göra skillnad. Ayalon, Watson och Lerman, (2015) gav elever, 11 till 18 år gamla, olika frågor om förändringstakt men kopplade till samma kontext och med samma representationsformer. Deras studie visade bland annat att eleverna svarade oreflekterat och hastigt på vissa frågor och medvetet och med större ansträngning på andra. I vår studie är betydelsen av uppgifters frågeställningar central, men till skillnad från Ayalon m.fl. (2015) belyser vi inte graden av reflektion i elevernas svar. Istället fokuserar vi på hur begreppet förändringstakt uttrycks och används av eleverna beroende på vilka frågor som ställs. Specifikt undersöker vi hur två kvalitativt olika frågeställningar påverkar hur elever relaterar två storheter till varandra.

Frågor om förändringstakt kan huvudsakligen vara av två typer. De kan efterfråga vilken av minst två olika takter som är högst/lägst (jämförande) eller de kan efterfråga ett värde på hur hög en takt är (värderande). Medan den förra kräver att (två) förhållanden jämförs med varandra efterfrågar den senare ett värde. Varken sammanhang, representationsformer eller talvärden, behöver dock ändras för att byta mellan dessa frågeställningar.

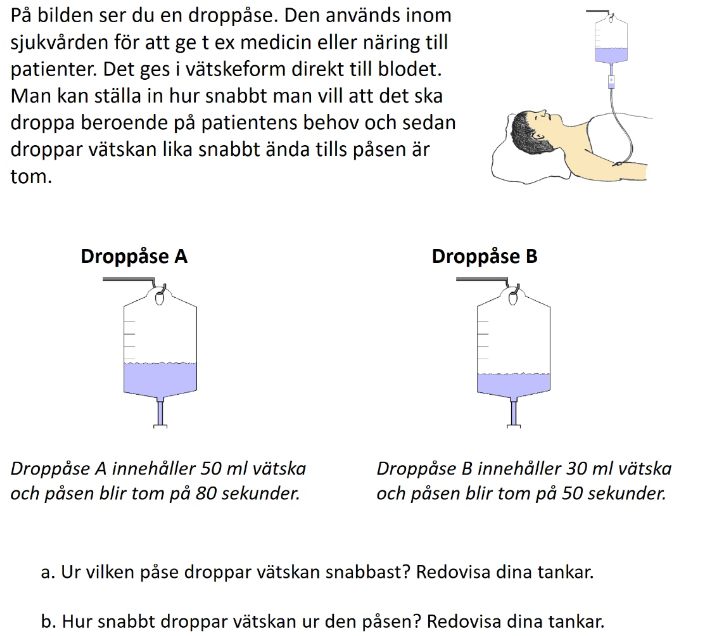
Syftet med studien är att beskriva de relationer mellan samvarierande storheter som elever använder och uttrycker när de möter en jämförande respektive värderande fråga i en uppgift om förändringstakt. Två forskningsfrågor används:

- Hur använder och uttrycker elever relationer mellan två samvarierande storheter när en uppgift efterfrågar en *jämförelse* av två förändringstakter (jämförande frågeställning)?

- Hur påverkas elevernas sätt att relatera storheterna av en uppgift som efterfrågar *hur hög en förändringstakt är* (värderande frågeställning)?

Metod

I samband med ett större projekt genomförde 69 elever från tre klasser i årskurs nio ett skriftligt test med fem uppgifter om förändringstakt. I denna artikel presenterar vi en analys av elevernas lösningar till en av dessa uppgifter (som består av två deluppgifter). Med begreppet 'lösning' avses det som eleven *gör* med en uppgift. Samtliga klasser ansågs medelpresterande av sina matematiklärare och samtliga betygssteg fanns representerade hos eleverna. Spridningen i elevernas matematikkunnande antogs lämplig för att erhålla en så rik variation i elevernas lösningar till uppgifterna som möjligt. Eleverna besvarade uppgifterna skriftligt och i varje uppgift uppmanades de förklara sina tankar noga och på det sätt de själva önskade. För att svara mot denna studies syfte ansågs att eleverna behövde avledas i så stor utsträckning som möjligt från eventuella procedurella metoder understödda av en grafisk representation. Man ville alltså undvika att eleverna använde någon tidigare känd formel eller procedur för att till exempel beräkna riktningskoefficienten för en linjär graf. Utifrån en sådan procedur skulle det vara svårt att säga något om hur eleverna relaterar storheterna till varandra, och därför designades uppgiften helt utan grafisk representation. Uppgiften behövde efterfråga både en jämförelse av olika takt med vilket något förändras, och ett värde på hur snabbt förändringen sker. Vidare måste uppgiften placeras i ett enda sammanhang, och kretsa runt två olika förändringstakter som inte kan jämföras eller beräknas utan viss ansträngning. Orden 'takt', 'förändringstakt' och andra liktydiga ord, skulle undvikas eftersom dessa ansågs kunna leda eleverna till att använda färdiga procedurer. Uppgiften med droppåsen, se figur 1, ansågs möta dessa krav och den antogs inte föranleda användning av koordinater eller begreppet lutning hos en graf.



Figur 1. *Uppgifterna vars elevlösningar har analyserats i denna studie. Uppgift a efterfrågar en jämförelse och uppgift b efterfrågar ett värde. "Snabbast" och "hur snabbt" används istället för direkta ord som 'takt' eller 'hastighet'.*

Analysen genomfördes i tre delar. I den första analyserades elevernas sätt att relatera de två storheterna i den jämförande uppgiften. Här identifierades först de lösningar där ett värde på förändringstakten för vätskevolymen i varje påse beräknades, och sedan jämfördes. Sådana lösningar utgör en av kategorierna (kategori 5). Sedan granskades andra typer av lösningar som eleverna använt. Detta steg innebar upprepade genomläsningar och granskning av de olika sätt på vilka eleverna relaterat storheterna volym och tid. Detta låg till grund för vår kategorisering. Även om det naturligtvis inte är irrelevant om en elev väljer korrekt påse (A) eller inte, så var inte detta vårt fokus i analysen. Som en konsekvens kan alltså lösningar med såväl korrekt som felaktigt svar till uppgift a finnas representerade i samma kategori. Kategoriseringen gjordes efter upprepade samråd och diskussioner mellan såväl författarna som två av de lärare som undervisade eleverna. Baserat på vilken underliggande princip som använts för att relatera storheterna växte ytterligare fyra kategorier fram. I analysens andra steg fokuserade vi på hur eleverna valt att uttrycka sitt svar (som ett förhållande eller som en takt) till den *värderande* frågan. För att avgöra om eleven uttryckt ett förhållande eller en takt förlitade vi oss på våra definitioner av förhållande som en multiplikativ jämförelse av två (extensiva) storheter och takt som en intensiv storhet med syfte att kvantifiera en sådan jämförelse. Till exempel uttrycker 0,625 ml/s dropptakten för en påse, medan förhållandet 50 ml/80 s relaterar volymen 50 ml till tiden 80 s multiplikativt. Vi var medvetna om utmaningen som ligger i att tolka elevers lösningar. Medan ett uttryck av en takt (till exempel 0,625 ml/s) tyder på att eleven haft intentionen att mäta intensiteten i jämförelsen så *kan* också en elev som uttrycker ett förhållande (50 ml/80 s) ha denna intention. Vi ser dock en kvot med en sammansatt enhet som en starkare indikation på att eleven försökt att ge jämförelsen ett värde och därmed behandlar den som en intensiv storhet som kan kvantifieras. I det sista steget av analysen kopplades resultaten från de två första stegen samman. För varje elev jämfördes hur storheterna relaterats i den jämförande uppgiften med hur de uttryckts (som takt eller förhållande) i den värderande uppgiften. I denna del av analysen riktade vi fokus mot den andra forskningsfrågan. Vi ville urskilja om den värderande frågeställningen kunde påverka hur elever relaterade storheterna och deras användning av förändringstakt jämfört med i den jämförande frågeställningen.

Resultat

I detta avsnitt presenterar vi resultaten av de tre delanalyserna. Först beskriver vi de olika kategorierna för hur eleverna relaterade de två storheterna volym och tid i den jämförande uppgiften. Vi visar vad som karaktäriserar, och bredden inom, respektive kategori. Därefter ger vi exempel på hur eleverna i sitt svar till den värderande uppgiften uttryckt relationen mellan storheterna på olika sätt. Till sist redovisas hur eleverna uttryckt relationen i den värderande uppgiften kopplat till hur de relaterat storheterna i den jämförande uppgiften.

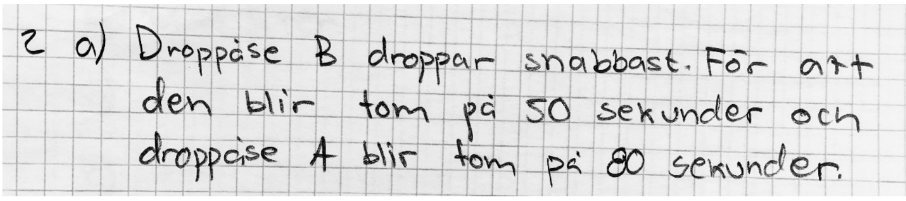
Elevernas lösningar till den jämförande uppgiften

Tio av de 69 eleverna redovisade ingen klar jämförelse mellan droppåsarna i den jämförande uppgiften. Från analysen av de återstående 59 elevlösningarna växte fem kvalitativt skilda kategorier fram. I följande avsnitt beskriver vi respektive kategori och ger exempel på elevlösningar.

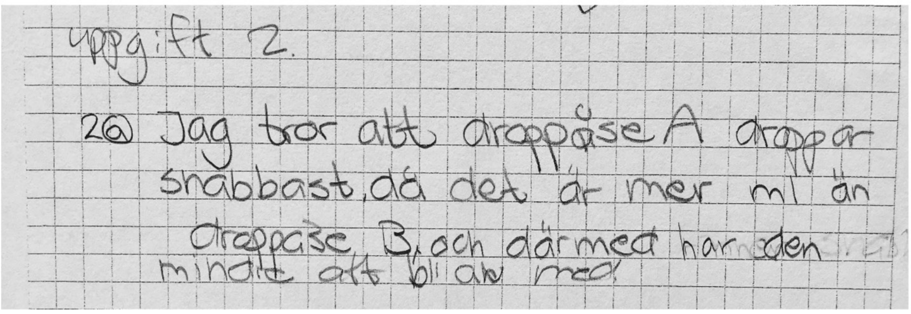
Kategori 1: Jämförelser inom en storhet

Även om två storheter finns med i uppgiften tar fem lösningar fasta endast på en av dem – antingen volym eller tid. Två exempel på sådana lösningar visas i figur 2. I figur 2a används endast tid och lösningen bygger på att ju kortare tid det tar att tömma påsen desto snabbare töms den. På samma sätt, men utifrån den andra storheten, visar figur 2b en lösning där påsarnas skillnad i volym används som argument för varför vätskan droppar snabbare från en av påsarna. Lösningarna i kategorin bygger på en storleksjämförelse (större än eller mindre än).

(a)



(b)



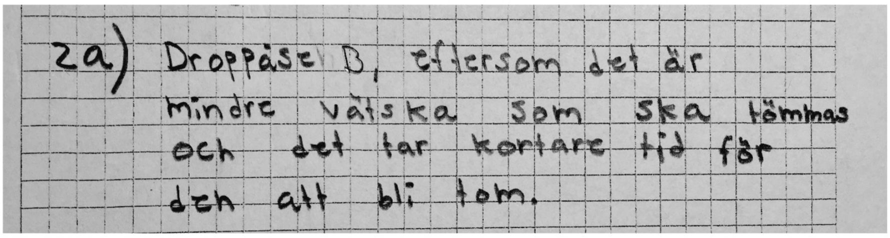
Figur 2. *Två elevlösningar ur kategori 1. Endast en storhet används i respektive lösning: i (a) endast tid och i (b) endast volym.*

Lösningarna i denna kategori, speciellt när tid är den enda storheten som lösningen fokuserar på, skulle kunna tolkas som om att eleven förstått frågeställningen som vilken av påsarna som töms *först*, istället för snabbast. Ett ensidigt fokus på volym, som i figur 2b, skulle också kunna tolkas som att eleven antagit att påsarna töms på *samma* tid. Oavsett vilket visar dessa lösningar att den jämförande frågan inte automatiskt leder till att eleverna uppmärksammar hur storheterna samvarierar.

Kategori 2: Jämförelser inom varje storhet

I sju fall används bägge storheterna i lösningen, fastän separat. I dessa sju lösningar, kategori 2, verkar några jämförelser *mellan* storheterna inte förekomma, se figur 3.

(a)



(b)

Figur 3. *Två elevlösningar med jämförelser inom varje storhet.*

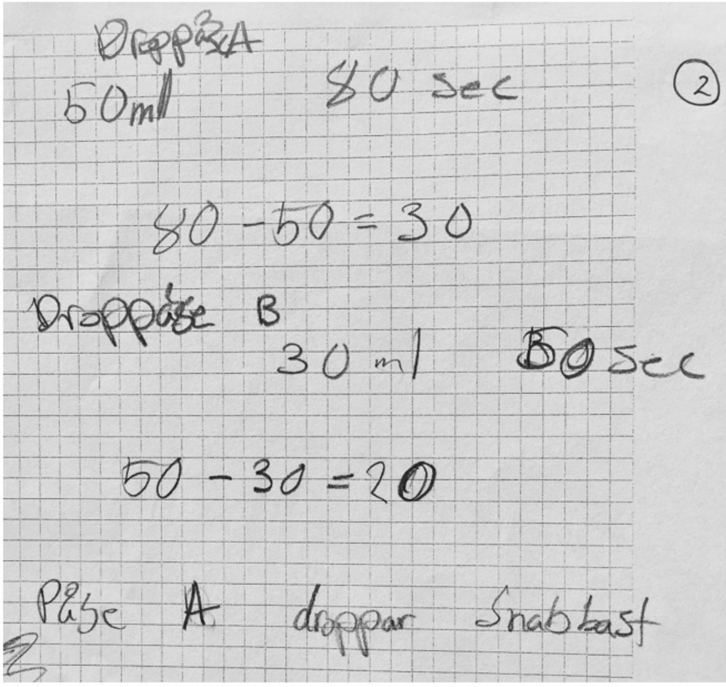
I dessa lösningar jämförs tiden det tar att tömma droppåse A med tiden för påse B och påsarnas volym jämförs också. Resonemanget i figur 3a går ut på att eftersom både volymen och tiden associerad till påse B är mindre än för påse A så töms påse B snabbare. Trots en oklart underbyggd slutsats i figur 3b är skillnaderna i volym och tid tydligt och separat antecknade, men de är inte uttryckligen relaterade till varandra. I dessa exempel är alla jämförelser *inom* varje storhet, och verkar vara additiva. Volym och tid sammanförs inte i några beräkningar.

Kategori 3: Additiva jämförelser mellan storheter

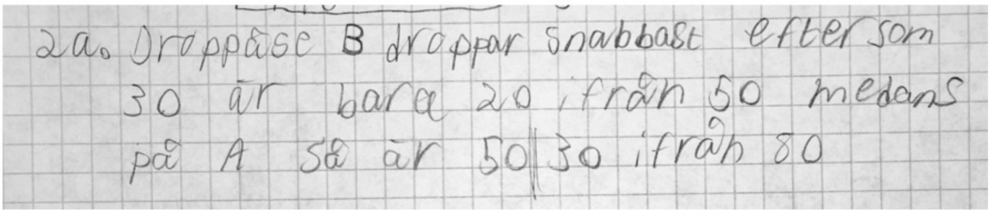
I data fann vi också fyra lösningar som visar elevresonemang baserade på additiva jämförelser mellan storheterna. Såväl i kategori 2 som i kategori 3 är alltså numeriska skillnader i båda storheterna centrala. I kategori 3 genomförs dock jämförelserna *mellan* de båda storheterna medan de i kategori 2 sker *inom* respektive storhet. Figur 4 visar två lösningar ur denna kategori.

I båda lösningarna beräknas skillnaden mellan tid och volym för varje påse. Därefter jämförs de båda skillnaderna, och en av påsarna väljs. Lösningar i denna kategori tar inte hänsyn till att måttenheter blandas. I exemplen i figur 4 beräknas en skillnad för varje påse genom att subtrahera antalet *milliliter* från antalet *sekunder*. En sådan numerisk skillnad har ingen uppenbar mening och som en konsekvens ter sig slutsatserna godtyckliga. Trots att lösningarna i figur 4 relaterar storheterna på samma sätt är de slutsatser som dras olika. Till skillnad från kategorierna 1 och 2 uppvisar elevernas tillvägagångssätt i kategori 3 två likheter med förhållande och takt; båda storheterna används och relateras till varandra separat för varje påse, men det sker genom additiva jämförelser – inte multiplikativa.

(a)



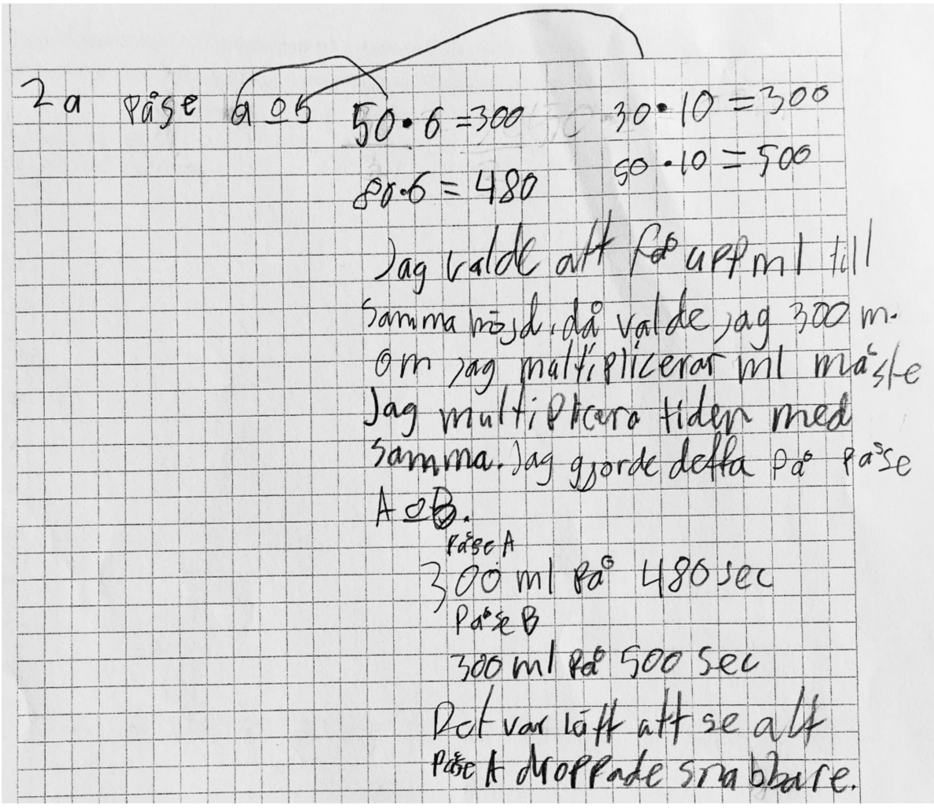
(b)



Figur 4. Två lösningar ur kategori 3 – additiva jämförelser mellan storheter. Samma numeriska skillnader används i både (4a) och (4b), men slutsatserna från dessa är olika.

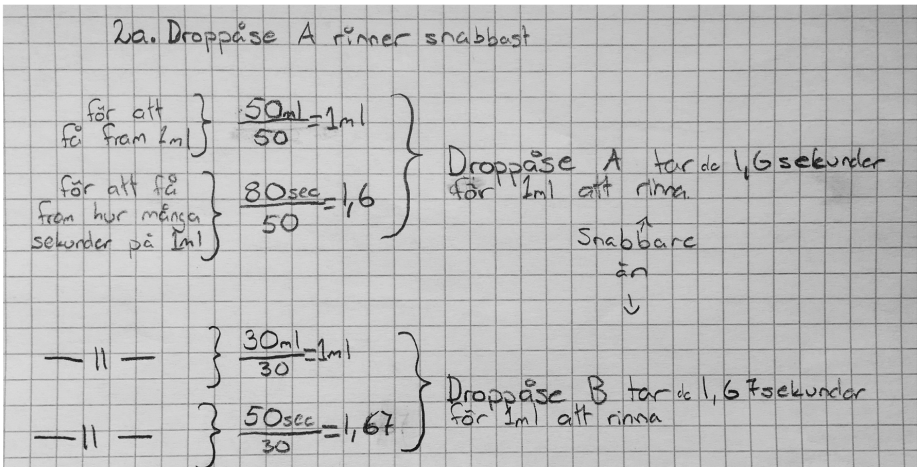
Kategori 4: Multiplikativa jämförelser mellan storheter – förhållanden används

De 17 lösningarna i kategori 4 bygger på att förhållanden (formellt eller informellt) konstrueras och på att ett proportionellt resonemang används. Multiplikativa jämförelser är centrala i lösningarna samtidigt som begreppet takt inte används. Genom att skala upp (eller ned) värdena för volym och tid antas en av storheterna vara lika för de båda droppåsarna. Därefter jämförs värdet för den andra storheten mellan påsarna, vilket leder fram till en slutsats. Figur 5 visar en sådan lösning. Även om en formell notation inte används skalas förhållandet mellan volym och tid upp och volymen antas på så sätt vara lika stor för de båda påsarna. En sådan strategi låter alltså eleven dra en slutsats genom att endast jämföra tiden det tar för samma volym att droppa ur respektive påse.



Figur 5. *En lösning som bygger på att förhållanden mellan volym och tid skalas om. För samma volym, 300 ml, jämförs sedan de motsvarande tider det tar att tömma denna volym ur de båda påsarna.*

Alla lösningar i kategori 4 bygger på att förhållanden skalas om för att nå ett gemensamt värde på en av storheterna. I figur 5 används multiplikation, men ett sådant gemensamt värde kan också nås via division, som i exemplet i figur 6.

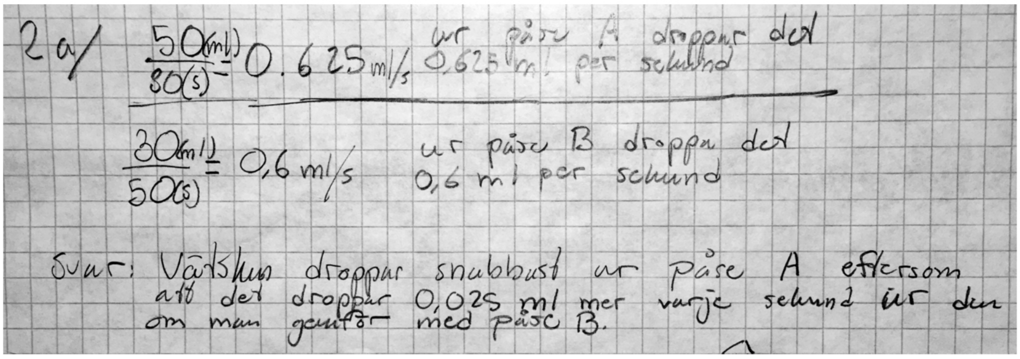


Figur 6. *Ett gemensamt värde för volymen i de två påsarna nås genom ett proportionellt resonemang, och tiden det tar för volymen 1 ml att droppa ur varje påse jämförs. Jämfört med föregående exempel (figur 5) används här division.*

Till skillnad från lösningen i figur 5 är volymen som nås genom omskalningen inte bara lika för de båda påsarna, utan precis 1 ml. Begreppet takt (tid per en enhet av volymen) verkar därför ligga nära till hands. Ett sätt att se på denna lösning är därför att takt faktiskt används eftersom det tydligt uttrycks en tid ”för 1 ml att rinna”. Å andra sidan används ingen sammansatt enhet och vi ser inte att beräkningarna har genomförts med syftet att skapa en ny intensiv storhet utan snarare för att bibehålla förhållandet mellan tiden och volymen, samtidigt som en ”gemensam” volym om 1 ml antas för båda påsarna. Med andra ord: idén bakom lösningen verkar fortfarande vara att jämföra påsarnas olika tider för att tömma en lika stor volym vätska, låt det vara 1 ml. Idén är inte att skapa en dropptakt som en ny intensiv storhet för varje påse och sedan jämföra dessa. Istället baseras slutsatsen på en jämförelse av påsarnas tider för en specifik volym vätska.

Kategori 5: Multiplikativa jämförelser mellan storheter – takt används

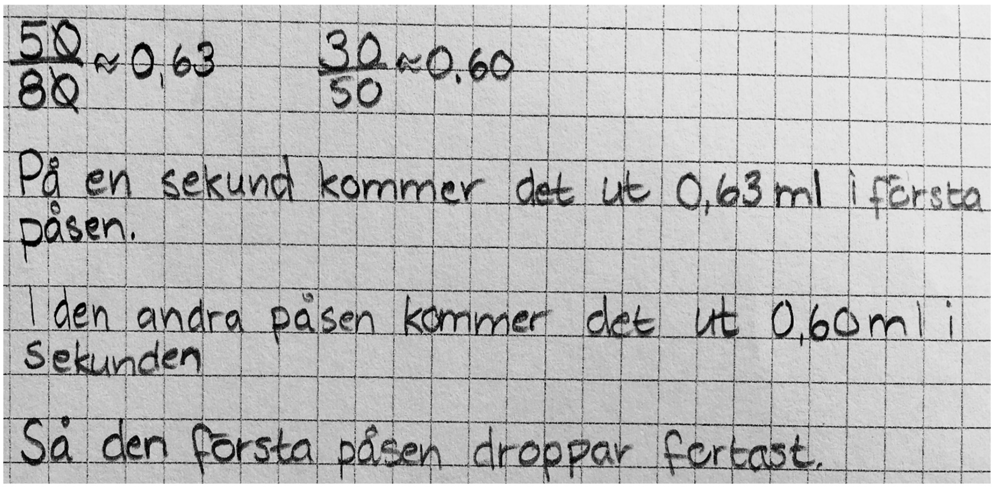
I dessa 26 lösningar konstrueras, beräknas och jämförs, takterna med vilka vätskan droppar ur respektive påse. Liksom i kategori 4 relateras volym och tid multiplikativt för varje påse, men här används alltså också en ny, intensiv, storhet med en sammansatt enhet (ml/s eller s/ml), se figur 7.



Figur 7. *Ett exempel på en lösning där dropptakten för varje påse beräknas och jämförs.*

I detta exempel mynnar de genomförda divisionerna inte ut i omskalning av förhållanden. Istället används en ny storhet i vilken dropptakten för respektive påse uttrycks. Påsarnas dropptakter jämförs sedan additivt. Det är endast i denna kategori vi finner lösningar där takten med vilken vätskan droppar används för att göra jämförelsen mellan påsarna. I exemplet i figur 7 är detta mycket tydligt då eleven också visar hur stor skillnaden i dropptakt är (0,025 ml/s).

Men vi finner också exempel där taktbegreppet inte syns lika framträdande, se figur 8, men där ändå en ny enhet (”ml i sekunden”) har bildats. En gemensam tid för påsarna, en sekund, är tydligt uttryckt i jämförelsen. Det skulle kunna peka på att eleven tänker sig en storhet (tid) som lika stor (1 s) för båda påsarna, medan endast den andra storheten (volym) jämförs. En sådan strategi skulle kvalificera lösningen för kategori 4. En blick på de räkneoperationer som används avslöjar dock att volym och tid för varje enskild påse relateras direkt till varandra (multiplikativt) genom en division. Någon omskalning av förhållanden finns alltså inte i lösningen. Istället tilldelas genom divisionen en lika del av vätskevolymen till varje sekund och resultaten av de båda divisionerna jämförs. Därför ansågs lösningen tillhöra kategori 5 där begreppet takt används. En sammansatt enhet är inte formellt uttryckt men kan anas bakom ”I den andra påsen kommer det ut 0,60 *ml i sekunden*” (vår kursivering).

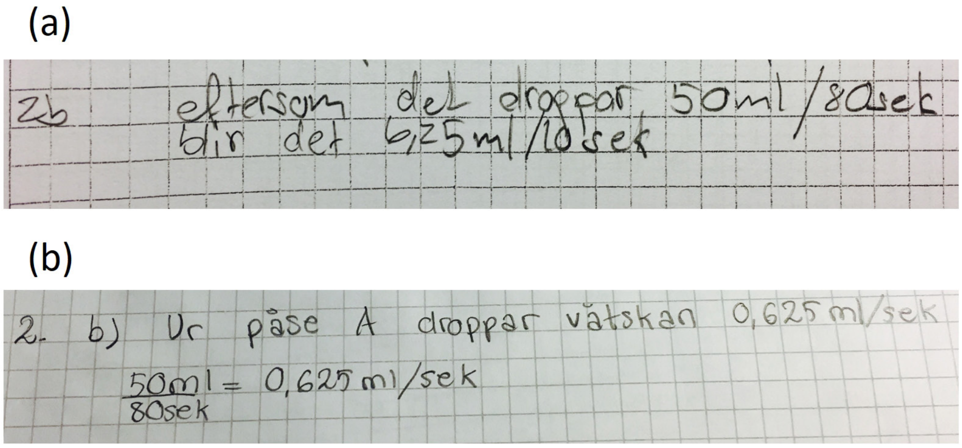


Figur 8. *Dropptakten för varje påse beräknas och jämförs.*

Sammanfattningsvis uppvisar elevernas lösningar till den jämförande uppgiften en bredd av fem kvalitativt skilda kategorier. Lösningar i en kategori (1) tar hänsyn till endast en av storheterna, och lösningar i fyra av kategorierna (2-5) beaktar båda storheterna i uppgiften. Dessa fyra kategorier visar variationer som rör hur storheterna relateras; jämförelserna är storleksmässiga, additiva eller multiplikativa, och jämförelserna sker inom eller mellan de olika storheterna. Utfallsrummets bredd visar att det i en jämförande uppgift inte är trivialt för elever att använda varken multiplikativa jämförelser, eller att göra jämförelser mellan olika storheter. Lösningarna i kategori 4 visar att även om storheterna relateras multiplikativt till varandra så innebär det inte att begreppet förändringstakt faktiskt används eftersom sådana lösningar visade sig istället kunna bygga på omskalningar av förhållanden. Det betyder att eleverna inte nödvändigtvis använder begreppet takt i en uppgift där just takterna hos två skeenden ska jämföras.

Elevernas lösningar till den värderande uppgiften

Den värderande uppgiften efterfrågar ett *värde* på *takten*, men utan att nämna ordet takt, se figur 1. I data fann vi två tydligt olika sätt att uttrycka hur snabbt vätskan droppade ur påsen; med ett *förhållande*, och med en *takt*. Ett uttryck med en multiplikativ jämförelse mellan två värden av olika storheter, betraktades som ett förhållande. En takt, å andra sidan, innebär ett uttryck med ett enda värde som beskriver intensiteten hos den multiplikativa jämförelsen. Figur 9a och 9b visar exempel på respektive uttryck.



Figur 9. *Två olika sätt att uttrycka hur snabbt vätskan droppade ur påsen. I (a) uttrycks ett förhållande med en multiplikativ jämförelse medan (b) uttrycker en takt med ett värde för en intensiv storhet med en sammansatt enhet.*

I båda exemplen i figur 9 är volym och tid multiplikativt relaterade. I det första exemplet (a) relateras de *specifika* vätskemängderna 50 ml och 6,25 ml till de *specifika* tiderna 80 s respektive 10 s. I det andra exemplet (b) används ett enda värde för en intensiv storhet som är oberoende av en specifik vätskemängd eller tid. Som en konsekvens används också en sammansatt enhet.

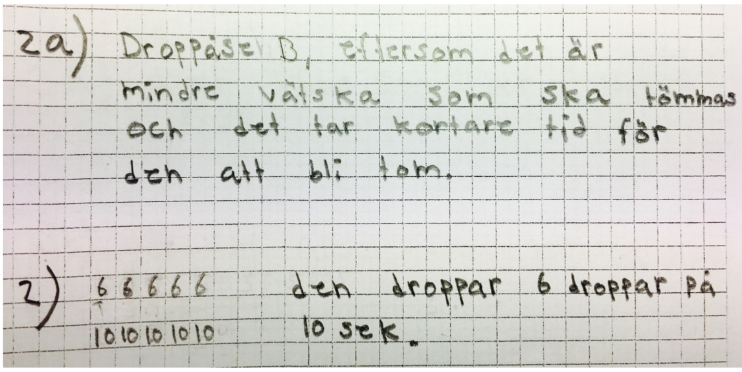
Elevers lösningar till de båda uppgifterna i relation till varandra

I detta avsnitt jämför vi hur elever med lösningar i de olika kategorierna för den jämförande uppgiften besvarade den värderande uppgiften. Alla elever som deltog i testet besvarade inte båda uppgifterna. De flesta av eleverna som deltog i testet gav en lösning till den jämförande uppgiften (59 av 69 elever) och av dessa 59 besvarade majoriteten (49 elever) den värderande uppgiften.

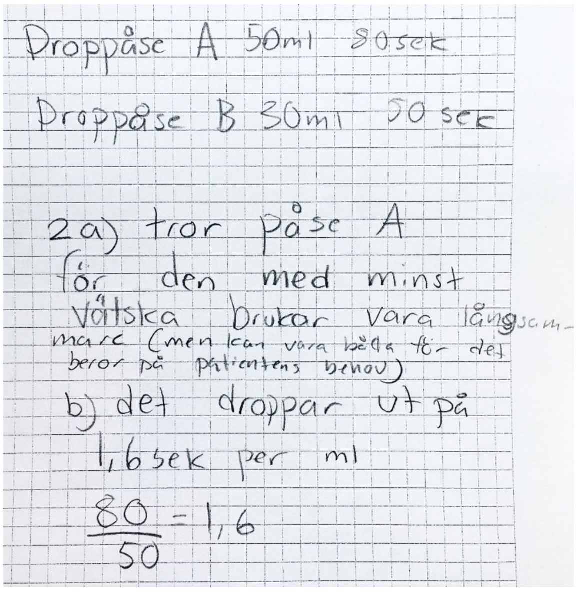
Av de elever som använde taktbegreppet i den jämförande uppgiften (kategori 5) uttryckte nästan alla (25 av 26 elever) en takt också i den värderande uppgiften. Det är ett resultat som ligger i linje med att dessa elever redan har använt dropptakterna för att lösa den jämförande uppgiften. Av de elever som använde förhållanden i den jämförande uppgiften (kategori 4, 17 elever), uttryckte ungefär en tredjedel (sex elever) en takt med en sammansatt enhet i den värderande uppgiften, medan tio elever använde ett (multiplikativt) förhållande. Om eleven i den jämförande uppgiften relaterat storheterna multiplikativt till varandra (kategori 4 och 5) verkar alltså en värderande fråga inte påverka detta. Däremot tycks en värderande fråga kunna påverka hur de redovisar resultatet och leda dessa elever mot att uttrycka en takt som en intensiv storhet med en sammansatt enhet, snarare än som ett förhållande mellan två storheter.

Dessa resultat går att förstå utifrån frågornas karaktär, den jämförande uppgiften efterfrågar inte någon takt medan den värderande explicit gör det (även om ordet takt inte nämns i uppgiften). Åtta av de 16 elever som i den jämförande uppgiften relaterat storheterna enligt kategori 1-3 ger inte någon lösning till den värderande uppgiften. Samtidigt använder de övriga åtta eleverna en *multiplikativ* jämförelse i sin lösning till den värderande uppgiften, och de flesta av dem (sex elever) uttrycker en takt. Dessa elever verkade relatera storheterna additivt (kategori 2 och 3) eller inte alls (kategori 1) i den jämförande uppgiften men multiplikativt i den värderande uppgiften. En värderande uppgift verkar alltså inte bara kunna leda dessa elever till att uttrycka en takt med en sammansatt enhet utan också till att storheterna relateras multiplikativt. Speciellt noterar vi också att elever som inte relaterade storheterna till varandra över huvud taget i den jämförande uppgiften uttrycker en takt i sin lösning till den värderande uppgiften. En större benägenhet att uttrycka takt i den värderande uppgiften syns i alla kategorier av lösningar till den jämförande uppgiften (utom kategori 5, där takt redan uttrycks). Figur 10 visar två exempel på när elever utvecklar en (storleksmässig) jämförelse i den jämförande uppgiften mot en specifikt multiplikativ i den värderande uppgiften, och där förhållande repektive takt används.

(a)



(b)



Figur 10. *Två exempel på elevlösningar som visar på storleksmässiga jämförelser i den jämförande uppgiften och multiplikativa jämförelser (i (a) uttryckt som ett förhållande och i (b) uttryckt som en takt) i den värderande uppgiften.*

I figur 10a bildas ett förhållande mellan droppar och sekunder. I den lilla tabellen verkar varje sex droppar paras ihop med var sin lika stor tidsrymd om tio sekunder. Totalt noteras fem sådana par vilket innebär 30 droppar och 50 sekunder. Således syns här ett byte från den storleksmässiga jämförelsen, uttryckt som ”mindre vätska” och ”kortare tid” i den jämförande uppgiften, till en specifikt multiplikativ jämförelse, ”den droppar 6 droppar på 10 sek”, i den värderande uppgiften. Exemplet i figur 10b visar på ett motsvarande byte, men här från en jämförelse *inom* en enda storhet till en multiplikativ jämförelse *mellan* de båda storheterna. Här uttrycks också takten som en intensiv storhet med den sammansatta enheten sekunder per milliliter, även om dess invers (milliliter per sekund) kan verka mer intuitiv.

Sammanfattningsvis tyder data på att kvalitativt olika frågeställningar har betydelse för om elever relaterar storheterna additivt eller multiplikativt. En värderande frågeställning verkar, i större utsträckning än en jämförande, kunna leda dels till att elever relaterar storheterna multiplikativt till varandra, dels till att relationen uttrycks som en takt.

Diskussion

Trots att den jämförande uppgiften är sluten, med endast ett korrekt svar, visar resultatet en rik variation i elevernas sätt att relatera, eller inte relatera, storheterna till varandra. I detta avsnitt jämför vi först de kategorier där storheterna relateras till varandra utifrån tre aspekter som tidigare forskning pekat ut som centrala när det gäller att förstå begreppet förändringstakt. Därefter diskuterar vi de olika frågeställningarna i relation till undervisning och fortsatt lärande.

Hur eleverna relaterat storheterna i förhållande till de tre centrala aspekterna

Kategori 3, *Additiva jämförelser mellan storheter,* är den första kategorin som möjligen involverar samvariation. Vi använder ordet möjligen därför att även om uppgiften, i en lärares ögon, handlar om två samvarierande variabler så vet vi inte om den uppfattas så av eleverna. En förändring i en storhet relateras dock till en förändring i den andra storheten i samtliga lösningar i kategori 3. Även om jämförelsen är additiv, bildar eleverna någon form av mått för respektive påse. Att sådana mått används som skäl för att välja endera påsen bygger på antagandet att måtten verkligen *kan* variera mellan olika påsar. Därför omfattar kategorin den aspekt om variation som tidigare framförts av Confrey och Smith (1994). Trots avsaknaden av en formell förändringstakt bygger lösningarna alltså på att det som istället används (en additiv jämförelse) *i sig själv kan variera*. Denna aspekt finns av samma skäl också representerad i kategori 4 och 5. I kategori 4, *Multiplikativa jämförelser mellan storheter – förhållanden används,* bygger lösningarna på en omskalning så att antingen volym eller tid antas lika för de båda påsarna. En sådan omskalning bygger på föreställningen, eller insikten, att olika förhållanden ger samma resultat. Detta är precis vad Kaput och West (1994) hänvisar till som den aspekt av förändringstakt de kallar homogenitet, det vill säga att olika förhållanden är likvärdiga för en given takt. Ytterligare en aspekt av förändringstakt, att takten är en egen intensiv storhet i sig själv och därmed har en egen (om så sammansatt) enhet, syns dock inte förrän i de lösningar som utgör kategori 5, *Multiplikativa jämförelser mellan kvantiteter – takt används.* I dessa lösningar bildar eleverna en ny storhet för att ange *intensiteten* hos förhållandet (till exempel 0,625 ml/s) som kan flyttas ut ur en specifik situation (en av påsarna) och jämföras med sin motsvarighet i en annan situation (den andra påsen). Här sker alltså själva jämförelsen mellan hur snabbt vätskemängden i påsarna förändras oberoende av specifik vätskemängd och tid, alltså utifrån förändringens intensitet. Som vi ser det svarar en sådan intensiv storhet mot Thompsons (1994) abstraherade konstanta förhållande.

Eleverna löser alltså den jämförande uppgiften på en mängd olika sätt. De enklaste sätten (kategorierna 1 och 2) omfattar inte någon aspekt av förändringstakt medan de mest avancerade sätten (kategori 5) omfattar alla tre aspekterna – variation som en egen storhet (Confrey och Smith), homogenitet (Kaput och West) och den "intensivitet" som ett abstraherat, konstant förhållande (Thompson) innebär. Det har nyligen påpekats att ett samvarierande perspektiv inte är tillräckligt för att nå begreppet takt (Thompson & Carlson, 2017). Vi skulle alltså vilja gå ett steg längre och menar att variation, homogenitet och intensivitet, är centrala aspekter för att kunna använda begreppet. Därför är det endast de lösningar som bildar kategori 5 som kan anses verkligen använda sig av begreppet förändringstakt, se tabell 1.

	Aspekter		
Typ av relation mellan storheterna	Kan variera som en egen storhet (Confrey & Smith, 1994)	Homogenitet (Kaput & West, 1994)	Ett abstraherat konstant förhållande (Thompson, 1994)
Kategori 3 *Additiva jämförelser mellan storheter*	X		
Kategori 4 *Multiplikativa jämförelser, förhållanden används*	X	X	
Kategori 5 *Multiplikativa jämförelser takt används*	X	X	X

Tabell 1. *Elevernas olika sätt att relatera storheterna i den jämförande uppgiften, utifrån tre aspekter som hävdats centrala för förändringstakt.*

Samtidigt har vi i studien sett att det finns elever som löser den jämförande uppgiften på ett korrekt sätt men där lösningen inte omfattar alla tre aspekter av begreppet. Så om vi nu vänder fokus mot betydelsen av uppgifternas olika frågeställningar för undervisning och lärande så menar vi att en korrekt lösning till en jämförande uppgift inte nödvändigtvis behöver vara sprungen ur en djup förståelse för förändringstakt som begrepp. Trots att uppgiften ur ett lärarperspektiv nog kan uppfattas som tydligt inriktad mot att jämföra två förändringstakter ser vi att elever löser den korrekt utan att egentligen använda just begreppet förändringstakt. Detta är något lärare kan använda som en indikation på om eleverna ser förändringstakt som något som kan användas för att kvantifiera intensiteten i förhållandet mellan storheterna.

Det rika utfallsrummet av lösningar visar att en jämförande uppgift också kan användas för att ge läraren annan värdefull information. Det kan röra hur eleverna relaterar storheter till varandra eller vilka aspekter de verkar associera med begreppet förändringstakt. Sådan information kan användas i formativt syfte (Black & Wiliam, 1998) och alltså bidra till att utforma undervisningen så att den bättre svarar mot de aktuella elevernas behov.

Frågeställningarnas användning i undervisning och för lärande

Som Ayalon m.fl. (2015) visat, kan olika frågeställningar i uppgifter om förändringstakt få elever att svara snabbt och oreflekterat eller med mer eftertanke. I vår studie verkar olika frågeställningar också påverka hur eleverna relaterar de samvarierande storheterna. En värderande uppgift kan medföra att elever relaterar storheterna multiplikativt och uttrycker relationen som en takt trots att de tidigare relaterat dem additivt eller inte alls. Därför kan man naturligtvis argumentera för att värderande frågor är att föredra i undervisningen, speciellt då en jämförande fråga kan lösas korrekt utan att eleven egentligen kommer i kontakt med taktbegreppet. Å andra sidan kan den *numeriska* operationen (division) som leder till ett värde på förändringstakten genomföras utan att eleverna tänker sig att något ska kvantifieras, och är alltså inte nödvändigtvis också en *kvantitativ* operation (Thompson, 2011). Elever kan alltså lösa en värderande uppgift numeriskt utan att kvantifiera, eller beräkna intensiteten av, förhållandet mellan storheterna. Men att upptäcka just detta är ett exempel på vad vi menar att lärare kan använda jämförande uppgifter om förändringstakt till. Vi föreslår därför att de båda typerna av uppgifter som diskuteras i denna artikel kompletterar varandra och kan tjäna olika syften i undervisning om förändringstakt.

Förändringar i två samvarierande variabler kan uppfattas som stegvisa (diskreta) eller mjuka (kontinuerliga). Tidigare studier har visat att det senare verkar vara grundläggande för att utveckla förståelse för förändringstakt, gränsvärde, derivering och andra begrepp centrala inom matematisk analys (Castillo-Garsow, Johnson & Moore, 2013). Johnson (2015) menar också att en sådan uppfattning hos elever har ett samband med deras användning av en intensiv storhet för att kvantifiera förändringstakt, och lyfter frågan om hur elever kan uppmuntras att använda intensiva storheter. Resultaten i denna studie indikerar att uppgifter som efterfrågar ett värde möjligen kan påverka elever i denna riktning, och att jämförande uppgifter kan användas av lärare för att upptäcka elevers benägenhet att uttrycka takt som en intensiv storhet.

Förmodligen arbetade eleverna med den jämförande uppgiften innan de arbetade med den värderande. Det är ju dock inget vi känner till, även om vi inte finner något i elevernas lösningar som tyder på motsatsen. Man kan spekulera i vad som hänt om de olika typerna av uppgifter placerats i omvänd ordning; en värderande uppgift först och därefter en jämförande. Det är möjligt att eleverna då i större utsträckning skulle ha använt en intensiv storhet i en jämförande uppgift. Vi menar dock att en omvänd ordning skulle medföra en annan innebörd av uppgifterna. Det skulle alltså kunna vara problematiskt att undersöka hur olika frågeställningar påverkar elevers sätt att relatera storheter om frågeställningarnas ordning varierar.

Tidigare studier har visat på betydelsen av olika kontexter och representationer för elevers uppfattningar av förändringstakt (Herbert & Pierce, 2011; Johnson m.fl., 2017). I denna artikel har vi försökt att beskriva hur också olika frågeställningar kan påverka hur eleverna hanterar begreppet. Resultatet visar på att jämförande och värderande frågeställningar i uppgifter kan användas av lärare för olika syften i undervisningen. Jämförande uppgifter kan användas för att skaffa information om hur eleverna relaterar samvarierande storheter och vilka aspekter av förändringstakt eleverna verkar ha urskiljt och använder. Även om värderande frågor inte är lika informativa, verkar de kunna användas för att sporra elever till att se den multiplikativa jämförelse, eller det förhållande, som begreppet förändringstakt uttrycker intensiteten av. På dessa vis kan studien bidra till att lärares bild av hur eleverna uppfattar taktbegreppet blir mer detaljerad och att lärare ges bättre möjligheter att använda olika typer av frågeställningar på ett medvetet och kraftfullt sätt i undervisningen om förändringstakt.

Referenslista

Adams, R. A. & Essex, C. (2017). *Calculus: A complete course* (9e uppl.), Don Mills: Pearson.

Ayalon, M., Watson, A. & Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 90, nr. 3, ss. 321-339.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappa*, vol. 80, nr. 2, ss. 139-148.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 33, nr. 5, ss. 352-378.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, vol. 33, nr. 3, ss. 31-37.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26, nr. 2/3, ss. 135-164.

Herbert, S. & Pierce, R. (2011). What is rate? Does context or representation matter? *Mathematics Education Research Journal*, vol. 23, nr. 4, ss. 455-477.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behaviour*, vol. 31, nr. 3, ss. 313-330.

Johnson, H. L. (2015). Secondary students' quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 17, nr. 1, ss. 64-90.

Johnson, H. L., McClintock, E. & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: A case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education*, vol. 49, nr. 6, ss. 851-864.

Kaput, J. J. & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. I G. Harel & J. Confrey (Red.), *The* *development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (ss. 235-287). Albany, NY: SUNY Press.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. I F. K. Lester, Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. I G. Harel & J. Confrey (Red.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (ss. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modelling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Red.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education.* WISDOMe Monographs, (vol. 1, ss. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.