# Att introducera likhetstecken i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1

**M Adolfsson Boman, I Eriksson, M Hverven, A Jansson & T Tambour**

*Artikeln bygger på data från forsknings- och utvecklingsprojektet (FoU) "Utveckling av matematiskt tänkande – expanderande uppgifter i nybörjarundervisningen" där lärare från Skärsätra skola tillsammans med forskare från Stockholms universitet genomförde ett undervisningsexperiment i syfte att introducera algebra i nybörjarundervisningen.*

FOU-PROJEKTET HADE SIN UPPRINNELSE i ett tidigare matematikutvecklingsprojekt som genomfördes av en grupp lärare på skolan tillsammans med en av forskarna[1] hösten 2010. I samband med detta utvecklingsprojekt uppstod flera diskussioner om den matematik som eleverna introduceras i under skolans första år. Lärarna beskrev att nybörjarundervisningen i de flesta läromedel bygger på att eleverna introduceras till matematik via konkreta och laborativa uppgifter i huvudsak inom talområdet 1–20[2].

Med en grov klassificering kan matematikundervisningen delas in i en aritmetisk och en algebraisk tradition (van Oers, 2001). I en aritmetisk betonas elevers bemästrande av taluppfattning och matematiska (korrekta) uträkningar. Det finns inom denna tradition en tanke om att eleverna under de första skolåren via konkreta och laborativa aritmetiska uppgifter förankrade i deras vardag kan utveckla en pre-algebraisk förståelse (Schmittau, 2004, 2005; Schmittau & Morris, 2004). I kontrast till den aritmetiskt grundade nybörjarundervisningen som dominerar den svenska matematikundervisningen diskuterade vi några av de idéer som legat till grund för den algebraiskt grundade matematikundervisning som bland andra Vasilii Davydov (2008) tillsammans med lärarna sedan 1960-talet utvecklat vid skola Nr. 91[3] i Moskva.

1. Projektet som genomfördes hösten 2010 leddes på skolan av klasslärare Marianne Adolfsson Boman och som handledare fungerade Inger Eriksson från Stockholms universitet.
2. På skolan arbetade lärarna med läromedlet Mästerkatten.
3. Skola Nr. 91 har ända sedan 1960-talet fungerat som en försöks- och forskningsskola där man bland annat har arbetat med att utveckla undervisningen med utgångspunkt i Vygotskij-traditionen.

Inspirerade av dessa diskussioner och erfarenheterna från det egna utvecklingsarbetet uttryckte lärarna och rektor ett intresse för att förändra nybörjarundervisningen i matematik. Hösten 2012 startade därför ett FoU-projekt för att pröva utformningen av en nybörjarundervisning som skulle ge eleverna möjlighet att utforska innebörden i symboler och matematiska principer innan de börjar arbeta med siffror.

Två övergripande frågor för projektet formulerades:

1. Vilka typer av uppgifter kan, utifrån de centrala idéerna i Davydovs matematiska program, utformas och användas för att introducera elever i årskurs 1 till ett algebraiskt (pre-numeriskt) tänkande?
2. Vad kan ses som tecken på ett framväxande algebraiskt tänkande?

Med utgångspunkt i dessa två forskningsfrågor är syftet för den här artikeln att dels beskriva de uppgifter som utformades och prövades under hösten 2012 och dels att visa på några exempel på indikationer på en framväxande förmåga att föra algebraiska resonemang.

## Projektets förutsättningar och genomförande

Skärsätra skola är en F–5 skola med 325 elever, 17 lärare (10 klasslärare, 1 idrottslärare, 1 musiklärare, 2 slöjdlärare och 1 bildlärare) och två specialpedagoger. Totalt sju av skolans tio klasslärare och de två specialpedagogerna medverkade i projektet under hösten 2012. Skolans rektor har också medverkat om än i begränsad omfattning[4]. Marianne Adolfsson Boman var huvudansvarig lärare på skolan och undervisningsexperimentet genomfördes i hennes årskurs 1 (28 elever).

Planeringsarbetet påbörjades redan under slutet av vårterminen 2012 då lärarna dels läste matematikdidaktiska texter[5], dels genomförde en preliminär planering. Den preliminära planen diskuterades först via mail och senare vid två inledande planeringsmöten i augusti. Flera uppslag kring hur de första introducerande lektionerna skulle utformas diskuterades. De flesta av frågorna som forskningsgruppen[6] diskuterade handlade om hur en nybörjarundervisning som inte börjar med till exempel vardagsnära additionsuppgifter inom talområdet 1–10 kan utformas. De teoretiska

4. För att alla lärare som var intresserade av projektet också skulle ha möjlighet att delta, hade rektor avsatt planeringstid i tjänst motsvarande 2 timmar varannan vecka.

5. Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Nämnaren Tema. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet, Kinard, J. T. Sr. & Kozulin, A. (2010). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund: Studentlitteratur, Kronqvist, K-Å. & Malmer, G. (1993). *Räkna med barn.* Falköping: Ekelunds förlag AB, Neuman, D. (1993). *Räknefärdighetens rötter.* Vällingby: CE Fritzes AB och Skolverket.

6. Forskningsgruppen bestod av de sju lärarna och tre personer från Stockholms universitet. Marianne Adolfsson Boman var lärare i försöksklassen och samtidigt projektets lokala ledare. Projektledare var Inger Eriksson, didaktiker från Stockholms universitet. Mona Hverven, matematikdidaktiker, deltog vid projektstart och vid planeringen av de första uppgifterna som prövades i undervisningen. Anders Jansson, didaktiker, medverkade vid intervjuer av eleverna och i analysarbetet i projektets slutfas. Torbjörn Tambour, matematiker medverkade vid analysen av elevernas lösningar i de filmade intervjuerna.

principer som Davydovs matematiska program bygger på och som skulle guida planeringsarbetet och försöksverksamheten diskuterades återkommande.

Under hösten hölls sammantaget fem möten i FoU-gruppen där i princip samtliga lärare som medverkade i projektet deltog. Vid de två första planeringsmötena utformades i grova drag de tre nyckeluppgifter eleverna skulle möta under terminen (presenteras nedan). Dessa uppgifter utgjorde stommen för undervisningsexperimentet. Under de tre återstående planeringsmötena rapporterade Marianne om hur nyckeluppgifterna fungerade och hur de kunde vidareutvecklas. Gruppen gjorde inte upp några detaljerade lektionsplaneringar utan främst handlade diskussionerna om vilken typ av situationer vi ville skapa för eleverna. Marianne hade sedan detta som grund för hur varje enskild lektion utformades.

Underlag för artikeln utgörs av de fem bandade planeringsmötena, uppföljningssamtal tillsammans med Marianne och de videofilmade gruppintervjuerna med 16 av eleverna samt exempel på elevernas lösningar.

## Davydovs matematiska program

Davydovs matematiska program beskrivs i litteraturen vanligen i relation till den undervisningstradition som kallas *Developmental teaching* (DT) (Davydov, 2008; Schmittau, 2005). Benämningen, som på svenska kan översättas med utvecklande undervisning, betonar att målet för undervisning i första hand är elevers utveckling. En grundtanke är att lärande är en motor för utveckling.

> *The child learns to perform an operation of some kind. At the same time he masters a structural principle whose sphere of applications is wider than that of the operation in which this principle was mastered. Consequently by taking one step in learning the child moves two steps in development, i.e. learning and development are not coincident. (Vygotskij, 1963: 26–27)*

Andra betydelsefulla antaganden som ligger till grund för DT handlar om vad som ses som nödvändiga förutsättningar för lärande. Centralt är att allt lärande på ett eller annat sätt måste förstås i relation till vilka verksamheter eleverna ges tillträde till och vilka redskap han eller hon får tillgång till (Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2010). Att bli kunnig kan således beskrivas som att bli förtrogen med en specifik verksamhet och dess redskap, regler och rutiner. Matematik ingår som redskap i många skilda verksamheter men i skolan utgör matematik en specifik verksamhet (Kinard & Kozulin, 2010). Vygotskij betonar att elever inte utvecklar förståelse för vetenskapliga begrepp på samma sätt som det tillägnar sig vardagliga begrepp (Schmittau, 2004, 2005; Zuckerman, 2005). Innebörden i vardagliga begrepp utvecklas enligt Vygotskij genom deltagande i olika vardagliga sammanhang där begreppen används, medan innebörden i vetenskapliga begrepp inte är lika enkelt tillgängligt om inte eleverna får tillgång till specifika teoretiska verksamheter (Vygotskij, 1963). Detta förutsätter att eleverna får möta uppgifter eller problem som de endast kan lösa genom att använda de vetenskapliga begreppen och symbolerna som redskap. Om eleverna får delta i teoretiska verksamheter kan teoretiska innebörder göras tillgängliga för dem.

Med en sådan utgångspunkt är det möjligt att introducera elever till algebra redan i årskurs 1 (eller tidigare). Det kan till exempel handla om att skapa uppgifter som är så utformade att eleverna upplever ett behov av att använda (bemästra) algebraiska begrepp och symboler som, till exempel a, b, >, <, = (Davydov, 2008; Schmittau, 2005). Eleverna inbjuds till exempel från början till ett utforskande av vad likhet innebär, vad som kan representera likhet och hur likheter kan åstadkommas (Davydov, 2008).

Davydovs argument är att inom en aritmetisk tradition ges eleverna endast tillgång till empirisk abstraktion, vilket innebär att eleverna genom undersökningar och jämförelser erfar ett fenomen eller ett objekts yttre (synbara/påtagliga) aspekter. Genom att arbeta med empirisk abstraktion (som till exempel i en aritmetisk tradition) fortsätter undervisningen utveckla samma typ av konkreta tänkande, kopplat till vardagsbegrepp, som barnen börjat utveckla i lek och andra aktiviteter. Teoretisk abstraktion innebär däremot en strukturell jämförelse som bottnar i en analys av begreppets innehållsliga uppbyggnad och funktion både historiskt och kulturellt.

> *[T]he notion of ”roundness” can be empirically abstracted from a dish, a wheel, and so forth. However, this empirical notion of circularity does not reveal the real objective content, which is the locus of points at a constant distance from a fixed point. (Sriraman, 2008:95)*

I stället för att laborera med aritmetiska uppgifter med syfte att utveckla ett pre-algebraisk tänkande behöver eleverna utveckla ett pre-numeriskt tänkande av algebraisk karaktär (Schmittau & Morris, 2004).

Davydovs matematiska program är inte enbart en fråga om abstrakt eller konkret utan även kopplat till den vygotskianska idén om Learning Activity – lärandeverksamhet (Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2010). I en lärandeverksamhet kan eleverna potentiellt utveckla ett behov och ett motiv för lärande och därmed ett engagerat deltagande i till exempel en matematisk problemlösande aktivitet. Detta betyder dock inte att all undervisning kan beskrivas i termer av lärandeverksamhet. I en lärandeverksamhet sker inte enbart ett återskapande av kunskaper och förmågor som utvecklats i samhället över tid utan eleverna återskapar även

> *”historically formed capacities (reflection, analysis, and thought experiment) that are the basis of theoretical consciousness and thinking”. (Davydov, 2008: 117)*[7]

Detta innebär att det lärande som sker genom deltagande i en lärandeverksamhet bidrar till elevernas kognitiva utveckling och i och med det även deras personlighetsutveckling. För att möjliggöra för att eleverna i undervisningen ska kunna gå in i en lärandeverksamhet krävs att de uppgifter eleverna arbetar med utformas på ett

7. Learning Activity som har sina rötter i Vygotskij-traditionen har olika uttolkningar. I Davydovs uttolkning betonas vikten av elevernas teoretiska utveckling relaterat till samhälleligt utvecklade kunskaper. I andra uttolkningar betonas att man inte kan målsätta elevernas lärande med utgångspunkt i av samhället redan utvecklade kunskaper utan att man istället måste vara öppen för och värdesätta också oväntade mål som uppstår i relation till elevernas behov och motiv (se till exempel Matusov, 2009).

sådant sätt att de möjliggör ett reellt utforskande. Det är dock inte vilket utforskande arbete som helst utan varje uppgift ska vara utformad så att eleverna måste använda nya ännu outforskade teoretiska begrepp, modeller och symboler för att de ska kunna ge olika förslag till lösningar på problemet. Lösningar som sedan kan prövas och utvecklas (Kinard & Kozulin, 2010).

## Tre nyckeluppgifter – tärningar, guldsand, dyrbara oljor och A=B+C

Att utforma uppgifterna för de första introducerande lektionerna var det som var svårast. Det var i relation till planeringen av dessa uppgifter som de teoretiska utgångspunkterna diskuterades mest intensivt. Gruppen hade från början beslutat att starta med uppgifter kring mätning av till exempel längd eller volym så som både Davydov (2008) och Schmittau (2005) har beskrivit. Exempel på sådana uppgifter försätter eleverna i en situation där de till exempel får observera längderna A och B där A > B. I arbetet får eleverna därefter utforska skillnaden mellan A och B för att komma fram till skillnaden C. I det algebraiska arbetet får eleverna sedan pröva att symbolisera detta med ekvationerna A= B+C eller B=A-C eller C=A-B (Schmittau, 2005).

Denna typ av uppgift var forskargruppen enig om skulle ingå i undervisningsexperimentet men frågan som uppstod handlade om hur de allra första lektionerna skulle utformas. Under ett av de tidigaste planeringsmötena berättade Mona Hverven om hur hon i sin undervisning velat introducera likhetstecknet (=) via symbolerna ”större än” (>) och ”mindre än” (<) och då låtit eleverna arbeta med tärningar.

> Ackie: Marianne, tänkte du att man skulle börja då med större än och mindre än?
>
> Marianne: Så som vi lite grann resonerade sist vi träffades, och då sa Mona, att absolut inte lyfta det här likhetstecknet, utan se vad som händer, för att … erfarenheten är ju att det alltid är någon som säger ’Ja men, dom där är ju helt lika’, ’Ja men, vilket tecken ska vi ha då?’
>
> Mona: Så, det var inte ’absolut’ men det här att faktiskt våga vänta in eleverna, för dom kan så himla mycket. Och ofta är man ju snabb och det kan vara liksom, vänta in och se.
>
> Ackie: Nu fattar jag inte riktigt, vad är det man är för snabb på?
>
> Mona: Ja till exempel likhetstecknet så talar man om att det ska vara lika på båda sidor och så är det klart. Alltså, nu drar jag det så … Medan, om man kan jämföra det med tecken som ’inte är lika med’ (≠) och sen låta dom upptäcka, ’Jamen, vad ska vi nu använda för symbol när det är lika?’ ’Hur ser det tecknet ut?’/…/. (Planeringsmöte den 27 augusti 2012)

Sammanfattningsvis organiserades undervisningsexperimentet kring tre olika större uppgifter, så kallade nyckeluppgifter (Eriksson & Lindberg, 2007; Lindberg, 2010). Uppgifter som utformas utifrån några centrala principer och som sedan kan utvecklas vidare utifrån de diskussioner och behov som uppstår i elevgruppen. Den första uppgiften – tärningsuppgiften – hade som syfte att skapa ett behov av ett tecken för att uttrycka likhet. Den andra uppgiften inspirerad av Landet Längesen (Neuman, 1986, 1993) syftade till att eleverna skulle pröva att lösa matematiska problem i en situation där det så att säga ännu inte finns någon matematik. Den tredje uppgiften, som utformades utifrån Davydovs matematiska program, syftade till att introducera eleverna till teoretisk abstraktion där de skulle kunna pröva likheter i algebraisk mening.

### *Två lika – vilket tecken kan beteckna likhet?*

I den första nyckeluppgiften som slutligen utformades introducerade läraren symbolen < i samband med övningar där eleverna skulle slå slag med en tärning och använda symbolen.

> Marianne: Då presenterade jag, precis som Mona föreslog, jag presenterade mindre än tecknet. Och jag presenterade det som hon föreslog. Att man fyller tecknet med små bollar, så det var ingenting som gapade åt nåt håll utan det var en symbol som såg ut så här. Och 'Här i början är det mindre [färre antal] bollar än där' [pekar på <]. 'Det är mindre än'. Så där höll jag på och med uttrycket. Och sedan visade jag att vi skulle slå tärningar och då hade jag gått igenom tärningen att det fanns en etta och en tvåa och en tre och en fyra, en femma och en sexa. Och jag hade ritat två tärningar på tavlan. Och då tog jag fram någon elev som fick kasta tärningen till mej. Och så fick ju ungen kasta två gånger innan jag markerade. För jag ville ju att det skulle bli mindre än, så klart [småskrattar]. Så att barnet kastade två gånger och då blev det en etta och en trea. Och då ritade jag ettan först och så trean. Och så höll vi på så. Om dom hade kastat trean först så skrev jag ju inte det för då hade det varit "större än" och jag ville ju inte att det var jag som skulle presentera det utan jag ville att de skulle upptäcka ett behov av det. Så det enda de fick var förståelsen för, i alla fall en presentation av, tecknet 'mindre än-tecknet' och sen fick dom börja. (Uppföljningssamtal 28 januari 2013)

Tanken med uppgiftens utformning var att förr eller senare skulle någon av eleverna slå två lika och då kunde en diskussion om vilken symbol de kunde använda uppstå.

> Inger: Och då jobbade dom två och två?
>
> Marianne: Två och två. Och dom kastade och var jättenöjda och till slut var det nån som sa att det blev två som var lika. Och då sa jag 'Stopp alla barn!' 'Nu är det nån som har fått två ettor här … är det nån … kan vi ha det här tecknet då, mindre än?'. 'Är ett mindre än ett?' 'Nej, det var det ju inte!' 'Men, vad ska vi ha för tecken då?' 'Känner ni till nåt tecken som man skulle kunna använda?' Och ingen kunde det. 'Nähä, man vad gör vi då?' 'Då slår vi om.' (Uppföljningssamtal 28 januari 2013)

Alla i forskargruppen var övertygade om att eleverna rimligen känner till likhetstecknet både från förskoleklass och från andra sammanhang. Motivet till uppgiften var att gruppen ville att eleverna själva skulle komma på att man kunde använda likhetstecknet för att beteckna två lika. När eleverna efter introduktionen arbetade två och två med uppgiften och slog lika var det dock inte likhetstecknet som var deras lösning.

> Marianne: … då blev samtalet om jo, men nu blev det ju fem på den ena och fem på den andra. Har vi nåt annat tecken för det. Och dom tänkte ju som fasen. Det var ingen som kom med likhetstecknet. Men då var det nån som sa: 'Jo, men då sätter man ihop dom'. Alltså ritar en sån figur [< >]
>
> Inger: Alltså, de satte ihop en 'större än' med en 'mindre än'.
>
> Marianne: Ja, alltså de satte hop ett 'mindre än' och så vände de den. Fast 'större än' kan de inte uttrycka. Men, de tänkte, alltså om man ritar den figuren [<>] så kanske det betyder att det är lika på varje sida. För att det är ju egentligen lika. För det ser ut så där.

> En annan lärare: Det kunde ju vart ett sånt tecken
>
> Flera i gruppen: Ja!
>
> Marianne: Ja! Och då säger jag: 'Men gud så fiffigt'. 'Det kunde ha vart ett sånt tecken.', sa jag. 'Men lika med, det finns faktiskt ett sånt tecken och det ser inte riktigt ut så där'. 'Men är det nån som vet'. Men det var det ingen som visste. (Planeringsmöte den 10 september 2012)

I den första gruppen (14 av 28 elever) var det ingen som hade ett tecken för likhet. I den andra gruppen däremot var det två pojkar som föreslog att man kunde använda ett likhetstecken.

> Och så var det nästa grupp, och då var det två barn som kände till att 'där emellan ska det vara ett likhetstecken' – 'är lika med-tecken'. 'Hur ser det ut?' sa jag och då gick barnet fram och ritade det på tavlan. Och då frågade jag [klassen] 'Är det nån som känner igen det?' och ja det var väl nån då som med viss tvekan. /…/ Och i och med att de här två barnen sen fick presentera det [tecknet] så var det ingen tvekan om … för resten av klassen. /…/ För jag sa 'Kommer ni ihåg när ni slog det här och ni inte kom på nåt tecken?' 'Nu är det två som kan det här tecknet, som har ett tecken som ser ut så här.' Och då var det flera som kände igen det där tecknet. Men dom ägde det liksom inte. (Uppföljningssamtal den 29 januari 2013)

Uppgiften med tärningarna utvecklades vidare för att låta eleverna utforska symbolerna större och mindre än och likhetstecknet. Bland annat utvecklades uppgiften så att eleverna skulle uppleva ett behov av symbolen för ”större än”. I de följande uppgifterna fick eleverna också möjlighet att använda symbolerna för addition och subtraktion eftersom en av eleverna hade lyft att man kan använda ”plustecknet” när man slår två slag.

Vid den första uppgiften, när eleverna slog med tärningar, kunde de lösa uppgiften med hjälp av tecknet för ’mindre än’. Genom att först slå två slag kunde de bestämma vilket slag (vilket tal) som skulle skrivas i vilken ”tärningsruta” för att sedan placera tecknet för ’mindre än’ emellan så att det blev ”rätt”. När de båda slagen blev lika var elevernas första förslag att man slår om. Då kunde man se till att uppgiften blev rätt löst. När läraren inte godkände att man skulle slå om utan istället frågade om de kände till något annat tecken uppstod en situation där eleverna inbjöds till att försöka lösa problemet. Eleverna gav uttryck för att de ville ha ett tecken som visade att det var lika. I båda grupperna kom förslaget att man kunde skriva ’mindre än’ och sedan vända på det tecknet för att visa att det var lika på båda sidor. Det intressanta är att eleverna återuppfinner betydelsen av likhetstecknet utan att ha den konventionella yttre formen för hur man kan teckna likheter. Ställda inför problemet att det behövdes en annan symbol för att kunna uttrycka likhet använde eleverna den symbol de hade blivit presenterade och skapade en ny symbol som de uppfattade uttryckte likhet.

### *Lika eller olika – hur kan man bestämma om det är rättvist eller inte?*

För utformningen av den andra nyckeluppgiften hämtade gruppen inspiration från Dagmar Neumans arbete: *Landet Längesen – matematik för 2000-talet*. Syftet i Neumans arbete är att introducera eleverna till ett aritmetiskt tänkande (1993). I Landet

Längesen finns ingen matematik och inga siffror. Kungen ställs upprepade gånger inför ett problem med att till exempel kunna fördela guldsand eller fina oljor till sina tjänare så att de vet att de har fått lika mycket. I relation till dessa problem måste eleverna utforska om guldsanden i två mycket olika bägare är lika mycket eller om någon av tjänarna har fått mera än den andra. Neumans arbete, men också Davydovs arbete, betonade vikten av att utforma uppgifter som skapar förutsättningar för att eleverna, så att säga, ska kunna återupptäcka principer och strukturer. I uppgiften som vi lånade från Neumans arbete handlade det om att försätta eleverna i en historiskt tänkbar verksamhet. Marianne beskriver hur Neumans idéer användes i undervisningen på följande sätt:

> Marianne: Hur kan det vara att leva i ett land som inte har matematik? Den frågan var svår att förstå för eleverna. Jag fick då samtala om konkreta händelser. Hur gör man om man vill handla något? Hur får man lön för sitt arbete? Under samtalet uttryckte eleverna att 'det skulle vara svårt'. Med det här samtalet ville jag att eleverna skulle reflektera över matematiken och nyttan av den.
>
> 'Första problemet uppstod när två tjänare som utfört ett arbete till kungen fått lön i form av guldsand i olika typer av flaskor. Tjänarna tyckte att de blivit orättvist behandlade'.
>
> En av flickorna vände sig till mig och sa 'det förstår jag!'
>
> Elevernas uppdrag blev då att diskutera hur de skulle kontrollera om kungens skattmästare varit orättvis. Eleverna kom med olika förslag på hur de skulle tömma flaskorna och mäta med något redskap. 'Men de kan ju inte räkna i Landet längesen' sa jag. Gruppen befann sig i fritids kök och på diskbänken stod det en liten mugg. 'Vi kan använda den föreslog någon'. I köksskåpet som stod på glänt fanns flera likadana muggar. 'Hur gör vi nu undrade jag?' 'Vi fyller muggarna med guldsanden föreslog eleverna'. Sen ville eleverna räkna muggarna. 'Men det går inte' sa jag 'Det finns inga siffror i Landet längesen'. Då föreslog en av eleverna att vi kunde jämföra en mugg mot en annan. Jag ritade flaskorna och muggarna på tavlan och frågade om vi kunde sätta ett matematiskt tecken mellan flaskorna och muggarna. I detta exempel var eleverna helt överens om att det skulle vara likhetstecknet. (Mariannes dokumentation, 30 januari 2013)

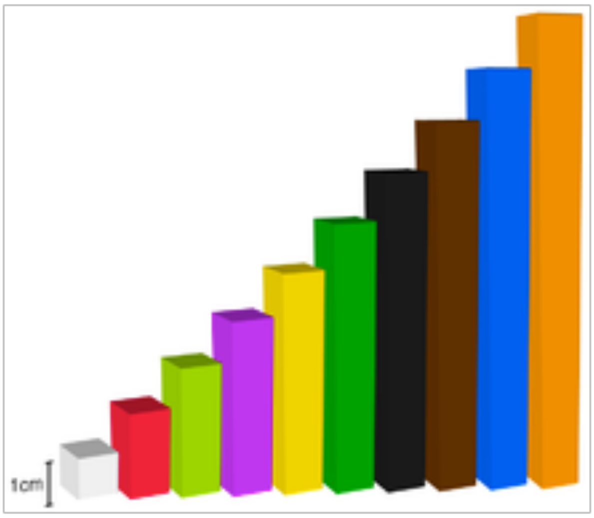
Marianne och eleverna återvände till Landet Längesen två lektionspass till. Vid det andra tillfället hade tjänarna också fått lön i form av guldsand.

### *Algebraiska uttryck – hur kan man göra likheter och hur kan man benämna dem?*

Senare under höstterminen introduceras algebraiska bokstavsuttryck med hjälp av cuisinairestavar, detta utgjorde den tredje nyckeluppgiften. Grunden för planeringen utgjordes av de uppgifter med sträckor som ingår i Davydovs matematiska program. I inledningen av planeringsarbete hade Mona Hverven skickat en länk till en film från 1961 där sexåringar arbetade med vad lärarna uppfattade som avancerade matematiska uppgifter med hjälp av cuisinairestavar[8]. De båda specialpedagogerna var också

8. http://www.youtube.com/watch?v=aeoMcT5WYa8 (hämtat den 13 augusti 2012)

mycket entusiastiska över den potential som ligger i detta material, också rektorn hade positiva erfarenheter av cuisinairestavar[9]. Mot den bakgrunden bestämde sig forskargruppen för att när det var dags att börja arbeta med algebraiska uttryck för att vidare utforska innebörden av likheter och likhetstecknet så kunde detta ske med hjälp av cuisinairestavar. Marianne säger att eleverna fick cuisinairestavarna som ett jämförelsematerial utan att tillskriva de olika stavarna egenskaper i termer av antal.




*Figur 1. Cuisinairestavar http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cuisenaire-Rods-2.png (hämtat 2.2 2013)*

Marianne: Eleverna fick bekanta sig med stavarna och bygga trappor och olika typer av mattor. /…/ … i alla fall så vet jag att Mona hade en idé där för att det inte ska bli så skollikt presenterat så tror jag att … Jag började med att de skulle ta en cuisinairestav. 'Ta inte för kort', sa jag kanske. 'Den behöver inte vara pytteliten' och 'sen ska ni försöka hitta två andra så att dom blir lika långa'. 'Så att det blir lika mellan dom här'. 'Den och dom två andra' [håller upp tänkta stavar]. Och sen fick dom lägga många sådana representationer och då så sa jag 'Men vad ska vi kalla dom, vad kan man ge dom för namn?'. Jag undrar om det var den vägen? Eller om jag presenterade A=B+C? … Så! tror jag att jag gjorde. Så när dom hade gjort dom här jämförelserna så skrev jag A=B+C. Och då sa jag 'om vi skulle ge det ni har lagt framför er namn, vad är det då som är A?'. /…/ Och sen gick jag runt med kameran och bad dom presentera sina … 'Vilken är A utav dina?' 'Det där är A och det där är B och det där är C'. Och så fick dom läsa in i kameran sina uttryck. Jag tror det var så jag började. /…/ Och då sa jag 'Måste man kalla dom …'. Ja just det, det här med bokstäver A och B och C varför skulle vi döpa dom till det. Ja det var ju alfabetet och dom kom i tur och ordning. Det står också i den där [hänvisar till en skrift] att barn gärna vill att det ska vara … 'Men kan man bara, kan man inte ta vad som helst?' Hur

9. Cuisinairestavar beskrivs som "ett relationsmateriel, baserat på de specifika attributen färg och längd. Enheten är 1 x 1 cm. Det består av stavar i tio olika längder och färger där varje längd har sin specifika färg. Detta materiel har i decennier använts runt om i världen för att illustrera grundläggande matematiska begrepp. Stavarna är inte graderade och de kan därför representera tal av diverse slag. De kan bl a användas för att illustrera och träna principerna för de fyra räknesätten, principerna för mätning av olika slag samt bråk. Den minsta [kortaste] staven är 1 cm lång och den största [längsta] är 10 cm lång." Informationen är hämtad från http://www.sli.se 8.4. 2013.

vi nu förde dom här resonemangen. Och så döpte vi om dom, gärna deras eget förnamn. Så Wilfred, han ville ju ha W … [småskratt] Och så läste dom uttrycken och så försökte jag spela in hur dom läste uttrycken. (uppföljningssamtal 28 januari 2013)

## Elevintervjuer

Självfallet är det svårt att ge en tydlig bild av hur elevernas framväxande förmåga att bemästra likhetstecknet i en algebraisk mening utvecklats under pilotprojektet. De exempel vi presenterar i det följande är hämtade från de videobandade intervjuer som gjordes med 16 av de 28 eleverna i Mariannes klass. Intervjuerna genomfördes den 27 november 2012 efter ca tre månaders undervisning (omfattande ca 2 lektionspass á 30 minuter i veckan). Intervjuerna genomfördes i grupper om fyra elever. Tillgängligt för eleverna fanns olika material: små runda brickor, plastade kort med olika tecken på (= > <, + -, tärningssymboler 1–6, och sifferkort 0–9 och cuisinairestavar). Vid en första analys av intervjuerna kan vi se att eleverna uppvisade en stor säkerhet i att hantera symbolen för likhet medvetet och entydigt. Ingen av de intervjuade eleverna talar om likhetstecknet i termer av att något blir. Flertalet av eleverna i klassen uppvisade också en förmåga att hantera likhetstecknet i samband med olika algebraiska uttryck.

En av frågorna i intervjun utgick från ett kort som presenterade uttrycket A=B+C. I anslutning till uttrycket ställdes följande typ av frågor: ”Jag har en annan konstig sak som jag inte riktigt vet hur jag ska förstå och den ser ut så här.” ”Kan man skriva så här?” Genom att analysera hur eleverna tar sig an frågan kan vi urskilja några kvalitativa aspekter av elevernas agerande och resonemang som kan ses som indikationer på en framväxande algebraisk resonemangsförmåga.

### *Att representera A=B+C med cuisinairestavar*

Genast när eleverna i de fyra grupperna får se kortet med uttrycket A=B+C svarar de övertygat att man visst kan skriva sådana uttryck.

Fia: Jaaa [med emfas] det där är … men då måste vi visa med dom här [lutar sig fram och klappar på påsen med cuisinairestavar som ligger på bordet].

[Inger häller ut stavarna på bordet och de fyra eleverna i gruppen börjar ta stavar och lägga framför sig på bordet. En av eleverna, Fia, håller en stav i handen och talar samtidigt för sig själv ’En orange är *lika med*’…]

Fias yttrande indikerar redan i valet av stavarna att frågan handlar om representera uttrycket. De andra eleverna väljer var och en för sig stavar av olika längder och ”lägger” uttrycket A=B+C. De flesta elever väljer med säkerhet en lite längre stav [A] och två kortare men olika långa stavar [B+C] som tillsammans är lika långa som den längre staven. Eleverna lägger stavarna så att de bildar två parallella lika långa stavar.

Elev: En svart är lika med en gul och röd /…./ först kan jag kalla den svarta för A, den gula för B och sen kan jag kalla den gula C.

När eleverna löser uppgiften framgår det tydligt att eleverna kan representera A=B+C med cuisinairestavar med olikartade yttre karakteristika. Olika elever väljer att representera uttrycket A=B+C där A kan representeras av olika stavar och där B och C väljs i relation till den stav de först valt som A. Stavarnas specifika yttre karakteristika såsom färg och längd är alltså inte avgörande för elevernas val utan det är vad en stav är ”lika med” som de fokuserar, att en stav (A) är lika med två olika långa stavar (B+C). Ingen väljer den kortaste staven som A.

Sara: Då kanske jag kallar den här för A [tar en orange stav, håller upp och lägger på bordet framför sig]

Inger: Okay

Sara: Och sen den där för B [håller upp en blå stav med höger handen] och den där för C [tar med vänster hand en vit stav].

Inger: Okay

Sara: Och då är dom ju lika. [Placerar de båda stavarnas ändar dikt ihop och skjuter fram dem så att de ligger parallellt med den orange staven].

Det blir inte alltid rätt. En elev väljer till exempel två lika långa stavar som tillsammans är lika lång som den längre staven. En annan elev lägger en lösning som inte skapar likhet, det vill säga de två kortare stavarna är tillsammans längre än den första staven. Båda eleverna ”läser upp” den lösning de lagt med hjälp av stavarna och teckensymboler utan att upptäcka att det inte stämmer i relation till uttrycket A=B+C.

### *Att uttrycka likhet med matematiska symboler*

Eleverna får en uppföljande fråga om de, förutom genom jämförelse, kan lägga, visa eller skriva uttrycket A=B+C med hjälp av symbolkorten för addition och likhetstecken.

Inger: Kan du lägga ut (uttrycket) med sådana kort emellan? Här finns både plus och minus och allt möjligt …

Fia: Jaa [Letar bland korten med olika matematiska tecken + = > < – ]

[Lägger orange stav, ett kort med likhetstecken samt en mörkgrön stav]

Fia: A är lika med B … Jag behöver ett plustecken [letar bland korten] … men dumma, nu har jag inget. Jo där okay! [Kompletterar uttrycket med plustecken samt liten rosa stav]. Okay

Inger: Kan du Fia läsa din nu då?

Fia: Okay … A=B+C [Pekar samtidigt som hon läser uttrycket i tur och ordning på lång stav likhetstecken, kortare stav, plustecknet samt den minsta staven]

Eleverna placerar ut symbolkorten i relation till stavarna och läser ut den lösning de har lagt.

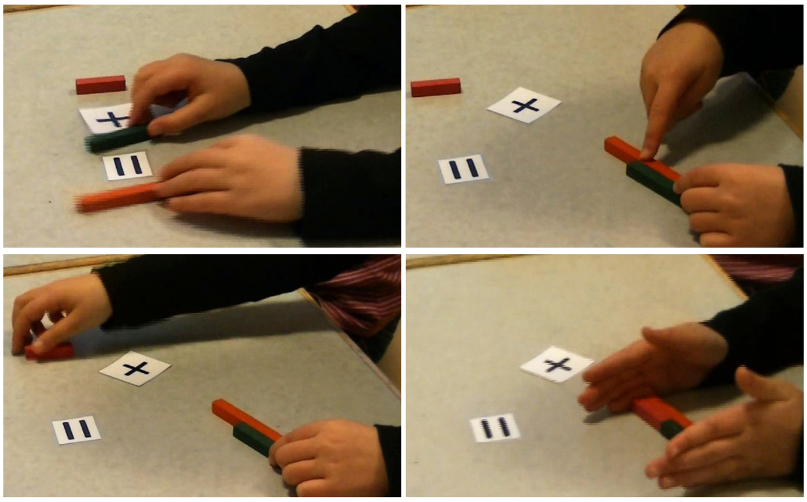
### *Att kontrollera och korrigera likheter*

Att kombinationen av algebraiska uttryck så som A=B+C och cuisinairestavar kan ge möjlighet till kontroll och korrigering har funnits som en dimension redan i tidigare analys ovan. I detta avsnitt pekar vi mer explicit på två aspekter av möjligheter till kontroll av likhet som framträder i elevernas agerande och resonemang. Den första aspekten är att i efterhand kunna kontrollera att det de har lagt med hjälp av stavar och symboler stämmer, att den likhet de lagt stämmer (A=B+C). Den andra aspekten är att kunna korrigera sig själv när det inte stämmer.

Fia har läst uttrycket A=B+C och samtidigt pekat på uttrycket i form av stavar och tecken framför sig. När hon är klar så tar hon tag i stavarna:

> Fia: Och så [tar stav "A" med vänster hand och stav "B" med höger hand (bild 1 nedan), placerar dem parallellt intill varandra] Och det stämmer ju.
>
> Inger: För du kan kontrollera det.
>
> Fia: Det här är ju A [pekar på den orange staven (bild 2)]. Och det här är ju B [pekar]. Och det här är C [tar "C" (bild 3) och placerar dikt mot änden på "B" parallellt med "A"]. Och dom är ju lika långa nu [Sätter därefter händerna på var sin sida av stavarnas ändar – dvs visar att A är lika lång som B+C (bild4)].

En signifikant aspekt i sekvensen är att Fia, på ett strukturerat sätt, visar att hon *i efterhand* kan kontrollera att lösningen stämmer.



*Figur 2. Bild 1–4. Fia visar hur hon kan kontrollera sin lösning.*

Vid några tillfällen lade eleverna uttrycken med cuisinairestavar och likhetstecknen respektive additionstecknet "fel". Men det visade sig i flera fall att de själva kunde korrigera sina lösningar när de såg hur de lagt uttrycket eller när de läste upp uttrycket.

En situation som inrymmer flera självkorrigeringar uppstod när eleverna fick frågan om man kunde lägga ett uttryck som M+N=P. Eleverna hade strax innan lagt uttrycket A=B+C där likhetstecknet låg till vänster i uttrycket medan det i det nya uttrycket låg till höger.

Aron börjar med att matcha likhet mellan en brun stav mot en gul och en kort mörkgrön stav. När Aron ska lägga uttrycket M+N=P med stavar och symboler lägger han först enligt följande mönster: brun stav = ljusgrön stav + gul stav. Han lägger alltså först stavarna efter samma mönster som i det tidigare uttrycket (A=B+C). Bredvid Aron sitter Sara som lagt sina stavar på följande sätt vit + röd = ljusgrön. Inger frågar Sara vad hon lagt. Samtidigt som Sara svarar och Inger frågar vidare ändrar Aron sin lösning. Han skiftar snabbt plats på likhetstecken och additionstecknet – men ändrar inte placeringen av stavarna så lösningen blir nu: brun stav + ljusgrön = gul stav (se bilden nedan).

Inger: [Till Aron] Hur har du lagt? [Aron har fortfarande uppställningen brun + ljusgrön = gul]

Aron: [Pekar på stavar, tecken och säger]. Ää, M är lika med P plus N är lika med. [På bordet ligger: brun stav + ljusgrön = gul stav. Aron pekar på likhetstecknet i lösningen båda gångerna han säger likamed]. Vänta [Nu skiftar Aron plats på den bruna och den gula staven så att lösningen nu blir gul stav + ljusgrön stav = brun stav] Nu [flyttade?] jag stavarna.

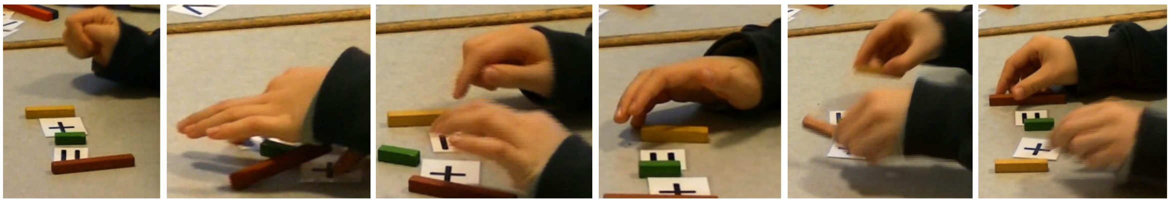
Inger: Okay! En gång till Aron får vi se …

Aron: M plus N är lika med P [gul + ljusgrön = brun]

Inger: Stämmer det?

Aron: Jaaa

Inger: Okay

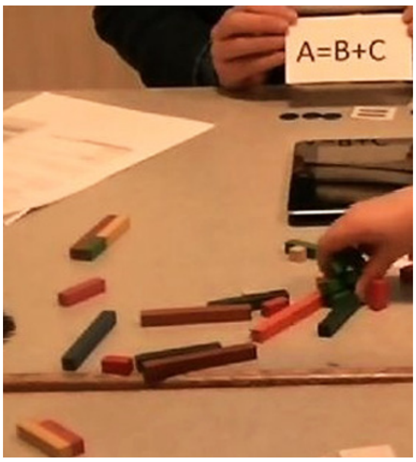


*Figur 3. Bild 1–6. Aron korrigerar sin lösning när han läser upp den och ser att den inte stämmer med det givna uttrycket*

### *Att pröva och utveckla likheter utöver det givna uttycket*

En aspekt av likhet synliggörs när en elev bedömer en annan elevs förslag till lösning som problematisk. I stället för att föreslå hur lösningen skulle kunna korrigeras resonerar eleven om hur det uttryck som efterfrågas skulle kunna byggas ut för att likhet ska åstadkommas.

[Nils, Pelle, Stina och Fia ska visa hur de kan använda cuisinairestavarna för att lägga A=B+C. Fia tar först en lång stav och lägger sen två stavar parallellt med den långa – kollar om/att det blir lika – men verkar inte nöjd. De andra eleverna Nils, Pelle och Stina har under tiden lagt sina kombinationer av stavar.]




*Figur 4. Presentation av uttryck och tillgängligt material. Bilden visar även två lösningsförslag som eleverna lagt.*

Fia: Jag tänker ta någon som ingen annan har tagit. [Plockar flera stavar än de tre stavar som behövs för uppgiften och börjar lägga stavar.]

Nils: Så där kan du ju inte göra, det är bara /…/

Fia: Jaha då måste jag väl göra så här.

Inger: Kan du berätta varför hon inte kan göra så?

Nils: Därför då måste hon ha en till [bokstav] där [pekar till höger om 'C' på kortet som visar A=B+C]. /…/

Fia: Jag vet! Ja nu vet jag.

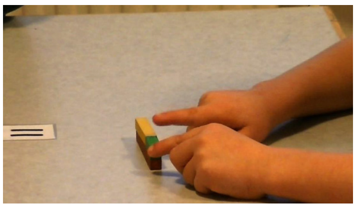

*Figur 5. Nils pekar och förklarar hur det givna uttrycket kan behöva byggas ut för att Fias förslag ska stämma.*

Sammantaget pekar sekvensen på att Fia initialt verkar relativt medveten om hur uttrycket kan lösas: hon började med ”en stav är lika med två stavar”, kommenterar först därefter att hon tänker göra något som ingen annan gjort, genom att använda flera stavar än vad som anges i uttrycket. Nils å sin sida identifierar att Fias kombination av stavar inte stämmer med uttrycket, men han tänker i sin tur vidare kring frågan om att skapa likhet genom att förklara att det algebraiska uttrycket skulle kunna utvidgas med ytterligare ”en till” [bokstav] för att Fias förslag ska stämma, bli lika. Nils agerande och resonemang visar att han är engagerad i problemet med vad som krävs för att skapa likhet.

### *Att uttrycka likhet med siffror och bokstäver*

Vidare i intervjuerna ser vi några lösningar där eleverna beskriver att uttrycket eller likhetsrelationen A=B+C kan uttryckas med andra bokstäver än just A, B och C. Ett exempel på detta ger Igor:

Igor: Man kan använda andra bokstäver. Som den är X och den är Y och den är I. [Samtidigt som Igor kommenterar detta pekar han i tur och ordning på den långa staven X respektive de två kortare stavarna som han nu benämner som Y och I. De båda kortare stavarna lägger han ovanpå 'X' och som tillsammans är lika långa som X].



*Figur 6. Igor visar medan han säger hur hans lösning kan benämnas med olika bokstäver.*

Igor tydliggör att relationen A=B+C i lösningen med en brun stav, en gul och en ljusgrön stav (se bilden ovan) lika gärna skulle kunna uttryckas som X=Y+I.

Under intervjun möter eleverna för första gången frågan om A=B+C kan beskrivas med exempelvis siffror (sifferkorten 0–9 ligger på bordet) eller med tärningssymboler. Eleverna börjar också vid denna fråga genast att lägga uttrycket med olika siffror och i enstaka fall också med tärningssymbolerna.

Inger: Vad har du här

Igor: läser 10=6+4 [lägger en 1 och en 0 för att representera 10]

Inger: och vad är A

Igor: där [pekar på 10]

Inger: är lika med

Igor: [pekar på talen] B+ C

I elevernas lösningar och resonemang kan vi urskilja en framväxande förtrogenhet med att uttrycka likheter på olika sätt och i olika representationer. Eleverna framstår som bekväma med att pröva och representera olika algebraiska uttryck. Även om eleverna inte arbetat med siffror så har de inte några egentliga problem att också exemplifiera olika algebraiska uttryck med siffror. Flera av eleverna kan också argumentera för hur de vet att deras lösningar är korrekta och ibland om det blir något fel så gör de självkorrigeringar.

### *Att uttrycka likheter på nya sätt*

En aspekt av elevernas kunnande som kommer till uttryck under intervjun är att de själva kan skapa nya uttryck utöver de som presenteras på korten. I en av gruppintervjuerna fick eleverna cuisinairestavarna innan de fick se uttrycket (A=B+C). Sun har valt stavar som hon håller i handen och när Inger vänder sig mot Sun säger hon:

Sun: Vad heter det att, A plus A är lika med B. [Håller stavar i handen – visar sig senare vara en röd och två vita]

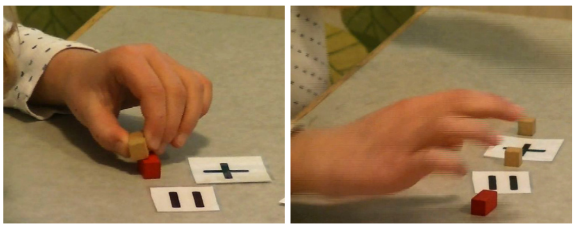
Inger: Kan du lägga det också då om vi har ett plustecken.

Wilfred: [sitter bredvid räcker plustecken till Inger] Här kommer plustecken!

Inger: [ger plustecknet till Sun] Kan du skriva det då?

Sun: [Lägger vit stav och plustecken och vit stav och likhetstecken samt en röd stav simultant med att hon läser uttrycket] A plus A är lika med B! Så!

Inger: Åå



*Figur 7. Bild 1 och 2. Suns lösningsförslag*

Som redan framgått visar denna tentativa analys av de filmade gruppintervjuerna att eleverna iakttar, lyssnar på och kommenterar de olika lösningar som de andra i gruppen gör och resonerar kring. I en del fall följer de med i någon annans arbete och kommenterar, till exempel vad de uppfattar som fel. Ibland blir eleverna inspirerade av någon annans lösning och lägger egna likadana. I de flesta fall lägger eleverna dock egna lösningar utan att titta på vad andra gör. Eleverna i intervjusituationen framstår som självständiga i sitt prövande och resonerande. Vidare framstår det av elevernas olika lösningar under intervjuerna att likheter kan uttryckas på många olika sätt, representerat med olika material.

## Diskussion

Projektet som helhet har inneburit stora organisatoriska utmaningar för att kunna pröva och vidareutveckla de uppgifter gruppen planerat för undervisningsexperimentet i Mariannes klass. Även om Marianne är en rutinerad lärare var dessa nya uppgifter inte självklart enkla att genomföra i en klass med nästan 30 elever i åldern 6–7 år. Uppgifterna i sig krävde en kommunikationsintensiv undervisning. Målet var att så många av elevernas funderingar, försök och resonemang som möjligt skulle kunna tas tillvara i ett kollektivt samtal och i kollektiva aktiviteter samtidigt som arbetet skulle dokumenteras. I relation till dessa utmaningar valde Marianne att dela upp klassen i två eller tre grupper vilket ledde till att antalet lektioner både blev förhållandevis korta, ca 30 minuter per grupp, och rätt få, ca två per vecka för respektive grupp under höstterminen 2012. Det övergripande målet var att utforma uppgifter i vilka likhetstecknet introduceras i ett algebraiskt sammanhang. Davydovs tankegångar och program för matematikundervisning och senare utveckling bildade en inspiration och teoretisk grund i projektet. Hur kan vi då förstå projektet i relation till sådana teoretiska grunder?

I följande avsnitt diskuteras mycket tentativt några frågor kring på vilka sätt uppgifterna, undervisningen och elevernas resonemang kan förstås i förhållande till Davydovs tankegångar om teoretisk abstraktion och teoretiska begrepp. Även Schmittau och Morris (2004) argumentation om att den tidiga undervisningen ska bidra till att utveckla ett pre-numeriskt tänkande av algebraisk karaktär snarare än att eleverna laborerar med aritmetiska uppgifter som syftar till ett pre-algebraiskt tänkande uttrycker det vi ville åstadkomma. Vidare berörs frågan om utvecklande undervisning och lärandeverksamhet. Innan vi går vidare är det givetvis väsentligt att notera att vår diskussion endast syftar till att peka ut områden som är intressanta för fortsatt utveckling, studier och diskussion.

En väsentlig utgångspunkt i principen om teoretisk abstraktion är att teoretiska begrepp och relationerna mellan sådana begrepp ger redskap för att hantera vad som är kärnan i ett kunnande (begrepp/fenomen) bortom olikartade yttre karakteristika. När eleverna i intervjuerna ställs inför att visa och resonera om uppgiften A=B+C i förhållande till cuisinairestavar framgår det tydligt att de kan visa likheter med stavar med sinsemellan olikartade yttre karakteristika som färg och längd – det centrala är likheten A=B+C det vill säga att en stav representerar att A är lika med två andra stavar (B + C) oavsett färg och längd men givet att de tillsammans motsvarar A-staven. Det framgår även att några elever utan svårighet resonerar om och visar att de förstår att man även kan byta ut bokstäverna i uttrycket A=B+C mot andra bokstäver t ex X=Y+I. Således, när eleverna ställs inför att visa och resonera om det algebraiska uttrycket A=B+C med cuisinairestavar kan vi se att en stor andel av dessa elever kan föra resonemang där likhet och likhetstecken är centrala.

Schmittau och Morris (2004) argumenterar, som redan nämnts, för vikten av en tidig undervisning som kan bidra till att utveckla ett pre-numeriskt tänkande av algebraisk karaktär. De uppgifter som konstruerades under pilotprojektet byggde, som framgått av redovisningen, på att eleverna ställdes inför uppgifter med redskap av en pre-numerisk karaktär såsom tärningar, cuisinairestavar och olika symboler. Eller som i uppgiften som hämtade sin inspiration från Neumans Landet Längesen där eleverna försattes i en situation där de var helt utan alla de redskap som är så självklara i vår kultur. Att inte ha tillgång till siffror, mätredskap, pengar och ändå försöka bestämma vad som kan vara lika eller olika skapade också en medvetenhet om vad det är som vi kanske tar förgivet.

### *Likhetstecknet i algebraisk mening uttrycker likhet inte en process*

I ett flertal studier konstateras att många elever har svårigheter att förstå likhetstecknet som en symbol för likheter på ett sätt som kan ses som adekvat för ett algebraiskt tänkande (Kinard & Kozulin, 2010; Powell, 2012). Genom att studera elevers uppfattningar av likhetstecknet framkommer att många elever främst ser likhetstecknet som en symbol för en process – att något blir eller att det är ett tecken som indikerar att det följer ett svar efter. Denna typ av uppfattning beskrivs som dynamiskt operationellt. Ett annat sätt är att se likhetstecknet som en symbol för att det som står på vardera sida om tecknet är ekvivalenta. Detta brukar beskrivas som att likhetstecknet uppfattas statiskt strukturellt (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997). I den ämnesdidaktiska forskningen förs diskussioner om att elever som tidigt främst uppfattar likhetstecknet dynamiskt (som i ett aritmetiskt sammanhang kan ses som funktionellt) får svårigheter att längre fram förstå likheter i algebraisk mening (statiskt). I denna artikel tar vi inte ställning i den diskussionen, istället har vi i vår analys försökt urskilja hur elever uppfattar likhetstecknet då de introducerats till likhetstecknet i en algebraisk mening.

Inledningsvis hade lärarna en föreställning om att eleverna redan från förskoleklassen var bekanta med likhetstecknet som symbol och att den inledande uppgiften med tärningarna främst skulle fungera som en igångsättning och ett sätt att öka medvetenheten om symbolen som sådan. När Marianne rapporterade att det endast var två av de 28 eleverna som kom att tänka på likhetstecknet när de konstaterade att de behövde ett tecken för att symbolisera likhet blev lärarna överraskade. De var också förvånade över att det endast var ett fåtal elever som sa att de kände igen tecknet när det presenterades vid ett uppföljande samtal i helklass. Det finns förstås flera skäl till att eleverna inte, så att säga, hade tillgång till likhetstecknet trots att de med säkerhet ”sett” och ”använt” det tidigare. Ett skäl hänger rimligen samman med att eleverna i uppgiften var uppmanade att använda tecknet för ”mindre än”. Att då välja ett annat tecken från ett annat sammanhang kräver att de skulle kunna ”se” tärningsuppgiften som ett exempel på de uppgifter de jobbat med i förskoleklassen. Sådan transfer vet vi är komplicerad (Säljö, 2000). Ett annat skäl kan kopplas samman med att elever i tidig skolålder vanligen möter likhetstecknet i relation till olika enkla aritmetiska uppgifter av typen 2+3=_. Wernberg (2009) säger att det är problematiskt

> *[O]m eleverna i en undervisningssituation hela tiden möter exempel som varierar både i lösning och hur man tecknar ekvationen, [då] öppnas det inte för dimension av variation av likhetstecknets betydelse. /…/ eleven ges inte möjlighet att urskilja att höger och vänster led är ekvivalent eftersom ingen variabel hålls konstant, allt varierar. Elevens uppmärksamhet är då troligtvis på vilket värde X har. (Wernberg, 2009: 33)*

Wernberg (2009) utgår i sitt resonemang ifrån ett variationsteoretiskt perspektiv. I det perspektivet antas att eleverna främst urskiljer sådana aspekter som varierar. Det som inte varierar antas därmed vara svårare att få syn på. Med hjälp av ett variationsteoretiskt tänkande kan introducerande aritmetiska uppgifter konstrueras med större medvetenhet om att försöka få innebörden av likhetstecknet att framträda. Wernberg exemplifierar detta med följande exempel:

> $2x = 4$
> $3x - 4 = x$
> $4 + x = 3x$
> *Först kanske det ser ut som ekvationerna är olika, men det är samma värde på x i alla tre ekvationerna, det är endast uttryckt på olika sätt. /…/Den mest tydliga skillnaden är mellan andra och tredje ekvationen. En aspekt som här kan urskiljas är likhetstecknet, att höger och vänster led är ekvivalent. (Wernberg, 2009: 32–33)*

Kopplat till diskussionen om empirisk respektive teoretisk abstraktion kan frågan ytterligare nyanseras. Om det är talen i uppgifter (till exempel 2+3=_ eller 2+_=5) som varierar och likhetstecknet är givet (oavsett om det är förtryckt eller om eleverna skriver det) kan det finnas en risk för att eleverna ser till de ”yttre” lätt iakttagbara karakteristika som föreligger i uppgiften – nämligen att de uppfattar att det är en siffra som efterfrågas och att syftet är att finna ”rätt” siffra. I de uppgifter vi arbetat med har vi dels valt att kontrastera likhetstecknet med tecknen för ”mindre än” och ”större än” och dels valt nyckeluppgifter som alla har syftat till att lägga fokus på skapandet av likheter respektive olikheter och hur dessa kan symboliseras med hjälp av vedertagna matematiska symboler. I stället för att fokusera olika siffror eller tal och lösningar har uppgifterna utformats för att skapa förutsättningar för pre-numerisk uppfattning om likheter av algebraisk karaktär (Schmittau & Morris, 2004).

### *Nyckeluppgifter som redskap för lärandeaktiviteter*

Idén om lärandeverksamhet (Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2010) grundas i ett antagande om att elever potentiellt kan utveckla behov och motiv för lärande genom ett engagerat deltagande i exempelvis en matematisk problemlösande aktivitet. Davydovs och även Neumans tankegångar innebär vidare, bland annat, att uppgifter behöver utformas för att ge förutsättningar för att eleverna kan återupptäcka historiskt och kulturellt utvecklade matematiska principer och strukturer.

I projektet utformades en uppgift ”Landet längesen” som försatte eleverna i ett sammanhang som var helt utan alla de matematiska redskap som är självklara i vår kultur. Uppgiften och undervisningen innebar vidare att eleverna ställdes inför levandegjorda problemsituationer, exempelvis att kungens tjänare kände sig orättvist behandlade eftersom de inte fick lika lön och elever uttryckte att 'de kunde förstå' det vill säga föreställa sig situationen. Eleverna hade en möjlighet att ”gå in i” en social situation eller verksamhet med reella behov av att bestämma vad som kan vara lika eller olika (rättvist eller orättvist) *men* utan att ha tillgång till siffror, mätredskap eller pengar. I den gemensamma problemlösningen kom de fram med olika förslag på hur man skulle kunna mäta och jämföra och kom även överens om att likhetstecknet eller tecken för större än eller mindre än kunde användas för att beskriva resultatet.

Eleverna blev påtagligt engagerade i att tänka och resonera kring hur de kunde lösa de problem som invånarna i Landet Längesen ställdes inför och såg även behov av matematiska symboler som likhetstecken. Vi ser detta engagemang i den gemensamma problemlösningen som en indikation på potentialerna i nyckeluppgifterna som innebär att elever upplever behov av kunskaper och redskap som utvecklats kulturellt och historiskt. Ett behov som riktar uppmärksamheten mot det kunskapsinnehåll som lärarna var intresserade av att eleverna skulle utveckla (Kinard & Kozulin, 2010).

En annan aspekt av nyckeluppgifterna är att eleverna ställdes inför situationer som inrymmer aspekter av problemlösning. Att eleverna blir engagerade i prövande och resonerande om lösningen av problem pekar mot möjligheterna i att utforma nyckeluppgifter som kan erbjuda möjligheter till både gemensam och individuell problemlösning.

Arbetet med problemlösning kan även sättas in i ett vidare perspektiv utifrån Davydov. Att undervisningen möjliggör tankeexperiment, reflektioner och analys är aspekter som potentiellt kan bidra till utveckling av teoretiskt tänkande eller medvetenhet (Davydov, 2008:117). Vi ser att elevernas arbete med problemlösning; i ”skapandet” av likhetstecken; i resonemang kring att jämföra och mäta så det blir lika; i prövande och resonerande i relation till algebraiska uttryck, indikerar begynnande utveckling av teoretiskt tänkande eller medvetenhet som är intressant att arbeta vidare med både i utformning av nyckeluppgifter och undervisning. Utifrån sådana nyckeluppgifter skapas också förutsättningar till fördjupade och systematiska studier av elevers lärande och kunskapernas innehåll.

Avslutningsvis vill vi lyfta fram Mariannes tankar och erfarenheter kring värdet av att arbeta fördjupat med problemlösning tillsammans med eleverna på detta sätt.

> … vi har aldrig närmat oss det här sättet att tänka matematik [ohörbart] sen när vi kommer till problemlösning så är det svårt att lösa problem. Så att lärare över lag tycker att dom avsnitten är jättejobbiga för ungarna sitter hela tiden så här [markerar], för dom har ingen vana i att sitta och klura. /…/ Men alltså det är så himla och det är så intressant å se … barn gillar ju sånt som är lite gåtfullt men vi står inte ut med det som lärare. För att det går för långsamt och det är för många händer i luften, lite så där. (Uppföljningssamtal 28 januari 2013)

## Referenser

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Nämnaren Tema. NCM, Göteborgs universitet.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study.* New York: Nova Science Publishers, Inc.

Eriksson, I. & Lindberg, V. (2007). *Matematikundervisningens innehåll. Avrapportering av ett kollaborativt forskningsprojekt om att utveckla redskap och innehåll i arbetet med att realisera "strävansmålen" i matematik*. Lärarhögskolan i Stockholm och Stockholms stad.

Lindberg, V. (2010). Skolans kunskapsinnehåll i ljuset av elevers uppgifter – exemplet matematik. Ingår i I. Eriksson, V. Lindberg & E. Österlind (red.) *Uppdrag undervisning – kunskap och lärande!*. Lund: Studentlitteratur. s. 109–124.

Kinard, J. T. Sr. & Kozulin, A. (2010). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund: Studentlitteratur.

Matusov, E. (2009). *Journey into dialogic pedagogy.* Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.

Neuman, D. (1986). *Räknefärdighetens rötter.* Skolöverstyrelsen. Stockholm: Utbildningsförlag.

Neuman, D. (1993). *Landet Längesen: matte för 2000-talet.* Stockholm: Utbildningsförlag.

Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *Elem. Sch. J. 112*(4) s. 627–648.

Van Oers. B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46* s. 59–85.

Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education XIX*(I) s. 19–43.

Schmittau. J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *ZDM 37*(1) s. 16–22.

Schmittau, J. & Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator 8*(1) s. 60–87.

Sriraman, B. (2008). *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics.* Charlotte, N.C.: IAP-Information Age Pub.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Norstedts.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna.* Doktorsavhandling inom den Nationella forskarskolan i pedagogiskt arbete. Umeå universitet.

Vygotskij, L. (1963/1934). Learning and development at school age. Ingår i B. Simon & J. Simon (red) *Educational psychology in the U.S.S.R.* London: Rutledge & Kegan Paul. s. 21–34.

Zuckerman, G. (2005). *Learning task as a growth point of the search activity.* Moscow: Academia.

## Författarpresentation

***Inger Eriksson*** *är professor i pedagogik med inriktning mot lärande och läroplansteori vid Stockholms universitet.*

***Marianne Adolfsson Boman*** *är låg och mellanstadielärare på Skärsätra skola Lidingö.*

***Anders Jansson*** *är universitetslektor i mediepedgogik vid Stockholms universitet.*

***Mona Hverven*** *är universitetsadjunkt i matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet.*

***Torbjörn Tambour*** *är universitetslektor i matematik och matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet.*