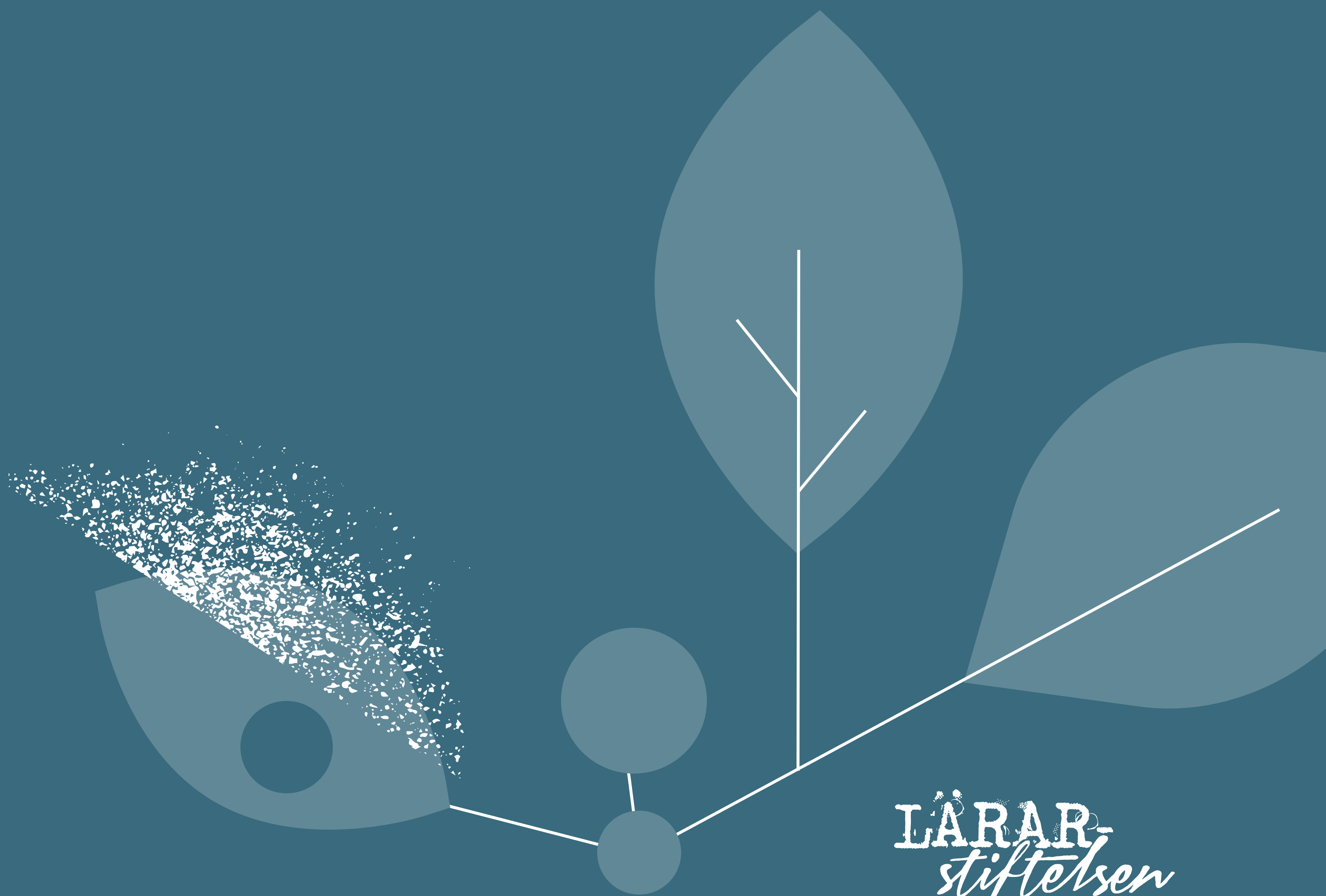
Vol 12, Nr 3, 2024

FORSKUL

FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE



LÄRAR-stiftelsen

Forskning om undervisning och lärande vol. 12, nr 3, 2024

Skriften ges ut av Lärarstiftelsen i samarbete med Sveriges lärares vetenskapskapliga råd och Lärarförlaget.
Grafisk form: Ahead Publishing.
Kontakt med redaktionen sker genom info@forskul.se eller redaktionsekreterare Anna Sandström, anna.sandstrom@forskul.se.
Bidrag till kommande nummer är mycket välkomna! Se författarinstruktioner under Medverka.
Nästa nummer beräknas utkomma i mars 2025.

Forskul indexeras av Directory of Open Access Journals (DOAJ), Norwegian Register for Scientific Journals (Norska listan), finska indexeringen över vetenskapliga tidskrifter (Publikationsforum, Juzo-ID 79722) och Crossref.

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024
ISSN 2001-6131

Innehåll

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 3, 2024, 4–6

Redaktionell kommentar 2024:3

Redaktionell kommentar

Inger Eriksson[1]*

[1] Stockholms universitet

*Korresponderande författare:
Inger Eriksson
red@forskul.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s.4–6
DOI: 10.61998/forskul.v12i3.32086
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-10-14

Som redaktör är det intressant att notera att vi under vissa perioder får in många artiklar inom samma ämnesområde. Exempelvis har vi nu flera artiklar i granskningsprocessen som är relaterade till svenskämnet. Av samma anledning kommer vi detta år att ha publicerat många artiklar inom matematik. Under våra första elva år publicerade vi totalt 14 matematikdidaktiska artiklar. I år har vi i de två första numren publicerat sju, varav fem i temanumret: *Matematikinterventioner i förskola och förskoleklass* (vol. 12, nr 2, 2024). Detta nummer presenterar ytterligare fyra matematikdidaktiska artiklar. Detta innebär att i och med detta nummer finns det 25 matematikdidaktiska artiklar som baseras på studier genomförda i förskolan, förskoleklasser, grundskolan och i olika program i gymnasieskolan. Detta innebär att artiklar som adresserar frågor om barns och elevers matematiklärande har ett dominerande inslag gällande Forskuls ämnesdidaktiska bidrag, en bild som dock kan komma att ändra sig framöver.

I detta nummer presenteras, som nämnts, fyra artiklar där den första är genomförd med de yngsta barnen i förskolan, den andra bygger på en studie i årskurs 2, den tredje i årskurs 5 och den fjärde i årskurs 9. De tre första fokuserar på ett speciellt matematiskt fenomen; tal, cirkel respektive bråk. Den fjärde fokuserar på det matematiska samtalet med elever som har svenska som andraspråk. Även om artiklarna har genomförts med specifika åldersgrupper finns det både metodologiska och innehållsliga aspekter som kan vara av stort värde för lärare som vill utveckla sin undervisning, oavsett ålder på barnen man arbetar med.

Den första artikeln förhandspublicerades 29 augusti, 2024, och har titeln, *Matematikundervisning i förskolan – toddlare urskiljer kardinalitet genom att spela lotto*. Artikeln handlar om hur 1- till 3-åringar, de som i artikeln benämns toddlare, kan lära sig att urskilja kardinalitet som en aspekt av tal. Författarna **Hanna Palmér**, **Camilla Björklund** och **Lena Landgren** skriver att kardinalitet, för de minsta barnen, exempelvis handlar om att förstå att *talet fem* representerar *antalet fem* föremål. Det kan vara lätt för barn att förstå kardinalitet av mängden ett, två och tre, men att de behöver uppfatta kardinalitet av en mängd för att förstå att alla tal har en kardinal betydelse. Artikeln bygger på en studie genomförd på tre förskolor, där forskare och förskollärare har samarbetat för att utveckla ett lottospel som kan hjälpa elever att förstå kardinalitet. Spelet har utvecklats på variationsteoretisk grund och förfinats i en iterativ process. Resultatet utgörs inte enbart av hur ett spel kan utformas utan bidrar även med kunskaper om vilka strategier förskolläraren kan använda i spelet för att främja lärande.

Den andra artikeln, *Lärares möjligheter att främja elevers teoretiska arbete med geometriska begrepp – lärandeverksamhet om cirkel*, är skriven av **Helena Eriksson**, **Jenny Fred**, **Marie Björk** och **Gunilla Pettersson Berggren**. I artikeln argumenterar de för att elever behöver erbjudas en undervisning tidigt i grundskolan där de får utforska cirkelns konstruktion och de begrepp som behövs för en sådan konstruktion. Författarna har i detta småskaliga forskningsprojekt, bestående av tre forskningslektioner med elever i årskurs 2, använt sig av lärandeverksamhet både för att designa uppgifterna och för undervisningens genomförande. Med utgångspunkt i att en lärandeverksamhet uppstår endast om eleverna deltar och engagerat försöker lösa ett visst problem, är lärarens verbala och icke-verbala kommunikativa handlingar också viktiga. Läraren kan exempelvis provocera eller ifrågasätta olika förslag – allt för att hjälpa eleverna till en fördjupad kollektiv reflektion.

Undervisning som utvecklar elevers förmåga att förstå likvärdiga bråk heter den tredje artikeln. Den är skriven av **Cecilia Sveider**, **Anja Thorsten** och **Joakim Samuelsson** och bygger på en learning study med tre grupper av elever i årskurs 5 där lärandeobjektet innehållsligt fokuserade på likvärdiga bråk. I artikeln presenteras resultat från både observationer genomförda under de tre forskningslektionerna och från de för- och eftertest som gav indikationer om vad eleverna kunde före och efter forskningslektionen. I denna learning study använde författarna variationsteori för att designa lektionerna. Författarna argumenterar för att eleverna hade bättre kunskaper om likvärdiga bråk efter varje lektion, och särskilt noterbart efter den tredje. Det som framstår som särskilt avgörande för elevernas lärande var lärarens användning av kontraster och tallinjen.

Den fjärde och sista artikeln i detta nummer är författad av **Eva Norén**, **Charlotte Ahlström** och **Anne-Lie Hellström** och har titeln *Det matematiska samtalets utmaningar – andraspråkselever samtalar för att lösa matematiska problem i en bedömningssituation*. Artikeln tar fasta på att det, i det nationella provet i matematik för årskurs 9, ingår en muntlig del där elever förväntas resonera sig fram till en lösning på ett givet problem. Denna typ av provsituation kan vara extra utmanande för elever som har svenska som andraspråk. Författarna ställde sig frågor om vilka språkliga strategier eleverna använder sig av och hur de lyssnar på varandra, men också hur de bygger vidare på varandras idéer. De var också intresserade av vad som kan underlätta och vad som kan hindra eleverna att i samtalet komma fram till en lösning. I artikeln konstaterar författarna att de elever som inte bemästrar svenska kan ha svårt att visa sina matematiska kunskaper i en bedömningssituation. Utifrån resultatet argumenterar författarna för att elever behöver få träna på att använda språkliga strategier som möjliggör för dem att fördjupa samtalet, exempelvis med framåtriktade frågor. Denna artikel förhandspublicerades den 27 maj, 2024.

I och med detta nummer har jag skrivit mitt sista redaktörsord och efter fem år lämnar jag nu över stafettpinnen till Angelika Kullberg. Hon är är professor i ämnesdidaktik med inriktning mot matematik vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession på Göteborgs universitet. Hennes forskningsintresse handlar främst om relationen mellan undervisning och elevers lärande. Angelikas långa erfarenhet av undervisningsutvecklande forskning kommer att hjälpa till att bidra till Forskuls fortsatta utveckling.

Under dessa fem år har Forskul säkerställt sin position som en rankad vetenskaplig tidskrift, där allt fler lärare, forskare och det som kanske ska benämnas som forskande lärare har upptäckt oss. I detta arbete har Lärarstiftelsen med den tidigare ansvarige utgivaren Ann-Charlotte Eriksson och den nuvarande Malin Tufvessons positiva inställning till att få Forskul att bli en del av Kungliga bibliotekets plattform Publicera varit avgörande. I detta arbete har vår ”ständige” redaktionssekreterare Anna Sandström varit en klippa och en idog och klok kraft. Även redaktionsrådet och personerna bakom Publicera har bidragit till att vi nu har säkerställt tidskriftens kvalitet, så väl nationellt som internationellt.

I och med detta tänker jag att Angelika framöver kan lägga ner sin expertis och sin klokskap på att vidareutveckla Forskul i vårt långsiktiga, och ibland mödosamma, arbete i att skapa en förståelse för, och kunskap om, den typ av forskning som vi vill vara en kanal för. Att öka vår allas medvetenhet om vikten av undervisningsutvecklande forskning med och för lärare (alla sorter och i alla skolformer) för att på detta sätt vidga och fördjupa den kunskapsbas som en skola på vetenskaplig grund så väl behöver.

Samtidigt med detta vill jag för min och Forskuls räkning tacka alla granskare som så förtjänstfullt gör det grundläggande arbete som krävs för att Forskul ska kunna vara en vetenskaplig, och för skolans utveckling viktig, tidskrift.

De granskare som har bidragit med sitt arbete under 2023, och som har givit sitt samtycke till att presenteras, är: Karin Alnervik, Pernilla Andersson-Varga, Maria Andrée, Erik Backman, Camilla Björklund, Svanhild Breive, Ingrid Carlgren, Susanne Duek, Andreas Eckert, Erlend Eidsvik, Helena Eriksson, Liv Gjems, Camilla Gåfvels, Yvonne Hallesson, Åsa Hirsh, Claire Hogart, Nina Kilbrink, Jørgen Klein, Angelika Kullberg, Karin Lager, Håkan Larsson, Caroline Liberg, Viveca Lindberg, Bengt-Göran Martinsson, Lisa Mohlin, Malin Norberg, Andreas Nord, Anna Nordenstam, Karolina Muhrman, Anna Palmer, Hanna Palmér, Petra Anna Petersen, Astrid Pettersson, Paola Valero, Pia Raattamaa Visén, Karin Redelius, Ulla Runesson Kempe, Ann-Sofi Röj-Lindberg, Catharina Schmidt, Anette Svensson, Anna-Ida Säfström, Mats Tegmark, Torbjörn Tambour, Susanne Thulin, Anita Varga, Anna Wernberg och P-O Wickman.

Inger Eriksson

Inger Eriksson är redaktör för Forskning om undervisning och lärande. Hon är professor i pedagogik vid Stockholms universitet och tidigare en av de vetenskapliga ledarna vid Stockholm Teaching and Learning Studies, STLS. Idag är hon även ansvarig för uppbyggnaden av samverkansplattformen Örebro-ULF, praktikutvecklande forskning vid Örebro universitet.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

Matematikundervisning i förskolan – toddlare urskiljer kardinalitet genom att spela lotto

Orginalartikel

Hanna Palmér[1]*, Camilla Björklund[2] & Lena Landgren

Sammanfattning

Denna artikel tar utgångspunkt i ett kombinerat forsknings- och utvecklingsprojekt som har bedrivits i samarbete mellan två forskare och tre förskollärare. Fokus i artikeln är hur ett lottospel, designat utifrån variationsteoretiska principer, kan göra det möjligt för toddlare (1–3 år) att urskilja kardinalitet som en grundläggande aspekt av tal. Utifrån analys av 195 videoinspelningar, där toddlare spelar lottospelet tillsammans med sin förskollärare, synliggörs dels hur de teoretiska utgångspunkterna för spelet realiseras i praktiken, dels vad matematikundervisning med förskolans yngsta kan innebära. Resultatet visar att lottospelets design möjliggör, men inte garanterar, att kardinalitet urskiljs av barnen. I vilken utsträckning kardinalitet urskiljs av barnen kan relateras till hur förskollärarna använder representationer och gester. Artikeln visar därmed på förskollärarens viktiga roll i tidig matematikundervisning.

Nyckelord: matematik, toddlare, kardinalitet, spela spel

Abstract

This article is based on a combined research and development project, conducted in collaboration between two researchers and three preschool teachers. The focus of the article is on how a lottery game, designed on variation theory informed principles, can enable toddlers (1- to 3-year-olds) to discern cardinality as a fundamental aspect of numbers. Based on the analysis of 195 video recordings, where toddlers play the lottery game together with their preschool teacher, the results visualize how the theoretical principles for the game are realized and what mathematics education with toddlers may imply. The results show that the design of the lottery game enables, but cannot guarantee, that cardinality is discerned by the children. The extent to which cardinality is discerned by the children can be related to how the preschool teachers use representations and gestures. The article thus shows the important role of the preschool teacher in early mathematics education.

Keywords: Mathematics, Toddlers, Cardinality, Game

1 Linnéuniversitetet

2 Göteborgs universitet

*Korresponderande författare:
Hanna Palmér
hanna.palmer@lnu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s. 7–21
DOI: 10.61998/forskul.v12i3.26662
ISSN:2001-6131

Förhandspublicerad: 2024-08-29
Publicerad: 2024-10-14

Introduktion

Enligt förskolans läroplan ska det ingå undervisning i utbildningen och denna undervisning ska vila på vetenskaplig grund (Skolverket, 2018). Gällande vetenskaplig grund i förskolans utbildning finns en stor mängd forskning om yngre barn och matematik generellt och inom området tidig taluppfattning specifikt (se Pitta-Pantazi m.fl., 2014). Denna forskning visar att även yngre barn kan utveckla förståelse för olika innehållsområden inom matematik (English & Mulligan, 2013; McMullen m.fl., 2019; Vogt m.fl., 2018), och flera studier visar att denna tidiga förståelse inte enbart är viktig för barnen där och då, utan även har positiva effekter på senare skolprestationer. Dessa positiva effekter gäller inte enbart matematik utan även andra ämnesområden som naturvetenskap och läsning (Duncan m.fl., 2007; Perry & Dockett, 2008).

Trots den stora mängd forskning om yngre barn och tidig taluppfattning är det dock ytterst få av dessa studier som inkluderar forskning om undervisning, det vill säga forskning om *hur* förskolans undervisning kan eller bör utformas eller hur barn genom undervisning kan ges möjlighet att lära om tal och utveckla aritmetikfärdigheter. En utvärdering av Skolinspektionen (2017) visar vidare att matematikundervisningen i en majoritet av svenska förskolor behöver vidareutvecklas eftersom många förskollärare är osäkra på hur de kan undervisa i matematik. Denna osäkerhet leder, enligt Skolinspektionen, till att situationer i förskolan som skulle kunna stödja barns lärande, av till exempel tal och tidig aritmetik, ofta missas. Samtidigt som det finns vetenskaplig grund för vikten av att barn tidigt utvecklar förståelse för tal och aritmetik, finns det alltså både inom forskning och i förskolans praktik begränsade vetenskapligt grundade kunskaper om *hur* matematikundervisning med de yngsta barnen kan genomföras i förskolan. Det finns dock forskning som visar att vi inte kan ta för givet att barn uppmärksammar tal och aritmetik i omgivningen, tvärt om visar studier (t.ex. Hannula m.fl., 2005, 2007) att barn kan delta i situationer som, ur vuxnas perspektiv, innehåller tal och aritmetik utan att detta uppmärksammas av barnen. Hur barn genom undervisning kan uppmärksammas på tal och aritmetik i sin omgivning är därför av relevans att studera.

Eftersom undervisningsbegreppet av tradition inte har använts i förskolan i samma omfattning som i skolan är det dock inte självklart hur undervisning ska förstås i förhållande till förskolans verksamhet. I tidigare studier (Björklund & Palmér, 2019, 2024) har relationen mellan matematikundervisning och lek i förskolan problematiserats. Studierna visar att det är möjligt att i lek undervisa ett innehåll som bidrar till att leken utvecklas genom att barnen erbjuds nya erfarenheter och färdigheter inom lekens ramar. När undervisning gör möjligt för barn att utveckla för leken nödvändiga kunskaper kan detta driva leken framåt. Det kräver dock att interaktionen mellan förskollärare och barn samtidigt är riktad både mot målet för leken och mot hur barnet förstår det för leken nödvändiga innehållet. Ofta blir dock den matematik som undervisas inte nödvändig för en lek eller aktivitet, utan i stället påklistrad, vilket i värsta fall kan leda till att barn får en felaktig bild av matematik som något som inte har med deras livsvärld och intressen att göra.

Denna artikel tar utgångspunkt i ett kombinerat forsknings- och utvecklingsprojekt som har bedrivits i nära samarbete mellan två forskare och tre förskollärare som arbetar på tre olika förskolor. Syftet med projektet har varit att utveckla förskoledidaktik med fokus på tal- och tidig aritmetikförståelse. Matematikinnehållet i studien utgår ifrån förskolans läroplan i vilken antal, kvantiteter och ordning lyfts fram som exempel på matematiskt innehåll som förskolan ska ge varje barn förutsättningar att utveckla förståelse för (Skolverket, 2018).

En del av det kombinerade forsknings- och utvecklingsprojektet som utgör utgångspunkt för denna artikel har fokuserat hur redan pågående aktiviteter i förskolan kan utvecklas till matematikundervisning där toddlare (1–3 år) ges möjlighet att utveckla förståelse för tal. Då tidigare studier (bl.a. Breive m.fl., 2018) har visat på begränsningar vid implementering av undervisning utvecklad enbart av forskare, gjorde forskarna inledningsvis observationer av förskolornas pågående verksamhet. Observationerna gav information om aktiviteter som toddlarna ägnade sig åt spontant, samt på vilka sätt de engagerade sig i de av förskollärarna planerade aktiviteter. Dessa observationer visade att olika typer av lottospel var en aktivitet som toddlarna ofta deltog i varför ett lottospel designades utifrån variationsteoretiska utgångspunkter (se avsnitt Teoretisk grund för lottospelet) och tidigare forskning. Dessa utgångspunkter borde teoretiskt göra det möjligt för barnen att urskilja tals kardinalitet genom spelet. Lottospelet prövades och utvärderades empiriskt i tre förskolor i en iterativ och kollaborativ process under tre terminer. 195 videoinspelningar där toddlare spelar lottospelet tillsammans med förskollärare ligger i denna artikel till grund för analys av förskollärarnas strategier för att hjälpa barnen att urskilja kardinalitet som en för leken nödvändig kunskap för att framgångsrikt spela spelet. Syftet är att fördjupa förståelsen för hur undervisning vid spelande av lottospelet kan bidra till att toddlares förmåga att urskilja kardinalitet. Följande frågor fokuseras specifikt på:

1. Vilka strategier använder förskollärarna för att hjälpa barnen att urskilja kardinalitet när de spelar lottospelet?

2. Hur möjliggör dessa strategier att barnen kan urskilja olika aspekter av kardinalitet?

Tidigare forskning

I detta avsnitt presenteras inledningsvis tidigare forskning om lek och undervisning i förskolan följt av ett avsnitt med fokus på kardinalitet, representationer och gester.

Lek och matematikundervisning i förskolan

Det finns ingen samstämmighet i hur lek bör definieras (Pramling m.fl., 2019) och liknande osäkerhet råder även kring definition av undervisning i förskolan (Sheridan & Williams, 2019). En följd av dessa oklarheter är att även sambandet mellan lek och undervisning blir oklart. Trots att lek och undervisning ibland skrivs fram som olika verksamheter (se t.ex. Sundsdal & Øksnes, 2015) finns det dock många likheter och gemensamma drag som ger anledning till att närmare studera hur lek och undervisning kan ses som kompletterande eller till och med sammanflätade verksamheter (Pramling m.fl., 2019).

En gemensam aspekt för lek och undervisning är att de båda inbegriper ramar och regler. I undervisningssammanhang är det oftast den vuxna, förskolläraren, som har mandat att sätta upp ramar och regler för vad som ska göras och vad som får göras. I lek är det vanligen lekdeltagarna själva som sätter ramar och regler för vad man kan och får göra. Ramarna och reglerna är dock i ständig omförhandling och driver på så sätt leken framåt. En annan gemensam aspekt för lek och undervisning är att båda alltid har en riktning. Lekens riktning beskrivs dock vanligen som öppen att ta oförutsägbara vägar, samtidigt som lek alltid har ett syfte och en strävan mot något mål ”vi leker affär där du är försäljare och det kommer en tjuv”. Undervisningens riktning har dock ett tydligare mål gällande ett innehåll som någon förväntas utveckla sitt kunnande om (Pramling Samuelsson & Pramling, 2013).

När lek och undervisning vävs samman, kan det utifrån ovanstående resonemang uppstå ett spänningsfält mellan lekens frihet och omförhandlingsbara ramar och mål, och undervisningens innehållsorienterade ramar och mål (Björklund & Palmér, 2019). Leken som fokuseras på i denna artikel är spelandet av ett lottospel. I spelet är det inte lekdeltagarna som sätter ramar och regler för vad som ska eller får göras utan ramar och regler tillhör spelet som sådant (även om de givetvis kan omförhandlas av dem som spelar). Vidare är riktningen å ena sidan bestämd, avseende spelets mål, men å andra sidan kan vägen till detta mål se olika ut där den vuxne är deltagare i spelet på samma villkor som barnen. På så vis kan spelande av spel förstås som en aktivitet där gränserna mellan lek och undervisning i stor utsträckning suddas ut. Synen på den vuxnes roll som en medspelare i leken är i linje med van Oers (2010) som beskriver lek som aktiviteter där både barn och vuxna är fria att utforska olika innehåll och initiera olika riktningar för leken. Den vuxne är då en deltagare i leken på lika villkor som barnen, samtidigt har denne också ansvar för att lärande i leken görs möjligt, bland annat genom att ställa relevanta riktade frågor eller erbjuda material, miljöer och problem att lösa inom lekens ramar.

Kardinalitet, representationer och gester

Den kanske mest vanliga frågan av matematisk karaktär som barn i förskoleåldern möter är ”kan du räkna hur många?”. Det som frågas efter är ett exakt antal element i en given mängd (Gelman & Gallistel, 1978). Kardinalitet, i betydelsen exakt antal element i en given mängd, har under lång tid varit av stort intresse inom forskning om matematiklärande. Att uppfatta att räkneord kan betyda ett exakt antal och att två mängder kan bestå av samma eller olika ”månghet” är inte en förståelse som barn föds med. I stället utvecklar barn vanligtvis den förståelsen under sina första fyra levnadsår och därefter fortsätter förståelsen för tal att utvecklas och nyanseras som en del av den viktiga taluppfattningen som aritmetik- och även andra matematikfärdigheter bygger på (Fuson, 1992). Givetvis varierar kunskaperna om tal mellan barn (Björklund m.fl., 2022). Man har dock i jämförande studier sett att barn generellt utvecklar förståelse för kardinalitet i tre till fyraårsåldern, oberoende av var i världen de växer upp (Sarnecka m.fl., 2017) men med viss skillnad beroende på hur olika språk gör skillnad på ord i singular och plural (Sarnecka m.fl., 2007; Wynn, 1990, 1992). I svenska görs till exempel skillnad mellan en hund och två hundar, men är det tre eller flera har hundarna samma pluraländelse som två. Studier har dokumenterat att barn successivt uppfattar kardinalitet för mängden ett, följt av mängden två och därefter tre, men att när barnen uppfattar kardinalitet av mängden fyra generaliseras vanligtvis förståelsen så att alla tal får en kardinal betydelse (Bloom & Wynn, 1997; Sarnecka & Carey, 2008).

När ett barn får frågan ”hur många” förväntas de svara med ett räkneord, eller genom att visa ett antal fingrar som betyder det totala antalet i den givna mängden. För att komma fram till svaret på frågan ”hur många” är ett, för barn, vanligt tillvägagångssätt att räkna upp ett räkneord för varje föremål och samtidigt peka på ett föremål i taget för att på så vis hålla ordning på vilka föremål som räknats. Detta tas ofta som ett uttryck för att barn uppmärksammar hur kvantiteter och räkneord på något sätt hör ihop. Att använda sig av räkneord där kardinalitet är den framträdande innebörden förutsätter därutöver kunskap om hur räkneord eller andra representationer kan användas för att kommunicera detta samband. Eftersom tal inte är objekt i fysisk mening (man kan inte ”ta” på ett tal utan tal är en egenskap hos en mängd objekt) är innebörden endast tillgänglig genom någon form av representation. Med representation avses tecken, verbala uttryck eller objekt som står för (representerar) något annat än sig självt (Goldin & Shteingold, 2001). Dessa representationer kan vara perceptuellt lika men matematiskt olika (till exempel två respektive tre prickar), eller perceptuellt olika men matematiskt lika (till exempel tre prickar och tre fingrar). I många situationer som barn möter förekommer det åtminstone två representationer som används mer eller mindre medvetet (Duval, 2006). Representationer som ofta framhålls i matematikdidaktisk forskning är verbala och skrivna symboler, bilder, verkliga situationer samt modeller (Lesh, 1981). Samtidigt som representationer hänvisar till en viss betydelse är dessa tillgängliga för tolkningar, manipulationer och diskussion endast genom representationerna (Goldin, 2014).

Forskning om representationer bedrivs inom flera olika fält och, även om de teoretiska grunderna för forskningen skiljer sig åt, delas slutsatsen att matematiklärande involverar och stärks av förmågan att göra kopplingar och se samband inom och mellan representationer (se Duval 2006; Goldin, 2014; Lesh 1987). Sådana kopplingar och samband urskiljs dock inte automatiskt av barn utan behöver pekas ut, till exempel i undervisning (Björklund m.fl., 2021). Genom att i undervisning erbjuda olika representationer kan barn erfara hur samma innehåll kan representeras på olika sätt och hur växlingar inom och mellan olika representationer kan göras utan att själva innebörden för det som representeras förändras. En nyligen genomförd studie om hur representationer möjliggör lärande av matematik för toddlare, i samband med bokläsning, visade att variation inom en representation (till exempel variation av fingermönster) möjliggjorde för barnen att urskilja antal i större utsträckning än variation mellan representationer (till exempel fingermönster och verbala symboler) (Björklund & Palmér, 2022). Det finns också belägg för att barn som använder fler representationsformer (även om de inte används på korrekt sätt) i högre utsträckning och tidigare utvecklar förståelse för kardinalitet än barn som använder en representation mer ensidigt (Gibson m.fl., 2019).

Vidare används ofta gester tillsammans med representationer vilket har visats främja matematiklärande för yngre barn (Ping & Goldin-Meadow, 2008; Robutti, 2014; Valenzeno m.fl., 2003;). Det finns olika typer av gester som kan användas för olika ändamål där pekande gester syftar till att rikta uppmärksamheten mot ett specifikt objekt, representativa gester syftar till att synliggöra mening bokstavligt eller metaforiskt (till exempel att göra en inramande cirkulär rörelse med handen för att synliggöra en gruppering av föremål), samt motoriska och rytmiska gester som att räkna högt och peka på de räknade föremålen i en en-till-en-korrespondens (McNeill, 2005). Gester har på så sätt visat sig vara en resurs för att stödja kopplingar från en representation till en annan (Radford, 2003).

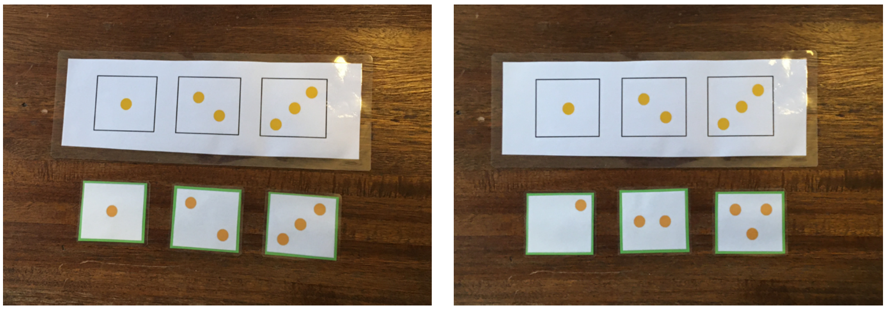
Teoretisk grund för lottospelet

Lottospelet utvecklades utifrån variationsteoretisk (VT, se Marton, 2015) grund i syfte att möjliggöra de bästa förutsättningarna för toddlarna att i spelet urskilja kardinalitet som en aspekt av tal. VT riktar uppmärksamheten mot hur en individ uppfattar innebörden av ett fenomen. I varje situation kan flera aspekter av ett fenomen urskiljas, och de som urskiljs är avgörande för hur fenomenet i fråga uppfattas. Barn som hör räkneord användas i ett visst sammanhang kan därför uppfatta och använda räkneord på distinkt skilda sätt; vissa barn uppfattar tals kardinalitet och tolkar då räkneord som att de beskriver en samlad helhet av delar, medan ett annat barn uppfattar räkneord som ord i en bestämd ordning men saknar kardinal innebörd. Det som gör att barnen uppfattar och använder räkneord på olika sätt är då, enligt en variationsteoretisk förklaring, att det första barnet har urskilt aspekten kardinalitet men inte det andra barnet (se även Björklund m.fl., 2021). Enligt VT innebär lärande att en individ urskiljer nya och nödvändiga aspekter av ett fenomen och teorin erbjuder strategier för hur en aktivitet (undervisning) kan utformas för att rikta barns uppmärksamhet mot aspekter för dem att urskilja. Denna riktning kan möjliggöras genom mönster av variation och invarians där enbart de aspekter man önskar att barnet ska urskilja varieras gentemot en invariant ”bakgrund”. Det innebär till exempel att kardinalitet är mer sannolikt att urskiljas om en samling föremål jämförs med en annan samling föremål som förutom skillnad i antal föremål i övrigt är identiska och inte varierar till exempel avseende färg eller storlek. Om flera olika aspekter varierar (antal, färg, storlek) är det svårt för barn (och vuxna) att urskilja de, för situationen relevanta, aspekterna. Till exempel om såväl färg, form som antal varierar uppmärksammar barn oftare färger och former än numeriska aspekter när de spelar memory (Chan & Mazzocco, 2017).

Genom att använda mönster av variation och invarians i utformning av undervisning kan barns möjligheter att urskilja nödvändiga aspekter av antal främjas. En pedagogisk utmaning är dock att implementera sådana principer i aktiviteter där det matematiska innehållet är meningsfullt både för barnen och aktiviteten i fråga. Denna pedagogiska utmaning antogs i utvecklingen av lottospelet.

Ett lottospel betyder ett spel med en spelplan och spelkort där par ska hittas utifrån likheter mellan spelplanen och spelkorten. Dessa likheter kan till exempel bestå av likheter i färger eller bilder. I studien utvecklades ett lottospel som beskrivs nedan och illustreras i figur 1.

Figur 1
Bild av Lottospelet



Spelplanen bestod av tre rutor med en prick i den första rutan, två prickar i den andra rutan och tre prickar i den tredje rutan. (I projektet utvecklades även en motsvarande variant där fyra prickar inkluderades.) I linje med VT var prickarna likadana avseende färg och form, medan antalen varierar. Till en början användes tre spelkort där prickarna var placerade identiskt med prickarna på spelplanen (villkor 1, se figur 1 till vänster). Det betyder att barnen inte behöver urskilja kardinalitet för att matcha spelkort med rutorna på spelplanen utan i stället kan prickarnas mönster användas för att matcha spelkorten. Denna version spelades för att introducera barnen till reglerna för lottospelet. När barnen förstod reglerna byttes spelkorten till kort där prickarna inte längre var ordnade i samma mönster som på spelplanen (villkor 2, se figur 1 till höger). Nu behövde barnen urskilja antalet prickar för att matcha spelkort och ruta på spelplanen och därmed introducerades kardinalitet som en aspekt att beakta i spelet. I enlighet med variationsteoretiska principer är avsikten att barnen först urskiljer att antalet prickar är olika mellan rutorna på spelplanen, därefter blir det möjligt att generalisera innebörden av antal i och med att placeringen på prickarna varierar medan antalen som ska paras ihop är samma. För att para ihop rätt kort med bild på brickan behöver kardinaliteten hos prickmönstren urskiljas.

Metod

Det empiriska materialet i artikeln kommer som nämnts från ett kombinerat forsknings- och utvecklingsprojekt som bedrivits i nära samarbete mellan två forskare och tre förskollärare från tre förskolor. Forskarna och förskollärarna har samarbetat under två år med att utveckla matematikundervisning för förskolans yngsta barn. Aktiviteter utvecklades, prövades och utvärderades i en iterativ process.

Eftersom förskollärarna var de som kände barnen genomförde de aktiviteterna på förskolorna som en del av den ordinarie pedagogiska verksamheten, dock med skillnaden att aktiviteterna genomfördes i ett avskilt rum. Att genomförandet skedde i ett avskilt rum var för att möjliggöra datainsamling avseende nödvändig ljud- och bildkvalitet (videoinspelning) samt forskningsetiska principer om medverkan, det vill säga att endast barn vars vårdnadshavare gett sitt informerade samtycke deltog när aktiviteten dokumenterades med video. Förskolläraren erbjöd varje gång ett eller flera barn att delta.

Aktiviteten med Lottospelet pågick i genomsnitt i tre minuter långa spelsekvenser. Förskollärarna dokumenterade genomförandet med video. Dessa videoinspelningar var utgångspunkten när forskarna och förskollärarna träffades två timmar varannan vecka under dessa tre terminer för att utvärdera och vidareutveckla aktiviteterna (totalt cirka 30 möten). Under de tre terminer som Lottospelet prövades, gjordes därmed kontinuerligt utvärderingar gemensamt av lärarna och forskarna av hur barnen responderade i spelet, vilket kunnande de gav uttryck för, samt vilket villkor barnen skulle spela Lottospelet vid nästa tillfälle.

I studien deltog 27 barn vars vårdnadshavare gav sitt informerade samtycke. I studien behandlas inga känsliga personuppgifter[1], dock har etiska riktlinjer för forskning avseende information, samtycke och konfidentialitet följts i studiens alla skeden. Att göra forskning med yngre barn innebär att etiskt balansera barns rätt till integritet och barns rätt att göra sin röst och vilja hörd. Eftersom det var förskollärarna, som väl känner barnen, som genomförde aktiviteterna med dem kunde de känna av när barnen ville delta eller inte och det blev tidigt i studien tydligt att även de yngsta barnen i förskolan visar, ofta mycket tydligare än äldre barn, när en aktivitet inte längre intresserar dem.

Analys

Analysen för denna artikel är baserad på 195 videoinspelningar (9 timmar och 40 minuter) av förskollärare och barn som spelar Lottospelet. Inspelningarna gjordes under en period av ett år. Första steget i analysen var att identifiera episoder av undervisning i filmerna. Undervisning definierades som att förskolläraren introducerar en för barnet ny strategi eller ny representation som barnet eller barnen svarar på direkt eller längre fram i episoden (se Björklund & Palmér, 2019; 2022). I de 195 analyserade videoinspelningar dokumenterades 73 episoder som undervisning utifrån denna definition. I vissa videoinspelningar förekommer flera instanser av undervisning medan det finns flera videoinspelningar utan instanser av undervisning. Videoinspelningar utan undervisning innehåller flertalet exempel på interaktion där förskolläraren bekräftar något som barnen säger eller gör, samt exempel när förskolläraren tillför en ny strategi eller representation men där barnen inte responderar. Det finns även flertalet exempel när förskolläraren ställer frågor om antalet prickar på spelkorten eller lottobrickorna, men i situationer där antalet inte behöver urskiljas, till exempel när barnen redan har parat ihop rätt kort med rätt bricka. Vi menar inte att bekräftelse eller sådana frågor på något sätt är oviktiga, men det är inte dessa episoder som fokuserats på i den vidare analysen i denna artikel utan enbart de 73 episoder som innehåller undervisning utifrån den använda definitionen. Ytterligare en anledning till att enbart 73 episoder av undervisning förekommer är att det, när barnen har de kunskaper avseende strategier och representationer som krävs för att spela Lottospelet, inte behövs någon undervisning.

Andra steget i analysen var att identifiera vilka strategier förskollärarna använde, i de 73 episoderna av undervisning, för att hjälpa barnet att spela spelet, det vill säga vilka strategier förskollärarna använde för att hjälpa barnen urskilja antalet prickar på spelkort respektive spelplan. Denna del av analysen var induktiv i betydelsen att identifiera likheter och skillnader i förskollärarnas ageranden. Denna analys utgick ifrån variationsteoretiska principer avseende hur de olika strategierna i de dokumenterade undervisningstillfällena gjorde det möjligt för barnen att urskilja aspekter av tal, det vill säga genom en analys av vad som kontrasteras i situationen

1 Etikprövningsmyndigheten har delgett projektet ett rådgivande yttrande (diarienummer 2019-01037)

och vad som hålls invariant. I och med att den variationsteoretiska analysen avser att utifrån kontrast och invarians i respektive situation synliggöra variationsmönster som gör det möjligt för toddlarna att urskilja nödvändiga aspekter, fokuserades i analysen materialets utformning (prickar i lika eller olika mönster, lika eller olika antal), verbala uttryck (räkneord) som förskollärarna använde och hur räkneorden användes, samt andra gester och gestaltningar (såsom pekningar och fingermönster) och hur dessa skapade kontraster och generaliseringar av antal i aktiviteten.

I detta induktiva analyssteg framkom två strategier som förskollärarna använde för att hjälpa barnen att urskilja antalet prickar på spelkort respektive spelplan: visuell jämförelse och numerisk jämförelse. Den andra av dessa strategier, numerisk jämförelse, genomfördes på två olika sätt där antingen fingrar eller räkneord användes för jämförelsen.

I analysens tredje steg samlades alla instanser där förskollärarna använde samma strategi för en analys av barnens respons på respektive strategi. Denna analys fokuserade vilka variationsmönster (sätt att synliggöra kardinalitet) som visade sig gynnsamma för barnens möjligheter att urskilja kardinalitet.

Utifrån de tre ovanstående analysstegen kan slutsatser dras om hur ett lottospel designat utifrån variationsteoretiska principer kan göra det möjligt för toddlare (1–3-åringar) att urskilja kardinalitet som en grundläggande aspekt av tal.

Resultat

I resultatet presenteras inledningsvis kortfattat hur spelet introducerades för barnen följt av en presentation av de strategier som analysen visade att förskollärarna använde för att hjälpa barnen att urskilja kardinalitet när de spelar spelet (fråga 1). Dessa strategier presenteras utifrån om de fokuserar på visuell eller numerisk (fingrar eller räkneord) jämförelse. För varje strategi redovisas även hur strategin möjliggör för barnen att urskilja olika aspekter av kardinalitet (fråga 2).

Introduktion av regler för lottospelet

Avsikten med villkor 1, där prickarna på spelplanen och spelkorten hade samma mönster, var att introducera reglerna för Lottospelet utan att antal behövde utgöra utgångspunkt för spelet. Så länge prickarna på spelplan och spelkort är identiskt placerade i samma mönster behöver inte barnen räkna antalet prickar, de kan visuellt identifiera dem som ”lika”. Förskollärarna pratar dock mycket om antalet prickar med barnen, även när det inte finns någon uppgift i spelet som behöver lösas med hjälp av till exempel räkning. Det vill säga, förskollärarna introducerar ett problem att lösa som egentligen inte behövs för att föra spelet framåt. Sådana problem introduceras vid 44 olika tillfällen i de 195 filmerna. Det fanns dock barn, som i samband med villkor 1, inte tycktes urskilja likhet i mönstren av prickar. Observationerna visade att förskollärarna i dessa fall inte riktade barnens uppmärksamhet mot prickarnas mönster utan i stället mot antalet prickar. Det vill säga, avsikten med villkor 1 - att introducera reglerna för lottospelet utan att antal utgör utgångspunkt - realiserades inte utan i stället fokuseras antal i undervisningen som kompensation för att barnen inte urskiljer mönster.

Olika strategier och deras möjligheter

För att barn som inte urskiljer mönster i villkor 1 eller kardinalitet när villkor 2 introduceras uppstår en utmaning. När man behöver urskilja kardinalitet – men inte vet att man behöver eller vet hur man kan göra – behövs undervisning. I dessa situationer använde förskollärarna olika strategier samt olika representationer och gester för att hjälpa barnen att urskilja kardinalitet när de spelade spelet. Dessa olika strategier och representationer medför utifrån variationsteori olika möjligheter för barnen att urskilja innebörden av kardinalitet. I analysen framkom två strategier som förskollärarna använde för att hjälpa barnen att urskilja antalet prickar på spelkort respektive spelplan: visuell jämförelse och numerisk jämförelse. Beroende på om läraren genom sina handlingar i undervisningen satte visuell eller numerisk (fingrar eller räkneord) jämförelse i förgrund synliggjordes olika möjligheter till lärande.

Visuell jämförelse

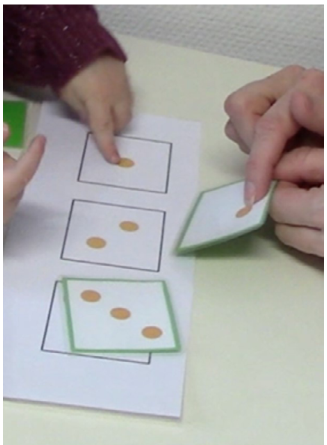
Att visuellt jämföra prickar på spelkort och spelplan innebär att förskolläraren placerar ett spelkort bredvid en ruta på spelplanen, vilket möjliggör en direkt visuell jämförelse (figur 2). Denna jämförelse kompletteras ofta med frågan om det finns "lika många" prickar (excerpt 1).

Excerpt 1

Amelia:	[Lägger spelkortet med en prick på spelrutan med två prickar]
Förskollärare:	[Lyfter på spelkortet och håller det snett framför spelplanen (figur 2)] Hur många är det?
Amelia:	En. [Pekar samtidigt på spelrutan med en prick]
Förskollärare:	Där är också en ja, då lägger vi den där. [Lägger spelkortet på spelrutan med en prick]

Figur 2

Förskolläraren håller ett spelkort bredvid spelplanen



Förskolläraren uppmärksammade ovan barnet på likheter eller skillnader mellan antalet prickar på spelplanen och spelkortet genom att göra prickarna på spelkortet och spelplanen visuellt jämförbara. Men, om ett barn inte redan riktar sin uppmärksamhet mot antalet prickar eller redan urskiljer deras kardinalitet, riskerar en sådan visuell jämförelse att i stället rikta uppmärksamhet mot mönstren av prickarna. Utmaningen för ett barn, för vilket uppgiften fortfarande är icke-numerisk, är att det visuella mönstret uppmärksammar den rumsliga relationen (placeringen av prickarna) och inte tillåter att de numeriska aspekterna kommer fram. Dock är frågan från förskolläraren inte riktad mot prickarnas placering utan mot antalet prickar. Därmed riktar förskollärarens handling uppmärksamheten mot mönstret medan frågan riktar uppmärksamheten mot antalet.

Numerisk jämförelse

Att numeriskt jämföra prickar på spelkort och spelplan innebär att rikta barnens uppmärksamhet specifikt på deras numeriska aspekt. Detta gjorde förskollärarna genom att först hjälpa barnet att bestämma antalet prickar på spelkort respektive en ruta på spelplanen för att därefter avgöra om prickarna är lika eller olika till antalet. Observationerna visar på två olika sätt att göra dessa numeriska jämförelser, att använda fingrar för jämförelse eller använda räkneord för jämförelse. Dessa två strategier medför i sin tur olika möjligheter till lärande.

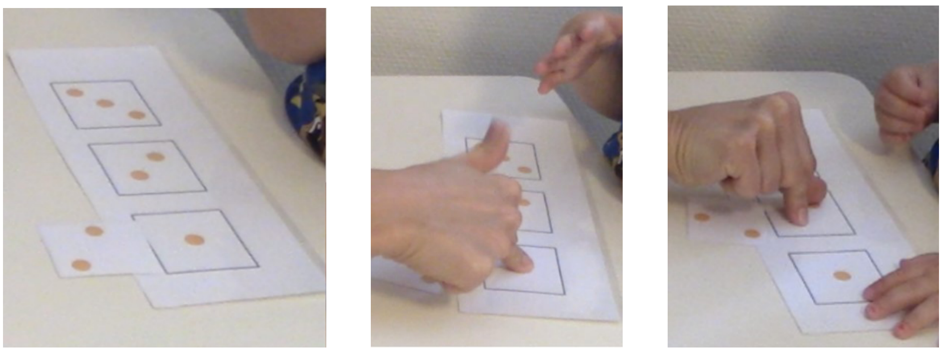
Ett sätt att jämföra antal på spelkorten och spelplanen var att förskolläraren *använde sina fingrar för att matcha ett finger till varje prick* vilket skapar en samling eller enhet bestående av fingrar som har samma antal som prickarna på kortet. Fingrarna används sedan som en referenspunkt för att jämföra samlingarna av prickar på spelkorten och spelplanen. I denna jämförelse matchar antingen fingrar och prickarna perfekt, eller blir några fingrar eller några prickar utan matchning, excerpt 2 och 3.

Excerpt 2

Egil:	[Lägger spelkortet med två prickar på rutan på spelplanen med en prick]
Förskollärare:	Är det lika många prickar där? [Drar undan spelkortet så det ligger bredvid spelrutan (figur 3a)]
Egil:	Ja. [Lägger tillbaka spelkortet på rutan med en prick på spelplanen. Pekar på en prick i taget och säger ord som kan liknas vid ord i en räkneramsa]
Förskollärare:	Ska vi räkna dem? En, två. [Förskolläraren pekräknar och ringar in prickarna med en cirklande rörelse. Håller upp två fingrar och sätter sedan ned dem på spelplanen igen. Flyttar därefter över fingrarna till spelplanen. Sätter ett finger på pricken och viftar med tummen som blir över (figur 3b)]
Förskollärare:	Titta, nu blev det ingen till tummen. Vad ska den vara då? Ska vi se här? [Flyttar spelkortet så den ligger ovanför rutan med två prickar på spelplanen (figur 3c)]
Egil:	[Lägger spelkortet över rutan med två prickar]
Förskollärare:	Ja, för titta. [Lägger spelkortet vid sidan igen] Två prickar och två prickar, lika många. [Matchar två fingrar först på spelkortet och sedan på rutan på spelplanen]

Figur 3a–c
Förskolläraren pekräknar och matchar fingrar gentemot prickarna på spelplanen

3a *3b* *3c*



Förskolläraren möjliggjorde ovan med fingrarna en jämförelse mellan olika antal vilket gjorde det möjligt att urskilja kardinalitet. Med hjälp av fingrarna sammanfördes antalet från spelkortet via förskollärarens fingermönster till den föreslagna rutan på spelplanen. Att tydligt visa det finger eller de fingrar som ”inte fick någon matchande prick” kan hjälpa barn att urskilja likhet eller skillnad i antal. Detta sätt att med hjälp av fingermönster jämföra antalet prickar tycks utifrån observationerna hjälpa barnen att urskilja kardinalitet.

På samma sätt som att matcha med fingrarna ovan observeras förskollärarna också *använda räkneord* för att jämföra antalet prickar på ett spelkort och prickarna på spelplanen.

Excerpt 3

Förskollärare:	Hur många prickar är det på det kortet? [Spelkortet har fyra prickar]
Holger:	Två. [Lägger spelkortet på rutan med tre prickar i liknande mönster på spelplanen]
Förskollärare:	Två. Vart ska det ligga då? Kan du räkna prickarna på kortet här? [Håller fram spelkortet]
Holger:	Två, tre, fem, åtta, tre, sju. [Pekräknar]
Förskollärare:	Vet du vad. Vi kan bara räkna en prick i taget.
Holger:	En, två, tre, fyra. [Pekräknar]
Förskollärare:	Precis! Fyra. Var ska den ligga om det är fyra prickar på den?
Holger:	Där. [Pekar på rutan med tre prickar på spelplanen]
Förskollärare:	Är det fyra prickar där? Nu får du räkna. En, två, tre.
Holger:	Du missade.
Förskollärare:	Nej jag missar inte titta får du se. Tre. Det är tre prickar där. Det var ju fyra prickar på kortet. Var ska det ligga då?
Holger:	Där. [Pekar på rutan med tre prickar på spelplanen]
Förskollärare:	Nej. Det är ju tre där men fyra där. Mönstret är likadant men det är fler prickar.
Holger:	Där. [Pekar på rutan med fyra prickar på spelplanen]
Förskollärare:	Ja precis. För det var fyra prickar där. Mönstren är inte likadana men det är samma antal prickar.

För att hjälpa barnet att hitta motsvarande antal prickar på spelplanen använde förskolläraren ovan räkneord som referenspunkt. Skillnaden, gentemot att använda fingrar likt tidigare exempel, är att räkneord är abstrakta verbala symboler, vilket innebär att barnen redan måste ha någon förståelse för kardinalitet för att räkneorden ska representera kardinal betydelse. Om räkneorden inte har denna betydelse kan de inte användas för att jämföra och avgöra om antalet prickar på spelkort och spelplanen matchar det sagda räkneordet. Därför behöver barnet redan ha någon förståelse för tals kardinalitet för att denna strategi ska bidra till att spela spelet på ett sätt där innebörden av kardinalitet stärks.

Diskussion

Den här artikeln fokuserar på vad som krävs i termer av undervisning vid spel av ett Lottospel när syftet är att möjliggöra för toddare att urskilja tals kardinalitet. Frågeställningarna som ställdes för att belysa detta var: 1) Vilka strategier använder förskollärarna för att hjälpa barnen att urskilja kardinalitet när de spelar spelet? 2) Hur möjliggör dessa strategier att barnen kan urskilja olika aspekter av kardinalitet? Lottospelet var utvecklat i enlighet med variationsteoretiska principer där antal först synliggjordes via kontrast för att därefter generaliseras. I de 195 analyserade observationerna dokumenterades 73 instanser som kategoriserades som undervisning. Analysen av dessa 73 instanser visar på utmaningen i att uppmärksamma en abstrakt aspekt som kardinalitet – det vill säga att synliggöra den tidigare oupptäckta kritiska aspekten i spelet för barn för vilka kardinalitet inte tidigare har urskilts som en aspekt i deras förståelse av tal.

De 73 instanserna visar att förskolläraren, och ofta även barnen, använder olika representationer och gester för att synliggöra kardinalitet. I lottospelet är prickarna på spelkort och spelplan utgångspunkt för utforskandet av antal. För de barn som inte ännu urskiljer kardinalitet, förmedlar dock inte prickarna kardinal betydelse i sig själva. För att hjälpa barnen att urskilja antal hos samlingarna av prickar, använde förskollärarna i studien två strategier, visuell eller numerisk jämförelse. Baserat på observationerna visar studien att en visuell jämförelse av prickarna på spelkort och spelplan ofta uppmärksammar barnen på rumsliga aspekter, det vill säga mönstret i vilket prickarna är organiserade, snarare än deras antal. I stället för att urskilja kardinalitet framträdde för många barn vid visuell jämförelse i stället mönster. Det mest fördelaktiga för att sammankoppla spelkort och spelplan tycks i stället vara numerisk jämförelse med fingermönster, som av förskollärarna användes för att "objektifiera" (Radford, 2003) antalet på spelkort och spelplan. När förskollärarna använder fingermönster och relaterar fingrarna ett-till-ett med prickarna framträder antalet representerat i en semi-abstrakt form och blir jämförelser av antal möjlig att göra mellan fingrarna och samlingen av prickar (blir något finger eller prick över?). Denna semi-abstrakta representation reducerar fokus på prickarnas rumsliga placeringar (mönster) som annars lätt drar uppmärksamheten bort från numeriska attribut. Fingrarna verkar alltså vara ett framgångsrikt ”verktyg”, kanske för att fingermönster rör sig mellan det semikonkreta (det går att räkna antalet fingrar) och semi-abstrakta (ett fingermönster betyder ett antal). En tolkning är att fingermönstren fungerar som ”bridging tools” eftersom de objektifierar (Radford, 2003) talen och överbygger skillnaderna i prickarnas placering. Verbala räkneord är i sin tur ”hel-abstrakta” och hjälper utifrån observationerna i studien mer sällan att synliggöra kardinalitet för barnen i spelandet av lottospelet.

I vissa av de 73 analyserade episoderna används enbart en representation, förutom prickarna på spelkorten, medan det i andra observationer används ytterligare två representationer. Enligt tidigare forskning (se Duval, 2006; Goldin, 2014; Lesh, 1987) involverar och stärks lärande i matematik av förmågan att göra kopplingar och se samband inom och mellan representationer. Vidare utvecklar barn som använder fler representationsformer (även om de inte används på korrekt sätt), i högre utsträckning och tidigare, förståelse för kardinalitet än barn som använder enbart en representation mer ensidigt (Gibson m.fl., 2019). Utifrån den forskningen skulle användande av fler än en representationsform stärka barnens möjligheter till lärande i samband med spelandet av lottospelet. Tidigare forskning har dock även visat att sådana kopplingar och samband inte urskiljs automatiskt av barn utan behöver pekas ut av förskolläraren (Björklund & Palmér, 2022). En strategi i sådan undervisning, för att förtydliga kopplingen mellan representationer, är gester som enligt Radford (2003) kan vara en resurs för att stödja kopplingar från en representation till en annan. I observationerna använder förskollärarna ofta olika typer av gester där den cirkulerande gesten som ringar in antalet prickar som antingen benämns med räkneord eller pekräknats kan anses stödja barnens möjligheter att koppla representationerna räkneord och fingermönster till representationen prickar.

Sammanfattningsvis visar denna studies resultat att Lottospelets teoretiskt grundade design möjliggör, men inte garanterar, att kardinalitet urskiljs av barnen. Studien kan vidare ses som ett exempel på hur en vanlig aktivitet i förskolans verksamhet, med didaktisk lyhördhet hos förskolläraren, kan erbjuda goda möjligheter att utveckla taluppfattningen hos toddlare. En utgångspunkt för studien var att all den matematik som barn möter i undervisning bör vara nödvändig för situationen så att barnen kan upptäcka hur matematiska kunskaper är användbara och därmed meningsfulla i olika situationer. I Lottospelet första steg behövde barnen inte urskilja kardinalitet utan kunde matcha spelkort och spelbricka utifrån likheter i mönstren. I det andra steget blev det däremot nödvändigt, och därmed även meningsfullt, att urskilja kardinalitet för att kunna spela spelet. Resultatet visar att trots att Lottospelet utvecklats i dessa två steg, för att utifrån variationsteoretisk grund ge toddlare de bästa förutsättningar att urskilja kardinalitet som en aspekt av tal, är förskollärarens strategier avgörande för vad som blir möjligt att lära i spelsituationen. Vi kunde se att barnen ofta uppmuntrades att räkna prickarna även vid villkor 1 vilket inte var nödvändigt eftersom barnen löste matchningen utifrån mönster. Att be barnen räkna antalet prickar menar vi inte är "fel" men utifrån spelets konstruktion blir urskiljandet av antalet prickar relevant först i villkor 2 där vi kan se att förskollärarna använder olika strategier och hur dessa strategier är olika framgångsrika där den mest fördelaktiga för att sammankoppla spelkort och spelplan tycks vara representation genom fingermönster. En viktig slutsats är dock att valet av strategi alltid behöver ta utgångspunkt i varje barns befintliga sätt att förstå tal.

Tack

Studien är genomförd med finansiellt stöd av Skolforskningsinstitutet (diarienummer 2018–00014).

Referenser

Björklund, C., Ekdahl, A.-L., Kullberg, A. & Reis, M. (2022). Preschoolers' ways of experiencing numbers. *LUMAT, 10*(2), 84–110. https://doi.org/10.31129/LUMAT.10.2.1685

Björklund, C., Ekdahl, A.-L. & Runesson Kempe, U. (2021). Implementing a structural approach in preschool number activities. Principles of an intervention program reflected in learning. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 72–94. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1756027

Björklund, C., Marton, F. & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 261–284. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Björklund, C. & Palmér, H. (2019). I mötet mellan lekens frihet och undervisningens målorientering i förskolan. *Forskning om undervisning och lärande, 7*(1), 64–85. https://doi.org/10.61998/forskul.v7i1.27301

Björklund, C. & Palmér, H. (2022). Teaching toddlers the meaning of numbers - Connecting modes of mathematical representations in book reading. *Educational Studies in Mathematics, 110*(3), 525–544. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10147-3

Björklund, C. & Palmér, H. (2024). The challenges of mathematizing in Swedish early childhood education. *Journal of Early Childhood Education Research, 13*(2), 167–186. https://doi.org/10.58955/jecer.138122

Bloom, P. & Wynn, K. (1997). Linguistic cues in the acquisition of number words. *Journal of Child Language, 24*, 511–533. https://doi.org/10.1017/s0305000997003188

Breive, S., Carlsen, M., Erfjord, I. & Hundeland, P.-S. (2018). Designing playful inquiry-based mathematical learning activities for kindergarten. I C. Benz, A. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schöner, H. Vollmuth & J. Zöllner (Red.), *Mathematics education in the early years. Results from the POEM3 conference, 2016*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78220-1

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K. & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology, 43*(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131. https://www.jstor.org/stable/25472062

English, L. D. & Mulligan. J. T. (2013). Perspectives on reconceptualizing early mathematics learning: Introduction. I L. D. English & J. T. Mulligan (Red.), *Perspectives on reconceptualizing early mathematics learning* (s. 1–4). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_1

Fuson, K. C. (1992). Relationships between counting and cardinality from age 2 to age 8. I J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Red.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (s. 127–149). Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Gibson, D., Gunderson, E., Spaepen, E., Levine, S. & Goldin-Meadow, S. (2019). Number gestures predict learning of number words. *Developmental Science*, *22*(3), e12791. https://doi-org.ezproxy.ub.gu.se/10.1111/desc.12791

Goldin, G. A. (2014). Gestures in mathematics education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 556–572). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100042

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (s. 1–23). National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 235–264.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

McMullen, J., Verschaffel, L. & Hannula-Sormunen, M. (2020). Spontaneous mathematical focusing tendencies in mathematical development. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(4), 249–257. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1818466

McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. University of Chicago Press. https://doi.org/10.7208/chicago/9780226514642.001.0001

Perry, B. & Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. I L. D. English (Red.), *Handbook of international research in mathematics education* (s. 75–108). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203930236

Pramling Samuelsson, I. & Asplund Carlsson, M. (2008). The playing learning child: Towards a pedagogy of early childhood. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *52*(6), 623–641. https://doi.org/10.1080/00313830802497265

Pramling Samuelsson, I. & Pramling, N. (2013). Orchestrating and studying children's and teachers' learning: Reflections on developmental research approaches. *Educational Inquiry*, *4*(3), 519–536. https://doi.org/10.3402/edui.v4i3.22624

Ping, R. M. & Goldin-Meadow, S. (2008). Hands in the air: Using ungrounded iconic gestures to teach children conservation of quantity. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1277–1287. https://doi.org/10.1037/0012-1649.44.5.1277

Pitta-Pantazi, D., Christou, C. & Pittalis, P. (2014). Number teaching and learning. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of mathematics education* (s. 645–654). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_122

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02

Robutti, O. (2014). Gestures in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 311–315). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100042

Sarnecka, B. W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, *108*, 662–674. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.05.007

Sarnecka, B., Kamenskaya, V. G., Yamana, Y., Ogura, T. & Yudovina, J. B. (2007). From grammatical number to exact numbers: Early meanings of 'one', 'two', and 'three' in English, Russian, and Japanese. *Cognitive Psychology*, *55*, 136–168. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2006.09.001

SFS 2010:800. *Skollagen*.

Skolverket. (2018). *Läroplan för förskolan. Lpfö18*.

Sundsdal, E. & Øksnes, M. (2015). Til forsvar for barns spontane lek. *Nordisk tidskrift for pedagogikk og kritikk*, *1*, 1–11. https://doi.org/10.17585/ntpk.v1.89

Skolinspektionen. (2017). *Förskolans kvalitet och måluppfyllelse*.

Valenzeno, L., Alibali, M. W. & Klatzky, R. L. (2003). Teachers' gestures facilitate students' learning: A lesson in symmetry. *Contemporary Educational Psychology*, *28*(2), 187–204. https://doi.org/10.1016/S0361-476X(02)00007-3

Van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(1), 23–37. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9225-x

Vogt, F., Hauser, B., Stebler, R., Rechsteiner, K. & Urech, C. (2018). Learning through play – pedagogy ad learning outcomes in early childhood mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, *26*(4), 589–603. https://doi.org/10.1080/1350293X.2018.1487160

Wynn, K. (1990). *Children's understanding of counting. Cognition*, *36*(2), 155–193. https://doi.org/10.1016/0010-0277(90)90003-3

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, *24*(2), 220–251. https://doi.org/10.1016/0010-0285(92)90008-P

Författarpresentationer

Hanna Palmér

Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och tidig matematikundervisning.

Camilla Björklund

Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Göteborgs universitet och forskar bland annat om matematiklärande och undervisning i förskola och skolans tidiga år i praktiknära forsknings- och utvecklingsprojekt.

Lena Landgren

Lena Landgren är förskollärare och har medverkat i flera praktiknära forskningsprojekt om matematik i förskolan.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 3, 2024, 22–38

Lärares möjligheter att främja elevers teoretiska arbete med geometriska begrepp – lärandeverksamhet om cirkel

Orginalartikel

Helena Eriksson[1]*, Marie Björk[1], Jenny Fred[1] & Gunilla Pettersson Berggren[1]

[1] Stockholms universitet

*Korresponderande författare:
Helena Eriksson
helena.eriksson@su.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s. 22–38
DOI: 10.61998/forskul.v12i3.26653
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-10-14

Sammanfattning

I följande artikel diskuteras vad som karaktäriserar lärares handlingar som främjar elevers engagemang, i en lärandeverksamhet där de tillsammans med sina klasskamrater utforskar de geometriska begrepp som relaterar till begreppet cirkel. Data består av tre forskningslektioner i årskurs 2 där lärandeobjektet handlar om att reflektera över relationer mellan cirkelns fyra begrepp; mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge. Resultatet visar att lärares handlingar som fokuserade på de geometriska begreppen riktades mot både empiriska och teoretiska aspekter. Indikationer på utveckling av lärandeverksamhet kunde urskiljas i situationer där läraren introducerade, kopplade tillbaka, bekräftade, provocerade, inkluderade och fördjupade detaljer om begreppen som relaterar till cirkel. Med stöd av lärarhandlingar, som bestod av frågor, gester och konstruktioner på den gemensamma tavlan, möjliggjordes elevernas utforskande av begreppet cirkel.

Nyckelord: cirkel, El'konin-Davydov program, geometriska begrepp, lärandeverksamhet, undervisningsdesign

Abstract

The following article discusses what characterise teachers' actions that promote students' engagement, in a learning activity where they, together with their classmates, explore the geometric concepts related to the concept of circle. The data consists of three research lessons in grade 2 where the learning object is about reflecting on relationships between the four concepts of the circle: centre, radius, diameter and arc. The result shows that teachers' actions focusing the geometric concepts were directed towards both empirical and theoretical aspects. Indications of developing learning activity were discerned in situations where the teacher introduced, connected back, confirmed, provoked, included and deepened details about the concepts that relate to circle. Supported by teacher actions, consisting of questions, gestures and constructions on the joint board, students' exploration of the concept of circle was enabled.

Keywords: Circle, El'konin-Davydov curriculum, Geometrical concept, Learning activity, Teaching design

Introduktion

I denna artikel diskuteras lärares handlingar som främjar elevers engagemang i en lärandeverksamhet som den skrivs fram av Davydov (2008; jfr t.ex. Adolfsson Boman m.fl., 2013; Broman m.fl., 2022; Eriksson & Jansson, 2017). Med lärares handlingar menar vi det lärare säger och gör i relation till det begrepp som är i fokus. Lärandeverksamhet kan beskrivas som en kollektiv verksamhet där elever tillsammans med en lärare utforskar och reflekterar över den generella strukturen hos ett kunskapsobjekt (Davydov, 2008). Det kunskapsobjekt som står i fokus i den här artikeln är geometriska begrepp relaterade till begreppet cirkel. Valet grundar sig på att begreppet cirkel är vanligt förekommande i lågstadiets matematikundervisning. Valet gjordes också utifrån att den geometriundervisning som vanligtvis genomförs med yngre elever tenderar att uppmärksamma utseendet på olika geometriska former i den omgivande miljön (jfr. Sinclair m.fl., 2016) vilket Davydov (1990) beskriver som ett exempel på empiriskt fokus. I en sådan empiriskt inriktad geometriundervisning framhålls fyra områden som särskilt viktiga: problemlösning, arbete med redskap som exempelvis ritningar, visualisering och bevisföring (Jones m.fl., 2019).

Elevers arbete med att lösa problem relaterade till geometri blir ofta avhängigt av hur väl de kan hantera vissa specifika begrepp (Moore, 1994). Undervisningen borde därför redan under de tidiga skolåren skapa möjlighet för elever att utforska och ta i bruk geometriska begrepp (Davydov, 2008). En lärandeverksamhet riktad mot det geometriska begreppet cirkel kan ses som en verksamhet där eleverna får möjligheten att utforska och reflektera över relationerna mellan begreppen radie, mittpunkt, cirkelbåge och diameter – några av de relationer som ingår i strukturen för begreppet cirkel.

I en lärandeverksamhet skapas även förutsättningar för en specifik typ av samtal där eleverna tar rollen som drivande i utforskandet av det teoretiska begrepp läraren har valt (Davydov, 2008). I en kunskapsöversikt om undervisning i matematik framhåller Liljedahl (2022) att såväl uppgifternas utformning som gruppsammansättning är viktiga faktorer för elevernas möjligheter att utveckla gemensamma samtal. Studier visar också att det kan vara utmanande för lärare att variera hur de svarar eleverna för att bjuda in till samtal i matematikklassrummet (t.ex. Davis, 1997; Hintz & Tyson, 2015). Vidare finns det studier som visar att lärares respons på elevernas inspel uppskattas av eleverna, speciellt när läraren låter dem diskutera sina lösningsförslag, ger återkoppling och lyssnar på hur de tänker (t.ex. Lim m.fl., 2020). Ytterligare studier visar att elever även kan behöva stöd i form av specifika redskap för att aktivt delta i samtal i matematikundervisningen (Björk, 2023; Eriksson, 2021; Fred, 2019). Det framträder således en problembild gällande hur lärare kan leda samtal där elever engageras i matematikundervisningen. Lägger vi därtill utmaningen att skapa möjligheter för eleverna att arbeta utforskande och ta i bruk teoretiska matematiska begrepp blir problembilden än tydligare. Då räcker det inte att i forskning fokusera enbart på lärares frågor eller återkoppling, då behövs också ett fokus på det innehållsliga i undervisningen (Carlgren, 2017; Davydov, 2008). Om man har för avsikt att främja elevernas engagemang i en lärandeverksamhet, där de utforskar och reflekterar över den generella strukturen för ett kunskapsobjekt, kan man fråga sig vad läraren behöver fokusera på i arbetet med att leda elevernas samtal. Syftet med föreliggande artikel är därför att identifiera och diskutera lärares handlingar som främjar en verksamhet där eleverna utmanas att utforska, ta i bruk och reflektera över generella strukturer kopplade till ett geometriskt objekt, i detta fall begreppet cirkel. Följande forskningsfråga har formulerats: Vad kännetecknar lärares handlingar som kan möjliggöra för elever att utforska begrepp kopplade till cirkel; mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge i en lärandeverksamhet?

Bakgrund

Eftersom artikeln handlar om hur lärare kan främja elevers möjligheter att utveckla lärandeverksamhet kommer här först ett avsnitt om detta ramverk. Avsikten är att lärandeverksamheten ska handla om geometriska begrepp specifikt kopplade till cirkel, därför följer även ett avsnitt om elevers förståelse av geometriska begrepp.

Lärandeverksamhet

Lärandeverksamhet är det teoretiska ramverk som används för design och analys i studien. I lärandeverksamhet har läraren stor påverkan på det teoretiska arbete som eleverna ges möjlighet att utveckla (Davydov, 2008). Läraren förväntas, för att möjliggöra det teoretiska arbetet, ge eleverna mandat att utforska teoretiska begrepp (Davydov, 2008). Lärare behöver även ta ställning till om eleverna enskilt behöver arbeta med många enkla uppgifter eller om de behöver arbeta gemensamt med mer komplexa uppgifter (Kilhamn & Säljö, 2019). Idén om lärandeverksamhet förespråkar det sistnämnda alternativet för att skapa möjligheter till interaktion mellan eleverna, så att de kan ta del av varandras reflektioner i arbetet med uppgifter som engagerar och stimulerar dem. Denna typ av verksamhet kan därför ses som ett exempel på hur en specifik undervisningstradition (jfr Yackel & Cobb, 1996) kan utvecklas i en matematikundervisning.

Lärandeverksamhet fokuserar teoretiska begrepp, det vill säga strukturer och relationer som till sin natur inte är direkt observerbara utan kräver medierande redskap för att vara möjliga att reflektera över. De skiljer sig därmed från empiriska begrepp, som går att perceptuellt uppfatta och jämföra med sinnesförnimmelser (Davydov, 2008). Ett arbete i en lärandeverksamhet kräver därför att läraren förhåller sig till skillnader mellan vardagliga empiriska begrepp och vetenskapliga teoretiska begrepp (Davydov, 2008). Teoretiska begrepp behöver enligt Davydov rekonstrueras i en process av ”ascending from the abstract to the concrete” (Davydov, 1990, s. 98), vilket innebär att det abstrakta ligger till grund för förståelsen av det konkreta. Att utveckla förståelse för teoretiska begrepp inkluderar alltid en förståelse för hur begreppet relaterar till andra teoretiska begrepp. Begreppet cirkel relaterar exempelvis, som nämnts ovan, till de teoretiska begreppen mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge. Att utveckla förståelse för empiriska begrepp relaterade till cirkeln handlar i stället om att kunna urskilja rundhet genom att iaktta cirkulära föremål och jämföra dem med andra geometriska objekt.

Lärandeverksamhet grundas också i en idé om att motiv för att lära kan utvecklas genom en undervisning som är socialt, kulturellt och historiskt grundad (Vygotsky, 1963, 1978). En undervisning som fokuserar på kollektivt arbete, drivet av ett motiv att lära och att lösa gemensamma problem, kan utvecklas till en lärandeverksamhet (Davydov, 2008; Radford & Roth, 2017; Repkin, 2003). Huruvida elever engagerar sig i ett teoretiskt arbete är beroende på de situationer som läraren organiserar och leder.

Lärandehandlingar och lärandemodeller

När eleverna arbetar med att utforska teoretiska begrepp behöver de utveckla handlingar, som inom lärandeverksamhet benämns lärandehandlingar. Läraren har en särskilt viktig roll att organisera för att eleverna ska kunna utveckla sådana handlingar (jfr Davydov, 2008). Handlingarna kan beskrivas enligt ett mönster som inte alltid följer en kronologisk ordning utan fungerar som riktlinjer för lärare, i sin roll som ledare av en lärandeverksamhet. Inledningsvis arbetar läraren tillsammans med eleverna för att identifiera och formulera ett problem de ska arbeta med. Problemet identifieras genom att exempelvis diskutera en specifik situation och gemensamt skapa en modell av ett specifikt innehåll (en lärandemodell) som kan hjälpa till i arbetet med en lösning. Genom arbetet med lärandemodellen får eleverna möjlighet att arbeta med kunskapsinnehållet. I detta utforskande arbete transformerar och förändrar eleverna lärandemodellen. Därefter kan läraren och eleverna konstruera nya uppgifter som löses med en eller flera av de olika versionerna av lärandemodellen och värdera hur väl de fungerar för att lösa uppgifterna. Slutligen värderar eleverna hur generella de olika versionerna av lärandemodellen är och hur väl problemet lösts. Detta handlingsmönster kan utgöra riktlinjer för hur en gemensam verksamhet kan utvecklas där elever deltar i samtal om och med teoretiska begrepp (Davydov, 2008; se även Eriksson, 2017). Mönstret kan alltså ses som främjande för elever att engagera sig i och upprätthålla en lärandeverksamhet.

För att modellerna, som skapades inledningsvis, ska kunna utvecklas till lärandemodeller behöver läraren vara medveten om vilka teoretiska begrepp som kan kopplas till det specifika kunskapsinnehållet och därmed utgöra delar i en lärandemodell (Arievitch & Haenen, 2005; Davydov, 2008). Lärandemodellerna som utvecklas kan ge energi till diskussioner, främja problemidentifiering, utgöra en källa för nyfikenhet samt hålla riktningen för ett kollektivt reflekterat tänkande (Eriksson & Polotskaia, 2017). Modellarbete pekas ut som en möjlighet för elever, i exempelvis behov av särskilt stöd, att vara aktiva i arbetet med teoretiska begrepp (Björk, 2023; Eriksson, 2021; Moxhay, 2008). Det kan även vara intressant med modellarbete i elevgrupper där det av olika anledningar är utmanande att i hög grad använda verbalt språk (Björk, 2023; Eriksson, 2021). En viktig aspekt för lärandeverksamhet är att låta hela klassen utgöra en resurs för de gemensamma reflektionerna. Hur lärare kan planera för och agera i en sådan undervisning är fortfarande ganska sparsamt och relativt övergripande beskrivet i tidigare forskning.

Geometri och begreppsutveckling gällande geometri

Geometriundervisning med yngre elever tenderar att fokusera på att de ska urskilja olika geometriska former i den omgivande miljön (Sinclair m.fl., 2016). Ett exempel på hur elever kan utveckla förståelse av geometriska begrepp, och därmed även hur undervisning bör ske, finns beskrivet av van Hiele (1986). En utgångspunkt för van Hiele är att börja med att se olika former och därefter avbilda dem, sedan beskriva relationer mellan olika former för att slutligen förklara olika matematiska begrepp. Fokus i undervisningen kan med det perspektivet beskrivas som att eleverna först ska känna igen olika former för att sedan förstå begreppen. Det finns också studier som pekar på att elever tidigt behöver arbeta med samband mellan teoretiska aspekter av geometriska begrepp (Serin, 2018). Ett alternativ kan därför vara att i stället utgå från att utforska hur olika begrepp är beskaffade och hur de förhåller sig till varandra (jfr t.ex. Davydov, 2008). För att utforska cirkel som begrepp bör eleverna reflektera över dess konstruktion, det vill säga en ”kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (radien) till en fix punkt (medelpunkten)” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 214). Av den anledningen behöver begreppen radie och mittpunkt vara i fokus när elever ska utforska begreppet cirkel. Diametern som är dubbla radien och cirkelbågen som begränsar cirkeln är därför begrepp som också behöver utforskas av eleverna. Det är en sådan undervisning om begreppet cirkel som är i fokus för innevarande artikel framför att känna igen och peka ut olika cirkulära former bland andra geometriska former.

Metod

Utgångspunkten för undervisningen var att elever tillsammans med sina lärare skulle få möjlighet att utveckla en lärandeverksamhet gällande begreppet cirkel. En forskningslektion planerades, genomfördes och reviderades som ett iterativt arbete i tre cykler, i enlighet med principerna för learning study (jfr Carlgren, 2017).

Data

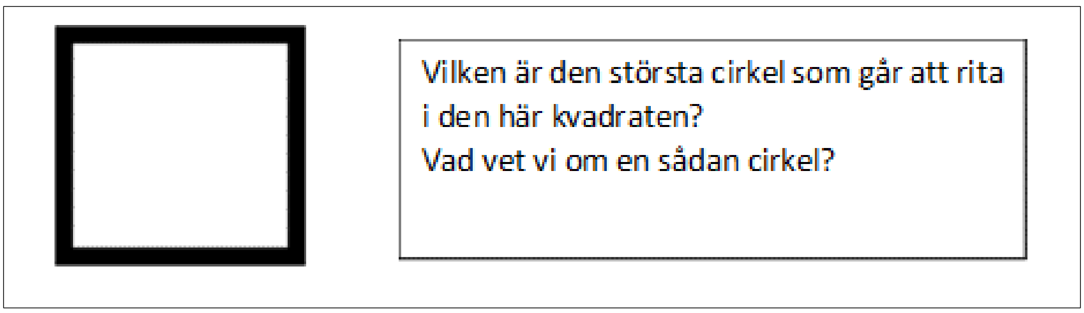
Data består av film från tre forskningslektioner, cirka 40 minuter vardera i årskurs 2, på två kommunala grundskolor i två olika kommuner. Lektionerna genomfördes under vårterminen 2020. Lektion ett genomfördes i en klass med tjugotvå elever, lektion två med arton elever och lektionen tre med tjugofyra elever. En skola är belägen i en storstadsregion i ett socioekonomiskt starkt område med många föräldrar med eftergymnasial utbildning och den andra skolan är belägen i en medelstor stad i ett hyreshusområde klassat som ett utanförskapsområde med många nyanlända familjer. Forskningslektionerna leddes av någon i forskargruppen.[1] Den ordinarie klassläraren förde anteckningar och ansvarade för filmkameran. Filmkameran var placerad längst bak i klassrummet så att läraren och det gemensamma arbetet på tavlan var i fokus i filmerna. Diskussionen i klassen, mellan eleverna och den undervisande läraren, syftade till att eleverna skulle fördjupa sina gemensamma reflektioner om och med begrepp relaterade till begreppet cirkel. Under några kortare stunder fick eleverna diskutera i par eller mindre grupper. Dessa situationer finns inte med som data då det elever sa eller gjorde inte fångades på film.

Vårdnadshavare hade, enligt direktiv från Vetenskapsrådet (2017), skrivit under ett samtycke om att deras barn fick delta i studien. Samtycket innebar att eleverna fick delta i studien där undervisningen filmades och att de när som helst kunde begära att avbryta deltagandet. Om någon, vilket inte var fallet, skulle begära att få avbryta deltagandet skulle all data som handlade om den eleven raderas ur transskript och analyser. Data i form av filmer slutförvaras enligt Stockholms universitets datalagringspolicy.

Två uppgifter

I studien konstruerades en uppgift (uppgift 1) som iscensattes i forskningslektion ett och två samt en reviderad uppgift (uppgift 2, se figur 1) som iscensattes i forskningslektion tre. Syftet med uppgifterna var att eleverna skulle utforska relationen mellan mittpunkten, radien, diametern och cirkeln.

Figur 1
Uppgift 2 genomförd i lektion tre



Not. Papperskvadraten som sattes upp på tavlan vid lektionsstart i forskningslektion tre.

I forskningslektionerna ett och två utgick arbetet från att människor i alla tider förundrat sig över den absolut runda formen som fenomen i naturen (uppgift 1). Läraren visade bilder med en projektor där en sten kastats i vatten och där cirklar växer utifrån den plats där stenen träffade vattenytan samt en bild på en himmel med en sol-halo. Inledningsvis samtalade läraren och

1 I forskargruppen ingår fyra forskande grundskollärare med magister, fil lic respektive fil dr utbildning.

eleverna om bilderna. Därefter visade läraren två enfärgade geometriska objekt, en cirkel och en oval och bad eleverna jämföra och beskriva figurerna samt förklara vilken som var en cirkel. En skillnad mellan lektion ett och två var de redskap som användes för att utforska radien i de olika figurerna. I forskningslektion ett använde eleverna gem som de lade från mittpunkten till cirkelns kant och i forskningslektion två användes snören som de klippte och lade på motsvarande sätt för att mäta radien.

I forskningslektion tre utgick arbetet i stället från en kvadratisk ram som sattes upp på tavlan, se figur 1, uppgift 2. Läraren pekade på kvadraten och frågade hur stor cirkel som kunde ritas i den. Eleverna fick också frågan om vad de kunde veta om en sådan cirkel.

Anledningen till den förändrade uppgiften var att uppgiften från forskningslektion ett och två inte i tillräcklig utsträckning möjliggjorde för eleverna att utforska relationer mellan cirkeln och dess relaterade begrepp. I den reviderade uppgift 2 var tanken att eleverna skulle få möjlighet att urskilja att kvadraten och den cirkel som efterfrågas har samma mittpunkt, och att längden på sidorna i kvadraten är densamma som diametern i denna cirkel. Begreppen mittpunkt, diameter och cirkel blir centrala för att lösa uppgiften.

Analysmetod

Analysarbetet genomfördes i fyra steg. Det första steget utgjordes av transkribering av filmerna från forskningslektionerna. Transkriptionerna fokuserade på arbetet med uppgifterna och gjordes ordagrant, med undantag av att talspråk ändrades till läsbart skriftspråk, vilket i vissa fall innebar att omtagningar, upprepningar och hummanden togs bort. I de delar av lektionerna där läraren fick vara särskilt aktiv för att upprätthålla en lärandeverksamhet kompletterade vi transkriptionerna med beskrivningar av såväl lärarens som elevernas ickeverbala handlingar (exempelvis pekningar, ritande, nickningar osv) inom hakparenteser (jfr Mergenthaler & Stinson, 1992).

I det andra analyssteget färgkodades lärarens handlingar (uttalanden och ickeverbala handlingar) utifrån funktion. De olika koderna analyserades induktivt till ett antal olika kategorier, där arbetet med att sortera och organisera dem, resulterade i två huvudkategorier: (1) läraren utför handlingar av organisatorisk karaktär (ber exempelvis en elev att gå till tavlan) och (2) lärarens handlingar fokuserar på innehållet, det vill säga geometriska begrepp som relaterar till cirkeln (exempelvis pekar läraren på mittpunkten i en cirkel). I resultatkapitlet namnges dessa som: (1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus och (2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus (se figur 2 nedan).

I det tredje analyssteget vidareutvecklades huvudkategori (2) till två underkategorier gällande antingen empiriska eller teoretiska begrepp (jfr Davydov, 1990). Den empiriska underkategorin utgjordes av lärarens handlingar där vardagliga ord (alltså empiriska begrepp) och situationer användes, det vill säga begrepp som är möjliga att urskilja perceptuellt. I den teoretiska underkategorin använde läraren teoretiska begrepp, det vill säga begrepp som måste urskiljas genom reflektion med stöd av modeller. I resultatet finns dessa kategorier presenterade som: (2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp, och (2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp.

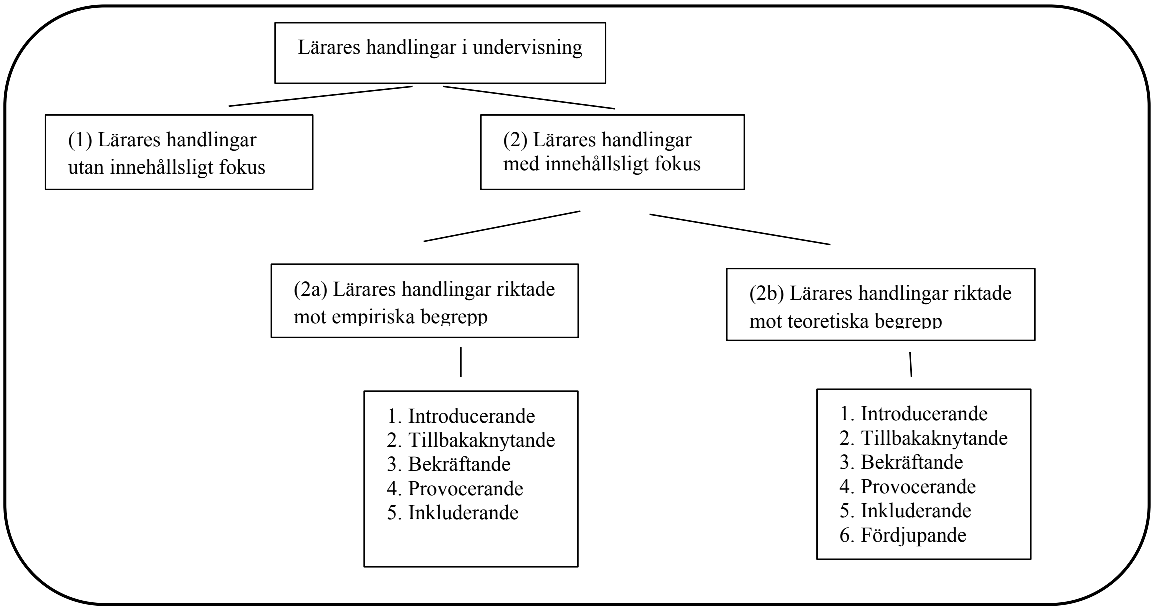
I det fjärde analyssteget identifierades ett antal underkategorier i både (2a) och (2b) genom ytterligare en kodning av olika typer av handlingar. Dessa koder bestämdes utifrån vilka ord och begrepp som läraren använde i uppmaningar och utmaningar, exempelvis huruvida läraren valde att fånga upp och gå vidare med elevers beskrivningar eller vad handlingarna gav eleverna möjlighet att respondera på.

Resultat

I det följande presenteras hur elevernas lärandehandlingar främjades av vad läraren gjorde och sa, det vill säga lärares handlingar. Först presenteras de två huvudkategorierna: (1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus och (2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus. Därefter presenteras de två underkategorierna till kategori (2): (2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp och (2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp. I relation till forskningsfrågan bedömdes kategori (2b) som särskilt intressant, eftersom dessa handlingar möjliggjorde för eleverna att utforska teoretiska begrepp relaterade till cirkel, så som mittpunkt, radie, diameter och cirkelbåge. Kategori (2a) redovisas kort som en kontrast eller illustration över skillnaden mellan lärarhandlingar riktade mot empiriska (vardagliga) respektive teoretiska (vetenskapliga) begrepp.

Figur 2

Handlingar som möjliggör lärandeverksamhet



Not. Figuren visar lärares handlingar kategoriserad i två huvudkategorier: (1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus och (2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus. Figuren visar vidare att kategori (2) delas upp i: (2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp och (2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp.

(1) Lärares handlingar utan innehållsligt fokus

De handlingar som läraren utförde för att organisera undervisningen, utan direkt fokus på begrepp relaterade till cirkel, finns samlade i denna kategori (1). Den här typen av handlingar kom till exempel till uttryck genom att läraren dirigerade eleverna fram och tillbaka till tavlan och bad dem att synliggöra hur de själva tänkte eller reflektera över vad någon annan elev hade sagt eller gjort. Exempel på sådana handlingar är när läraren räckte fram en penna och pekade på en av eleverna och sa ”Kom och visa hur du tänker”. Ett annat exempel är när läraren vände sig till hela klassen och frågade “Vad menade han? Vem kan ge ytterligare en förklaring?” Sammanfattningsvis såg den här typen av handlingar ut att fortlöpande underlätta och orkestrera samverkan mellan elever och läraren samt samverkan och reflektion mellan elever. Dessa handlingar saknade dock ett innehållsligt fokus.

(2) Lärares handlingar med innehållsligt fokus

De handlingar med innehållsligt fokus som läraren riktade mot begrepp relaterade till cirkel presenteras i tabell 1. Dessa handlingar riktades dels mot empiriska begrepp, det vill säga begrepp och aspekter som perceptuellt går att identifiera, dels mot teoretiska begrepp och relationer mellan teoretiska begrepp som endast är tillgängliga via lärandemodeller. I tabellen presenteras en översiktlig sammanställning med beskrivningar av respektive kategori och exempel på lärares handlingar med innehållsligt fokus som vi induktivt identifierat i vår data. Notera att alla underkategorier har exempel på handlingar riktade mot både empiriska och teoretiska begrepp förutom den sista, fördjupande handlingar, där det inte finns några empiriska handlingar. För att komma till en fördjupning av begrepp behöver läraren alltså fokusera teoretiskt innehåll.

Tabell 1
Lärares handlingar med innehållsligt fokus.

Underkategorier	Beskrivning av underkategorier	t/e	Exempel på lärarens specifika handlingar från lektionerna
1. Introducerande	avser när läraren *använder* och *medvetet* riktar uppmärksamhet mot de matematiska begrepp som är i fokus	t	Konstruera den största cirkeln som får plats inuti den här kvadraten.
		e	Vad är det [ni ser] och hur testas rundhet?
2. Tillbakaknytande	avser när läraren *knyter tillbaka till* teoretiskt begrepp som tidigare nämnts	t	Kan vi säga något om den här? Den såg ut som en kvadrat-cirkel.
		e	Hur många har kastat sten i vattnet och tittat på cirklarna som växer?
3. Bekräftande	avser *vad-frågor* som bekräftar innehållsliga detaljer i elevernas svar	t	Vad är det som man nu tänker på om det är en cirkel? Vad är det som gör att man kan veta att det är en cirkel?
		e	Vad är det som gör att cirklarna växer och blir större och större och större?
4. Provocerande	avser *utmaningar* som läraren iscensätter i avsikt att eleverna ska urskilja och ytterligare utforska ett teoretiskt begrepp	t	Kan *mittpunkten* finnas på många ställen?
		e	Likadant med fisken, tittar upp med huvudet ovanför vattenytan, det plaskar till, då blir det ju också en cirkel.
5. Inkluderande	avser när läraren inkluderar *eleverna* i ett arbete där de får möjlighet att *använda* teoretiska begrepp	t	Just det? Och vad är det du tänker att du… hjälper oss med pluset?
		e	Vad händer om en hjärtformad sten kastas i vattnet?
6. Fördjupande	avser när läraren *fokuserar relationer* mellan olika begrepp som är aktuella i det fokuserade kunskapsobjektet	t	Om det nu är så att det här är *r (implicit radie)*, vad blir då denna?

Not: Tabellen visar de sex kategorierna av lärares handlingar med innehållsligt fokus som kunde identifieras i transkripten. I kolumnen t/e betyder 't' teoretiskt innehåll och 'e' betyder empiriskt innehåll. Observera att de fördjupande handlingarna enbart identifierades ihop med teoretiskt innehåll.

(2a) Lärares handlingar riktade mot empiriska begrepp

Lärares handlingar i forskningslektionerna som leder eleverna till empiriska (vardagliga) begrepp var relativt många, men vi väljer här att endast övergripande beskriva dessa handlingar, främst som kontrast till handlingar som bidrar till utforskandet av teoretiska begrepp. Exempel på introducerande handlingar är när läraren första gången nämnde cirkel genom att hänvisa till en tänkt gemensam erfarenhet av att kasta en sten i vattnet i uppgift 1. Läraren knöt sedan vid flera tillfällen tillbaka till stenkastningen och cirklarna den ger upphov till. Läraren stödde ett fortsatt fokus på ringarna i vattnet genom att bekräfta det eleverna sa, att ringarna blev större och större (bekräftande handling). När eleverna i forskningslektion två lade stort fokus på att mäta runt om cirkeln, det vill säga omkretsen, provocerade läraren eleverna med frågor som ”Hur långt är avståndet om vi mäter tvärs igenom cirkeln?”. Provocerande handlingar, det vill säga när läraren gjorde nästan överdrifter, förekom även när läraren frågade hur ringarna på vattnet ser ut när en fisk tittar upp till ytan. Läraren försökte inkludera elever som kunde misstänkas tappa fokus genom att hitta på flera liknande frågor, exempelvis om att man kastar en hjärtformad sten i vattnet. Alla dessa exempel med fiskar och andra former på stenar medförde dock att diskussionen i klassrummet än mer fokuserade på hur cirklarna såg ut (stora, små eller om de kunde ha annan form än en cirkel) medan begrepp relaterade till en cirkel hamnade i skymundan.

(2b) Lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp

Här presenteras lärares handlingar riktade mot teoretiska begrepp.

1. Introducerande handlingar

Introducerande handlingar avser lärarens uppmaningar eller frågor som riktar elevernas uppmärksamhet mot teoretiska begrepp som relaterar till cirkel.

I forskningslektion ett och två tenderade diskussionen i klassrummet att handla om hur cirkeln och ovalen skiljde sig åt till sitt utseende. Eleverna beskrev exempelvis att avståndet tvärs över en cirkel är lika långt överallt men längre på ett ställe i en oval. Detta innebar att eleverna fokuserade cirkeln på empirisk grund snarare än att de fokuserade begreppen mittpunkt och radie. Forskningslektion tre inleddes därför med att läraren gav eleverna i uppdrag att konstruera den största cirkel som fick plats i en given kvadrat (se figur 1). Läraren introducerade uppgiften enligt excerpt 1, med en uppmaning som innehöll de matematiska begreppen cirkel och kvadrat.

Excerpt 1

Lärare:	Konstruera den största cirkeln som får plats inuti den här kvadraten.
Elev 1:	[Ritar en cirkel-liknande figur i kvadratramen. Linjen pojken ritar följer konturerna för kvadraten]
Lärare:	[Pekar på figuren pojken nyss ritade] Vad säger du om den här? [Pekar på en annan elev]
Elev 2:	Det går att göra större. [Går till tavlan och gör en ny ”cirkel” som följer konturerna för kvadraten i större utsträckning än den ritning som elev 1 gjort, se figur 3]
Elev 3:	Det där ser mer ut som en kvadrat. [Pekar på den figur som elev 2 konstruerade]
Elev 4:	Kvadrat-cirkel.

Att läraren, i enlighet med excerpt 1, använder cirkel och kvadrat utan att själv förklara hur den största cirkeln kan konstrueras, tolkas som en introducerande handling vilken främjar elevernas möjlighet att identifiera problemet. Problemet handlade alltså om att en cirkel och kvadrat både är lika och skiljer sig åt. Lärarens handlingar med att uppmana, peka och fråga fungerade på så vis främjande för elevernas utforskande. Handlingarna fungerade främjande för att eleverna börjar ta i bruk begreppen cirkel och kvadrat genom ordet kvadratcirkel och konstruktionen i figur 3.

Figur 3

Rekonstruktion av elevernas kvadratcirkel

Not. Figuren visar hur flera elever försökt konstruera cirklar i kvadraten. Elevernas konstruktioner är inte helt runda utan följer i viss utsträckning kvadratens form.

2. Tillbakaknytande handlingar

Tillbakaknytande handlingar avser återkoppling till teoretiska begrepp som nämns av elever. Ett exempel är hämtat ur forskningslektion tre där läraren kopplar tillbaka till benämningen kvadratcirkel (se excerpt 2).

Excerpt 2

Elev 2:	[Går till tavlan och konstruerar en "cirkel" som följer konturerna för kvadraten]
Elev 3:	Det där ser mer ut som en kvadrat.
Elev 4:	Kvadrat-cirkel.
Lärare:	Kan vi säga något om den här? Den såg ut som en kvadrat-cirkel.
Elev 4:	Jag tycker inte det där är en cirkel. Det är en kvadrat med runda kanter.

Läraren tar alltså hjälp av elevernas förslag ”kvadrat-cirkel” och knyter tillbaka till den figur som en av eleverna hade konstruerat på tavlan. Den kategori av handlingar som kommer till uttryck i excerpt 2 har på det här viset funktionen att repetera ett svar som eleverna hade givit genom att knyta tillbaka till begrepp som redan nämnts av eleverna. Läraren sa alltså inte bara ”bra” eller ”rätt”, utan knöt i stället tillbaka till elevens svar så att de fortsatte att reflektera över det matematiska innehållet. På så sätt upprätthölls och vidareutvecklades en lärandeverksamhet.

Sammantaget fokuserar tillbakaknytande handlingar på det teoretiska innehållet genom att läraren upprepar och uppmanar eleverna att precisera eller reflektera över varandras svar. Lärarens frågor tar fasta på att eleven 1) använder begreppet cirkel och 2) knyter tillbaka till begreppet cirkel. Det är alltså begreppet som åsyftas i de tillbakaknytande handlingarna.

3. Bekräftande handlingar

Bekräftande handlingar avser handlingar som fokuserar på specifika innehållsliga detaljer i elevernas reflektioner. I denna bekräftelse använder läraren en elevkonstruktion i kombination med vad- och hur-frågor såsom excerpt 3 visar.

Excerpt 3

Lärare:	Kan vi säga något om den här? Den såg ut som en kvadratcirkel tyckte vi. [Pekar runt den figur som eleven konstruerade inuti kvadraten, se figur 3] Vad är det som man nu tänker på om det är en cirkel? Vad är det som gör att man kan veta att det är en cirkel?

Elev 5:	Cirklar är helt runda liksom de är runda som kvadrater. [Pekar på cirklarna som är inskrivna i kvadraten och avser att den inskrivna cirkeln nuddar mitten av kvadratens sida, se figur 3]
Elev 6:	Cirklar är helt runda, ja …
Lärare:	Hur skulle den här kunna bli bättre? Den här var lite lik kvadraten. [Pekar runt i cirkeln i kvadraten och sträcker armarna mot eleverna som är med och reflekterar]

I ovanstående excerpt bekräftar läraren elevens beskrivning av likheten mellan kvadraten och cirkeln (det vill säga att cirkelbågen nuddar mitten av kvadratens sida) begreppet cirkel med två vad- och en hur-fråga föranledd av ”kvadratcirkel” som elev 4 tidigare utvecklade i excerpt 2. Läraren bekräftar alltså elevens förslag genom att 1) använda ordet kvadratcirkel och, 2) peka runt den figur som eleven konstruerade. Vad-frågorna leder till att eleverna beskriver en egenskap som dels är lika, dels olika mellan cirkel och kvadrat, att cirklar är runda kvadrater, vilket tolkas som att andra egenskaper som exempelvis att olika avstånd är lika på motsvarande sätt i en cirkel och en kvadrat. Sidorna i en kvadrat har samma längd, precis som diametern i en cirkel har samma längd var man än mäter den. Läraren bekräftar att figurerna är olika, samtidigt som handlingarna bekräftar eleverna så att de fortsätter att leta efter fler bevis för skillnaderna mellan en kvadrat och en cirkel. Detta skapar i sin tur ett behov hos eleverna av fler begrepp relaterade till cirkel. Sammantaget innebär bekräftande handlingar att läraren möjliggör ett teoretiskt prövande av begrepp genom att bekräfta vad eleverna ser, men också ber dem reflektera bortom det visuellt uppenbara.

4. Provocerande handlingar

Provocerande handlingar avser handlingar som läraren iscensätter i avsikt att eleverna ytterligare skulle utforska ett teoretiskt begrepp. Dessa handlingar kan vara följdfrågor till något som en elev säger eller gör och som provocerar eleverna att föra sina antaganden i bevis, om cirkelns mittpunkt och diameter. Ett exempel på en sådan handling presenteras i excerpt 4 från forskningslektion tre, där läraren ställer följdfrågor om det plustecken en av eleverna har ritat i ”kvadrat-cirkeln” och kallat för mittpunkt.

Excerpt 4

Elev 4:	[Ritar ett plustecken nere till vänster i kvadrat-cirkeln som är konstruerad på tavlan]
Lärare:	Kan mittpunkten finnas på många ställen?
Elever:	Nej. Bara där. [Pekar i cirkeln]
Elev 2:	[Ber att få komma till tavlan och ritar ett halvstort plustecken i mitten på kvadraten på fri hand] Man kan rita som ett plus. Sen kan man rita runt och använda pluset.
Lärare:	Gäller detta i alla kvadrater och alla cirklar? Var måste diametern finnas?
Elev 2:	Om dom är tillsammans. [Pekar ut ett streck som går igenom mittpunkten]

Läraren provocerar här eleverna att utforska relationen mellan mittpunkt och diameter genom att fråga huruvida mittpunkten i en cirkel kan finnas på många ställen. Eleven som svarar säger att cirkeln kan ritas runt plustecknet, vilket kan tolkas som att eleven menar att det finns en mittpunkt som på något sätt kan användas för att lösa uppgiften, att rita en så stor cirkel som möjligt innanför kvadraten. Lärarens fråga bidrar till att eleverna fortsätter utforskandet av och reflektionerna om begreppet mittpunkt.

Sammantaget handlar denna kategori om att läraren ställer frågor som provocerar elevernas tidigare oreflekterade kunnande om relationerna mellan begreppen.

5. Inkluderande handlingar

Inkluderande handlingar avser att skapa möjligheter för elever att använda teoretiska begrepp relaterade till ett specifikt kunskapsobjekt, genom att handlingar tar utgångspunkt i det någon eller några elever har uttryckt verbalt eller visuellt.

Nedanstående excerpt, excerpt 5, inleds med att elev 2 reflekterar över cirkelns mittpunkt genom att rita ett plustecken som är ganska nära mitten i kvadraten och sedan förklarar hur det tecknet kan användas för att konstruera en cirkel.

Excerpt 5

Lärare:	Just det! [Tittar på det plustecken som elev 2 ritat i mitten av kvadraten] Och vad är det du tänker att du … hjälper oss med pluset?
Elev 2:	Det är svårt att se.
Lärare:	Ser alla vad hon gjort? Vad tycker ni att hon gjort?
Elev 4:	Hon har delat en pizza.
Elev 10:	Den är en mindre version av den.
Lärare:	Vad är det som ni har lagt till här nu för att rita en cirkel? [Läraren pekar på plustecknet]
Elev 3:	Pluset gör att den nuddar kanterna. Den når till kanten.

Efter ett flertal uppföljande frågor, där läraren hela tiden tar utgångspunkt i det någon eller några elever har uttryckt verbalt eller visuellt, syns hur elev 3 relaterar pluset, mittpunkten, till cirkelbåge genom att beskriva att ”Pluset gör att den nuddar kanterna”. Läraren inkluderar eleverna så att de utvecklar sina reflektioner om mittpunkten genom att ställa frågor om det plustecken som elev 2 inledningsvis ritar på tavlan. Genom sina frågor inkluderar läraren eleverna i reflekterande samtal om relationen mellan cirkelns mittpunkt och avståndet till cirkelbågen, vilket även skapar ett behov hos eleverna att använda begreppet mittpunkt men också att de uppmärksammar relationen mellan mittpunkten och mitten av kvadratens sidor.

Sammantaget avser de inkluderande handlingarna att läraren utgår från elevernas svar och använder dem för att ytterligare främja reflektioner över begreppet. Läraren inkluderar alltså eleverna i ett gemensamt arbete, genom att ta utgångspunkt i det någon elev har sagt och fortsätta att ställa frågor som främjar elevernas sökande efter fler bevis och deras användande av teoretiska begrepp kopplade till kunskapsobjektet.

6. Fördjupande handlingar

Fördjupande handlingar avser att rikta elevernas fokus mot relationer mellan begrepp kopplade till ett specifikt kunskapsinnehåll. I excerpten, excerpt 6 och excerpt 7, nedan tar läraren utgångspunkt i elevernas resonemang om radien som benämns med ”r”.

Excerpt 6

Lärare:	Om det nu är så att det här är "r", vad blir då denna? [Läraren pekar på diametern i cirkeln som är ritad på tavlan där radien är markerad med ”r”] Är det viktigt vilken sträcka som är "r"? Kan “r” finnas var som helst och hur som helst i cirkeln?
Elev 10:	”r” är emellan. [Pekar med armen fram och tillbaka]
Lärare:	Mellan här. [Pekar mellan cirkelbågen och mittpunkten]

Lärarens fördjupar här samtalet gällande relationer mellan begreppen cirkelns radie och mittpunkten genom att ställa flera frågor som kan skapa ett behov hos eleverna att använda begreppen.

I en annan sekvens, excerpt 7, ställer läraren en fördjupande fråga som handlar om diameterns längd, vilket inbjuder elev 7, 8 och 9 till att fokusera på begreppen mittpunkt och cirkelbåge (ej verbalt men med gester).

Excerpt 7

Lärare:	Vad vet vi om diametern som sträcka?
Elev 7:	Man måste försöka se att det är lika långt från. [Pekar med två händer i luften]
Elev 8:	Lika långt. Lika långt här och dit och här och dit. [Pekar på mittpunkten och cirkelbågen på olika ställen, det vill säga på två radier som är tänkta att finnas tvärs över varandra]
Elev 9:	Man kan kolla på klockan. Där är ju en mittenpunkt.

Lärarens handlingar i excerpt 6 och 7 främjar elevernas utforskande och användande av begreppen radie, diameter och cirkelbåge samt resonemang om hur de relaterar till varandra och till cirkeln. När läraren ställer frågor som ”Vad vet vi om diametern som sträcka?” främjar hon ett fördjupande resonemang, i vilket eleverna använder begreppen verbalt och med gester.

Sammantaget handlar de fördjupande handlingarna om att läraren utmanar eleverna att fördjupa sina resonemang kring relationer mellan begrepp kopplade till ett specifikt kunskapsinnehåll. Läraren ställer frågor som främjar elevernas användande av teoretiska begrepp och deras inbördes relation.

Sammanfattning

Sammanfattningsvis visar resultatet att lärarens handlingar har betydelse för såväl organiserandet av praktiska detaljer i undervisning – gällande exempelvis vilka elever som ska arbeta på tavlan eller vilka som ska svara på frågor – som att hålla fokus på de teoretiska begreppen exempelvis cirkel, mittpunkt och diameter. Sex kategorier av handlingar framträder som betydelsefulla för att etablera, utveckla och upprätthålla lärandeverksamhet. I början av lektionen introducerar läraren en problemsituation där begreppen behöver användas, för att sedan knytas tillbaka till, och bekräftas då eleverna tar dem i bruk. Lärarens frågor och påståenden tycks även kunna provocera gruppen att använda begrepp och inkludera eleverna i ett fortsatt teoretiskt arbete som kan leda till fördjupande resonemang. De sex handlingarna kan främja en verksamhet där eleverna utmanas att utforska, ta i bruk och reflektera över begreppsliga strukturer kopplade till ett specifikt kunskapsobjekt.

Diskussion

Artikelns syfte är att identifiera och diskutera lärares handlingar som främjar en verksamhet där eleverna utmanas att utforska, ta i bruk och reflektera över begrepp kopplade till cirkel. Inledningsvis förs en diskussion kring lärares handlingar som riktar elevers samtal mot teoretiska begrepp och hur de kan främja etablerandet och upprätthållandet av en lärandeverksamhet. Avslutningsvis diskuteras vårt kunskapsbidrag och några didaktiska implikationer.

För att främja elevers teoretiska arbete behöver läraren stötta eleverna att identifiera ett problem där ett specifikt begrepp behövs. Vidare möjliggör läraren för eleverna att arbeta med modeller för begreppet, reflektera över både modeller och begrepp samt reflektera över hur väl modellerna fungerar för att lösa problemet (Davydov, 2008). Det var först i uppgift 2 som eleverna identifierade problemet med var mittpunkten är placerad i relation till cirkelns diameter. I den uppgiften identifierade de också relationen mellan diameter och radie samt relationen mellan mittpunkten och cirkelbågen. Behovet av att veta radien för att kunna konstruera en så stor cirkel som möjligt identifierades med stöd av lärarens introducerande handlingar. Lärarens tillbakaknytande, bekräftande och inkluderande handlingar är alla tre av liknande karaktär, då läraren här tar fasta på elevernas reflektioner, och på olika vis gör deras reflektioner meningsfulla genom att upprepa och inkludera dem i kommande utmaningar. Enligt annan matematikdidaktisk forskning uppskattar elever, som tidigare nämnts, att lärare lyssnar och ger återkoppling (Lim m.fl., 2020). Återkoppling är dock, som framgår av vårt resultat, en del av det en lärare behöver göra för att engagera elever att reflektera över teoretiska begrepp. Lärarna provocerade eleverna genom att påvisa vad ett begrepp inte är eller genom att uppmärksamma relationer som inte gäller, exempelvis som när läraren frågade om mittpunkten kan finns på flera ställen i kvadrater och cirklar. Fördjupande handlingar identifierades endast i handlingar riktade mot ett teoretiskt innehåll. De utvecklades i slutet av den tredje lektionen, där läraren exempelvis frågade vad eleverna vet om diametern. Den frågan skulle kunna utgöra en uppstart på en uppföljande lektion där begreppet diameter utforskas.

De lärarhandlingar som enligt resultatet främjade elevers utforskande av de teoretiska begreppen behöver lärare känna till. Om lärare är medvetna om de olika handlingarna kan de, tillsammans med kollegor, reflektera över hur de kan agera i klassrummet för att elever ska få möjlighet att utforska teoretiska begrepp (Repkin, 2003). Det är således nödvändigt att som lärare reflektera över vad det innebär att leda en lärandeverksamhet och att olika lärarhandlingar kan ge olika möjligheter för elever att utveckla lärandeverksamhet (Davydov, 2008). Elevgrupper som över tid blir alltmer vana att utveckla lärandehandlingar brukar så småningom behöva mindre stöd av läraren (Repkin, 2003; Zuckerman, 2004, 2007).

Uppgifterna i forskningslektionerna följde inte stegen i van Hieles (1986) modell för hur geometriskt tänkande bör utvecklas, där empiriska figurer först ska identifieras av eleverna innan de börjar arbeta med teoretiska begrepp gällande geometri. Enligt van Hiele bör läraren först visa visuella figurer och använda ett vardagsspråk för att göra det möjligt för eleverna att inleda ett geometriskt tänkande (Vojkuvkova, 2012). I forskningslektionerna utmanades i stället eleverna med de teoretiska begreppen mittpunkt, radie, cirkelbåge och diameter redan i själva utforskandet av begreppet cirkel. Speciellt i forskningslektion tre startade vi, i motsats till van Hiele, med att eleverna fick reflektera över hur en så stor cirkel som möjligt kan ritas i en given kvadrat med hjälp av teoretiska begrepp. Det är sålunda möjligt att introducera det geometriska begreppet cirkel med hjälp av de teoretiska begreppen.

Utifrån våra erfarenheter av att utveckla lärandeverksamhet tillsammans med elever, och att handleda andra lärare i motsvarande situation, har vi upplevt ett behov av att diskutera vad en lärares handlingar består i, som kan främja elevers utveckling av lärandehandlingar. Vi har erfarenheter från egen undervisning, att spontant fånga och gå vidare med elevers reflektioner, men vi har ibland en känsla av att ha glömt eller missat detaljer och därmed i stället för att möjliggöra för eleverna att utveckla lärandehandlingar eller lärandemodeller, släckt dessa möjligheter (Björk, 2023; Eriksson, 2021; Fred, 2019). Mycket av det som vi lärare gör, som siktar på utveckling av en lärandeverksamhet, är sådant som lärare gör även i annan undervisning, men lärarstödet i en lärandeverksamhet innebär dock ett något annorlunda arbete. Det vi ser som styrkan i lärandeverksamhet är kopplingen mellan det matematiska innehållet i undervisningen och lärarens handlingar som kan främja ett samtal riktat mot teoretiska begrepp. Det som också skiljer är idén i lärandeverksamhet om att utforskandet av teoretiska begrepp ska drivas av eleverna. Lärandeverksamhet som didaktiskt ramverk (Davydov, 2008) tillhandahåller en struktur för vad elever behöver utveckla för ett sådant utforskande och denna struktur kan stödjas genom lärarens handlingar. Dessa handlingar behöver explicitgöras både vad gäller hur de kan genomföras och för vilket teoretiskt innehåll de bör riktas mot. Handlingarna behöver också bli explicita och medvetna för att lärare tillsammans ska kunna diskutera och reflektera över dem. Resultatkategorierna, med handlingar som riktas mot teoretiska begrepp, utgör i det fallet en möjlig utgångspunkt i kollegiala samtal om hur lärandeverksamhet kan utvecklas i undervisning. Vidare kan kategorierna av handlingar som riktas mot teoretiska begrepp användas för att, tillsammans med lärare, problematisera lärarens stöd till elever i en lärandeverksamhet även för andra kunskapsinnehåll.

Avslutningsvis tror vi att vi har identifierat handlingar som lärare kan utveckla för att främja elevers möjligheter att utveckla lärandeverksamheter som, i vår studie, rör begreppet cirkel. Vi är dock väl medvetna om att fler studier behöver göras för att i detalj verifiera och förfina beskrivningen av lärares handlingar och för att utforska motsvarande handlingar gällande kunnande om andra begrepp.

Tack
Vi riktar ett stort tack till Helge Ax:son Johnsons stiftelse som gjort arbetet med den här artikeln möjligt. Vi riktar även ett stort tack till de lärare och elever som deltagit i studien, samt till Fia Ek och Annika Petersson för deras bidrag i förarbetet.

Referenser

Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A. & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecken i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1. *Forskning om undervisning och lärande*, (10), 29–49. https://doi.org/10.61998/forskul.v1i10.27607

Arievitch, I. & Haenen, J. (2005). Connecting sociocultural theory and educational practice: Galperin's approach. *Educational Psychologist*, *40*(3), 155–165. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4003_2

Björk, M. (2023). *Att främja elevers teoretiska utforskande av bassystemet – en undervisningsutvecklande studie i matematik på mellanstadiet.* [Licentiatuppsats, Stockholms universitet]. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3Anbn%3Ase%3Asu%3Adiva-214255

Broman, A., Waermö, M. & Chudinova, E. (2022). The modelling in developmental education: A condition for theoretical abstraction and generalization. *Revista Educativa – Revista de Educação*, *25*(1), 1–25. https://doi.org/10.18224/educ.v25i1.12762

Carlgren, I. (2017). *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Lerning study*. Gleerups.

Davis, B. (1997). Listening for difference: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 355–376. https://doi.org/10.2307/749785

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (J. Teller, Övers.). National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study* (2 uppl.). Nova Science Publishers.

Eriksson, H. (2021). *Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksamhet: En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klasser i grundskolans tidigaste årskurser.* [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. http://su.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1529155&dswid=-2891

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study* (s. 61–85). Gleerups.

Eriksson, I. & Jansson, A. (2017). Designing algebraic tasks for 7-year-old students – a pilot project inspired by Davydov's learning activity. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(2), 257–272. https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i2.67

Eriksson, I. & Polotskaia, E. (2017). Editorial. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *18*(2), 132–135.
Fred, J. (2019). *Att etablera och upprätthålla ett algebraiskt arbete i årskurs 2 och 3: En undervisningsutvecklande studie med matematiska mönster som innehåll.* [Licentiatuppsats, Stockholms universitet]. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-176382
Hintz, A. & Tyson, K. (2015). Complex listening: Supporting students to listen as mathematical sense makers. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(4), 296–326. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1084850
Jones, K., Maschietto, M., Doze, J. & Papadaki, C. (2019). Introduction to the papers of TWG04: Geometry teaching and learning. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics education*. Utrecht University, Erme.
Kilhamn, C. & Säljö, R. (2019). *Encountering algebra. A comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17577-1_4
Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Nationellt Centrum för Matematik.
Liljedahl, P. (2022). *Att bygga tänkande klassrum i matematik*. Gleerups.
Lim, W., Lee, J., Tyson, K., Kim, H. & Kim, J. (2020). An integral part of facilitating mathematical discussions: Follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 377–398. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3
Mergenthaler, E. & Stinson, C. (1992). Psychotherapy transcription standards. *Psychotherapy Research*, *2*(2), 125–142. https://doi.org/10.1080/10503309212331332904
Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 249–266. https://doi.org/10.1007/BF01273731
Moxhay, P. (2008). Assessing the scientific concept of number in primary school children. *International Society for Cultural-historical Activity Research* (s. 1–24). San Diego: ISCAR.
Radford, L. & Roth, W.-M. (2017). Alienation in mathematics education: a problem solving considered from neo-Vygotskian approaches. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(3), 367–380. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9769-0
Repkin, V. (2003). Developmental teaching and learning activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, *41*(5), 10–33.
Serin, H. (2018). Perspectives on the teaching of geometry: Teaching and learning methods. *Journal of Education and Training*, *5*(1), 131–137. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_10
Sinclair, N., Bartollini Bussi, M., Villers, M., Jones, K., Kortenkamp, K., Leung, U. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *48*, 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6
Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed* [elektronisk resurs].
Vygotsky, L. (1963). Learning and mental development at school age. I B. Simon & J. Simon (Red.), *Educational Psychology in the U.S.S.R.* (s. 21–34). Rutledge & Kegan Paul.
Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological process*. Harvard University.
Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477. https://doi.org/10.2307/749877

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, *XIX*(1), 9–18. https://doi.org/10.1007/BF03173234

Zuckerman, G. (2007). Supporting children's initiative. *Journal of Russian and East European Psychology*, *45*(3), 9–42. https://doi.org/10.2753/RPO1061-0405450301

Författarpresentationer

Helena Eriksson

Helena Eriksson är fil.dr och lektor i kombinerad tjänst mellan Borlänge kommun, Högskolan Dalarna och Stockholms universitet med intresse för undervisningsutvecklande forskning.

Marie Björk

Marie Björk är fil.lic. i specialpedagogik, lektor i Stockholms stad och arbetar som speciallärare i matematik på Björkhagens skola i Stockholm. Hennes forskningsintresse rör främst undervisningsutveckling och elevers lärande i grundskolan.

Jenny Fred

Jenny Fred är fil.lic. i matematikämnets didaktik och har en kombinerad tjänst som lärarutbildare och doktorand på Institutionen för ämnesdidaktik på Stockholms universitet. Hennes forskning handlar om hur undervisningen i algebra, för elever i årskurs F-3, kan integrera hållbarhetsfrågor som något mer än en kontext.

Gunilla Pettersson Berggren

Gunilla Pettersson Berggren är grundskollärare och förstelärare på Sjöstadsskolan i Stockholm. Hon är fil.mag/master i didaktik från Stockholms universitet. Hennes forskningsintresse rör undervisningsutveckling tillsammans med verksamma lärare.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 3, 2024, 39–59

Undervisning som utvecklar elevers förmåga att förstå likvärdiga bråk

Orginalartikel

Cecilia Sveider[1]*, Anja Thorsten[1] & Joakim Samuelsson[1]

Sammanfattning

Syftet med studien, som ligger till grund för artikeln, är att bidra med kunskap om vilka möjligheter elever får för att lära sig förstå likvärdiga bråk vid olika lektionsdesigner. För att besvara detta syfte genomfördes en Learning study i tre cykler i årskurs 5 med 58 elever. Elevernas möjligheter till lärande analyserades både kvalitativt genom observation av undervisningen och kvantitativt genom test där eleverna fick visa sina kunskaper om likvärdiga bråk före och efter lektionerna. Lektionerna designades med stöd av variationsteori och matematikdidaktisk forskning. Resultaten visar att eleverna utvecklade sin förmåga i alla tre cykler, särskilt i den sista. Framgångsfaktorer i undervisningen inkluderade lärarens användning av kontraster, tallinjen och ett strukturerat sätt att hantera elevernas svar. Dessa faktorer visade sig vara effektiva för att främja elevernas lärande. Studiens resultat kan användas som underlag för lärare och forskare för att ytterligare öka kunskapen om hur undervisningen kan möjliggöra att elever lär sig förstå likvärdiga bråk.

Nyckelord: matematikundervisning, likvärdiga bråk, learning study, variationsteori

Abstract

The aim of the study is to contribute knowledge about the opportunities students get to learn to understand equivalent fractions through various enacted objects of learning in different lesson designs. To address this, a Learning study was conducted in three cycles in grade 5 with 58 students. Students' learning opportunities were analyzed both qualitatively through observations and quantitatively through tests where students demonstrated their knowledge of equivalent fractions before and after the lessons. Lessons were designed with the support of variation theory and mathematics education research. Results show that students improved their ability in all three cycles, especially the last one. Success factors included the teacher's use of contrasts, the number line, and a structured approach to student responses. These factors proved effective in promoting students' learning. Teachers and researchers can use the study's results to increase understanding of how teaching can enable students to learn equivalent fractions.

Keywords: Mathematics education, Equivalent fraction, Learning study, Variation theory

[1] Linköpings universitet

*Korresponderande författare:
Cecilia Sveider
cecilia.sveider@liu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s. 39–59
DOI: 10.61998/forskul.v12i3.26656
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-10-14

Introduktion

Rationella tal i bråkform är en central del av matematikundervisningen (Pedersen & Bjerre, 2021) och anses vara ett av de mest komplexa och utmanande områdena för elever att förstå (Barbieri m.fl.,2020; Fazio m.fl., 2016; Schneider & Siegler, 2010). För läsbarheten använder vi framöver enbart uttrycket *bråk*. Det avser då rationella tal i bråkform, det vill säga tal som uttrycks av formen $^{a}/_{b}$, där a och b tillhör heltalen (jfr Kiselmann & Mouwitz, 2008). En särskilt utmanande aspekt för elever är att förstå likvärdiga bråk, det vill säga bråk som representerar samma värde trots att de har olika täljare och nämnare (Kamii & Clark, 1995; Wong, 2010).

Elevers kunskaper om likvärdiga bråk är avgörande för deras förståelse av bråk och deras förmåga att utföra bråkberäkningar (Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007). För att anses ha förståelse för likvärdiga bråk behöver eleverna kunna se bråk som en mängd som mäts i relation till en referensenhet, konstruera bråk med hjälp av konkreta eller visuella representationer, använda symboliska representationer för att konstruera likvärdiga bråk, samt inse att likvärdiga bråk representerar samma mängd (Cathcart m.fl., 2006; Lamon, 2020). Dessutom behöver eleverna förstå det multiplikativa förhållandet hos likvärdiga bråk, vilket innebär att de kan identifiera sambandet mellan täljare och nämnare (Hecht m.fl., 2003; Van Steenbrugge m.fl., 2014) och förstå att ett bråk kan ha samma värde även om dess täljare och nämnare är olika. Att förstå likvärdiga bråk kräver en integrering och kombination av dessa aspekter (Wong, 2010).

Elever möter flera utmaningar när det gäller likvärdiga bråk. En av dessa är utmaningar är svårigheten att identifiera likvärdighet när bråken har olika uttryck och kräver förlängning med stora tal, som att förstå att $^{2}/_{3}$ och $^{28}/_{42}$ är likvärdiga (Boyer & Levine, 2012; Huinkers, 2002). Vissa elever kan även felaktigt tro att bråk är likvärdiga om de innehåller samma siffror, exempelvis att $^{2}/_{3}$ skulle vara likvärdigt med $^{3}/_{2}$ (Erlwanger, 1973; Skolverket, 2008). Elever tenderar att förbise att täljare och nämnare byter plats och anser detta vara irrelevant. En annan utmaning som påverkar elevers förmåga att uppfatta likvärdigheten är deras uppfattning av täljaren och nämnaren som separata heltal i stället för som en enhet, vilket gör att $^{2}/_{3}$ inte uppfattas som likvärdigt med $^{4}/_{6}$ (Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007; Tian m.fl., 2021). Elevers förståelse av likvärdiga bråk påverkas också av en bias mot heltalet, vilket innebär att de inte ser bråk som proportioner mellan två relaterade heltal som är kopplade till täljare och nämnare. Detta kan påverka deras förmåga att förstå att ett bråk kan uttryckas på olika sätt (Rodrigues m.fl., 2016; Siegler & Pyke, 2013). Flera studier har belyst dessa utmaningar i elevers bråkförståelse. Däremot behövs fortfarande mer kunskap om hur undervisningen kan designas för att eleverna ska utveckla detta kunnande (Lee m.fl., 2011; Mills, 2016). I flera tidigare studier (t.ex. Maunula, 2018; Sveider, 2021) har matematikundervisning analyserats med hjälp av variationsteorin, eftersom den fokuserar på relationen mellan undervisningen och lärandet av ett ämnesinnehåll. Föreliggande studie syftar till att bidra med kunskap om vilka möjligheter elever får för att lära sig förstå likvärdiga bråk vid olika lektionsdesigner.

Bråkundervisning

När lärare undervisar elever om bråk måste de ta hänsyn flera aspekter, såsom val av representationer (Sveider, 2021), exempel (Sun, 2015; Watson & Mason, 2006) och hur elevsvar hanteras (Maunula, 2018; Karlsson & Wennergren, 2014). Tidigare forskning visar att lärare använder olika representationer, som areamodeller och längd- eller linjemodeller (tallinjen), för att fördjupa elevernas förståelse av bråk (Van de Walle m.fl., 2018). Visuella modeller, såsom areamodeller med både cirkulära och rektangulära figurer används för att illustrera hur bråk utgör en del av en helhet (Sidney m.fl., 2019; Tunç -Pekkan, 2015). Även om areamodeller ofta används i undervisning om bråk finns det olika åsikter om deras effektivitet (Moss, 2005; Vig m.fl., 2014).

En lärare som däremot vill att eleverna ska förstå att ett bråk är ett tal som kan representeras som en position på en tallinje (se Cramer m.fl., 2019; Eriksson, 2015) kan använda längd- eller linjemodeller (Schumacher m.fl., 2018). Hamdan och Gunderson (2017) visade att elever som placerade bråk på en tallinje var mer framgångsrika vid jämförelse av bråk än de som använde areamodeller. Vikten av tallinjen i undervisning om bråk, där fokus riktas mot bråkets storlek, har betonats av flera forskare (t.ex. Baribieri m.fl, 2020; Cramer m.fl., 2019; Fuchs m.fl., 2017; Jordan m.fl., 2017; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Siegler m.fl., 2010). En fördel med att använda tallinjen är att den även kan användas för att representera negativa bråk och bråk som är mycket stora (Fuchs m.fl., 2021).

För att underlätta elevernas förståelse av bråk är det avgörande att läraren aktivt integrerar olika representationer i undervisningen, oavsett om de är konkreta, visuella bilder eller abstrakta symboler. Det är särskilt viktigt att koppla de visuella bilderna till de abstrakta representationerna (Flores. m.fl., 2018; Hudson & Miller, 2006), vilket kan hjälpa eleverna att fokusera på de centrala aspekterna av det matematiska innehållet och därigenom uppnå en djupare förståelse av matematiska begrepp (Dündar, 2015; Ekdahl, 2019; Lesh, 1981).

Forskning om hur olika undervisningsmetoder i helklass hjälper elever att tillägna sig kunskaper om likvärdiga bråk är begränsad. Tidigare studier har framför allt studerat individuell eller gruppvis undervisning med elever som beskrivs ha matematiksvårigheter (t.ex. Dyson m.fl., 2020; Eriksson, 2015; Flores m.fl., 2018; Siegler m.fl., 2011). Tidigare studier har exempelvis undersökt effekter av specifika *undervisningsmetoder* som explicit undervisning (t.ex. Ennis & Losiniski, 2019). Andra studier har utvärderat effektiviteten hos ett *matematikprogram*, så som Fraction Face Off! (FFO!), för fjärdeklassare (t.ex. Fuchs m.fl., 2013). Det finns även studier (t.ex. Wang m.fl., 2019) som har studerat elevers *självreglering*, där eleverna själva fick sätta upp mål, skatta sig själva och fick stöd i positivt tänkande. Det finns några studier om undervisning om likvärdiga bråk, såsom Levenson (2010) och Inagaki med flera (1999). I Levensons (2010) studie undersöktes vilken typ av *förklaring* eleverna föredrog i undervisningen om likvärdiga bråk. Resultaten visade att elever som bedömdes vara högpresterande elever föredrog förklaringar som innehöll abstrakta symboler, medan elever som bedömdes som medelpresterande eller lågpresterande elever föredrog förklaringar där bilder användes för att visualisera likvärdiga bråk. I Inagaki med flera (1999) observerades amerikanska och japanska matematiklektioner för att undersöka *feedback och frågor* från lärare, samt hur mycket tid som ägnades åt detta.

Resultaten visade ingen skillnad i interaktionstid mellan amerikanska och japanska matematiklektioner. Däremot hade de amerikanska lektionerna över tre gånger så många interaktioner. Under de amerikanska lektionerna bad lärarna eleverna att berätta vilken procedur de använt, medan de japanska lärarna uppmanade eleverna att förklara och motivera sina procedurer. De japanska elevernas svar var mer komplexa, och lärarna involverade andra elever i interaktionen, vilket gav dem möjlighet att utveckla resonemang och argumentation för sina procedurer. Studien visade att de japanska eleverna erbjöds mer generell förståelse som kunde appliceras på olika uppgifter än de amerikanska elever, trots liknande interaktionstid och matematikinnehåll. Ovanstående forskningsresultat har varit vägledande i konstruktionen av våra lektioner.

Variationsteori

En ytterligare utgångspunkt för våra lektioner och analys av dem är variationsteori. Grundläggande i teorin är att lärande alltid är riktat mot något, *ett lärandeobjekt,* (Marton, 2015). I denna studie är lärandeobjektet *att kunna identifiera bråk och att omvandla likvärdiga bråk*. För att eleverna ska kunna utveckla det avsedda kunnandet behöver de urskilja nya aspekter av lärandeobjektet som gör det möjligt att förstå det på ett nytt sätt. Dessa aspekter benämns som *kritiska aspekter* (Marton, 2015). För att undervisningen ska bli framgångsrik behöver läraren identifiera vilka aspekter som är kritiska för den aktuella elevgruppen. Det gör att undervisningen riktas mot det som är utmanande för eleverna i relation till det som är centralt för att förstå lärandeobjektet. Kritiska aspekter går att finna genom att analysera hur eleverna erfar lärandeobjektet innan de har fått undervisning (Pang & Ki, 2016). I en elevgrupp brukar det vanligen finnas ett begränsat antal sätt att förstå lärandeobjektet på.

Marton (2015) beskriver att lärande möjliggörs främst när vi erfar skillnader, inte likheter, vilket gör att det är en bra grundprincip att utgå från i undervisningen. Det innebär att kontrast och jämförelser är kraftfulla verktyg för att möjliggöra för eleverna att urskilja nya aspekter av ett lärandeobjekt. Aspekterna blir möjliga att urskilja för att en dimension av variation öppnas när två värden inom dimensionen kontrasteras (Lo, 2014; Marton, 2015). Om läraren till exempel vill att eleverna ska urskilja formen på trianglar så kan läraren öppna en dimension av variation genom att *variera* aspekten form, vilket kan göras genom att kontrastera en triangel mot en kvadrat. Andra aspekter, så som färg, storlek är däremot *invarianta*, vilket innebär att de är lika. Genom att variera den fokuserade aspekten mot en invariant bakgrund riktas elevernas uppmärksamhet mot den kritiska aspekt som är i fokus, i det föregående exemplet innebär det att själva formen. När en aspekt är utskild, bör läraren använda sig av *generalisering*. Då varieras systematiskt de aspekter som inte är kritiska, vilket innebär att en aspekt varieras i taget, samtidigt som övriga aspekter är invarianta (Lo, 2014; Marton, 2015). I föregående exempel innebär det att den fokuserade aspekten form är invariant, men att andra aspekter varieras, till exempel kan trianglar med olika vinklar jämföras för att på så sätt peka ut att det är fortfarande trianglar.

Genom att analysera hur variationsteorins grundprinciper iscensätts i undervisningen, och sätta detta i relation till elevers lärande, går det att analysera vilka lärandemöjligheter eleverna erbjöds (Marton, 2015).

Metod

En learning study (LS) genomfördes för att undersöka vilka möjligheter elever får för att lära sig förstå likvärdiga bråk vid olika lektionsdesigner. Studien genomfördes av två forskare i samarbete med två erfarna lärare. Processen bestod av tre cykler bestående av följande steg: förtest, identifiering av kritiska aspekter, planering av två lektioner, genomförande av lektionerna, eftertest och analys.

Deltagare och urval i studien

Vi valde lärare med vilka vi redan hade en kontakt, vilket innebär att urvalet var målinriktat (se Bryman, 2018). Båda lärarna var erfarna och hade visat intresse för att utveckla sin matematikundervisning. De två lärarna som deltog i studien arbetade på varsin skola men på samma ort. I studien deltog tre klasser från årskurs 5. Klasserna valdes ut för att de fanns på samma skolor som lärarna arbetade och där lärarna hade etablerat kontakt med eleverna. Total deltog 58 elever fördelade på tre klasser; cykel 1 (19 elever), cykel 2 (16 elever) och cykel 3 (23 elever). Två av klasserna var placerade på en skola, medan den tredje klassen fanns på en annan skola. Båda skolorna är kommunala och belägna i en mindre ort i mellersta Sverige.

För- och eftertest

För att utvärdera elevernas kunskaper utvecklades ett test som fungerade både före och efter undervisningen. Konsistensen mellan testen bedömdes vara 0,75 enligt Cronbachs alfa. Syftet med testet var att (a) analysera elevernas förmåga att hantera bråk och (b) utvärdera om det fanns skillnader i elevernas prestationer på uppgifter om likvärdiga bråk före och efter undervisningen (jfr Marton, 2015). För att säkerställa att eleverna förstod uppgifterna i testet, genomgick uppgifterna en pilottestning med en grupp elever som inte deltog i den aktuella undervisningen.

Testet bestod av tre kategorier (testvariabler): (1) att identifiera och skilja bråk från decimaltal, heltal, negativa tal och tal skrivna i procentform, (2) att uttrycka likvärdiga bråk med hjälp av areamodeller och (3) att uttrycka likvärdiga bråk utan hjälp av areamodeller. Syftet med den första kategorin var att bedöma elevernas kunskap om bråk som matematiskt begrepp. För att få maximala poäng behövde eleverna identifiera både ensiffriga bråk, exempelvis $\frac{7}{8}$ och tvåsiffriga bråk som $\frac{48}{63}$, som bråk. Maximalt antal poäng för denna kategori var 1 poäng. Syftet med den andra kategorin var att bedöma elevernas förmåga att, med hjälp av visuella representationer, skapa likvärdiga bråk. För att få full poäng behövde eleverna kunna rita två bråk som var likvärdiga med det ursprungliga bråket, vilket innebar att de hade samma numeriska värde. Maximalt antal poäng för denna kategori var 2 poäng. Den tredje kategorin, som utgjorde huvuddelen av testet, inkluderade tre olika typer av uppgifter. Syftet med dessa uppgifter var att bedöma elevernas förmåga att identifiera likvärdiga bråk, såsom $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, samt att identifiera bråk som inte var likvärdiga, såsom $\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{1}$. Dessutom skulle eleverna själva kunna skriva bråk som var likvärdiga med givna bråk, exempelvis $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{10}$. Den sista uppgiften inkluderades för att bedöma elevernas förmåga att hantera omvandling av nämnaren och eller täljaren. Maximalt antal poäng för denna kategori var 9 poäng. Testet genomfördes både före och efter eleverna undervisades om likvärdiga bråk. Testet genomfördes i början av studien i alla tre klasser. Samma test utfördes sedan igen i klasserna i cykel 2 och 3, för att testresultaten skulle vara nära forskningslektionerna. Resultaten från andra testomgången skilde sig enbart marginellt från den första.

Kvalitativ analys

För att få insikt om hur eleverna erfor likvärdiga bråk och för att identifiera kritiska aspekter genomfördes även en kvalitativ analys av förtesten som genomfördes i de tre klasserna. Analysen inspirerades av Pang och Kis (2016) beskrivning av att kritiska aspekter kan identifieras genom att utgå från en analys av hur elever erfar lärandeobjektet.

Initialt analyserades hur eleverna erfor bråk. Detta gjordes genom att först gruppera likartade lösningar på uppgifterna, vilket gjorde att vi kunde identifiera de olika strategier och tillvägagångssätt som eleverna använde (se första kolumnen i tabell 1). I nästa steg använde vi de identifierade strategierna för att beskriva hur eleverna erfor bråk. Vi utgick då från andra ordningens perspektiv (se Marton & Booth, 2000), vilket innebar att vi försökte beskriva hur eleverna förstår bråk. Vi ställde oss då bland annat följande frågor: *Om denna strategi används, hur förstår då eleverna bråk? När eleven löser uppgiften på detta sätt, vad fokuserar eleven på då?* På så sätt kunde vi fånga de kvalitativt skilda sätt som bråk kan erfaras som, utifrån vårt dataunderlag (se andra kolumnen i tabell 1). Detta resulterade i fem kategorier.

Baserat på dessa kategorier identifierades kritiska aspekter genom att utgå från varje kategori och analysera vad eleverna ännu inte hade urskilt och vad de behöver urskilja (se tredje kolumnen i tabell 1).

Kvantitativ analys

I den kvantitativa analysen användes beroende t-tester för att utvärdera om det fanns några medelvärdesskillnader i elevernas prestationer före och efter LS-cyklerna (1–3) på de tre testvariablerna vid både för- och eftertesten. Om det fanns en signifikant skillnad mellan för- och eftertest användes Hedges' g för att beräkna effektstorleken. Hedges' g-värden på 0,2, 0,4–0,5 och 0,8 eller högre indikerar en liten, måttlig eller betydande effekt. Om empirin inte uppfyllde kraven för normalfördelning, enligt Hair med flera (2010)[1], utfördes inga t-tester.

Arbete med lektionsdesign och analys under pågående Learning study

Lektionerna designades gemensamt av forskar-lärargruppen med utgångspunkt i variationsteorin och tidigare forskning om bråkundervisning (se bilaga 1). Syftet var att synliggöra de kritiska aspekter som identifierades i förtestet. Vi strävade efter att skapa kontraster som riktade elevernas uppmärksamhet mot de kritiska aspekterna (jfr Marton, 2015). Dessutom användes flera representationer, särskilt tallinjen (jfr Fuchs m.fl., 2017; Jordan m.fl., 2017; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Siegler m.fl., 2010), för att stödja elevernas förståelse av likvärdiga bråk.

I varje cykel höll en av de deltagande lärarna i två lektioner. Lektionerna observerades av en av forskarna och dokumenterades genom videoinspelning med hjälp av en iPad. Ett par dagar efter lektionerna genomförde eleverna eftertestet för att utvärdera deras kunskapsutveckling.

Efter varje cykel analyserades medelvärdesskillnaden mellan för- och efterresultaten. Då söktes efter vilka områden eleverna hade utvecklats på. Därefter analyserades lektionerna med fokus på hur lärandeobjektet och de kritiska aspekterna framträdde, samt om andra aspekter visade sig vara kritiska än de som hade identifierats i förtestet. Inga nya kritiska aspekter framkom på detta sätt. Efter varje cykel genomfördes däremot revideringar avseende hur de kritiska aspekterna synliggjordes.

Reanalys av lektionerna

Efter att lektionerna hade genomförts analyserades de inspelade och transkriberade lektionerna i förhållande till resultaten från för- och eftertesten ännu en gång. Analysen utfördes av de ursprungliga forskarna samt en tredje forskare som tidigare inte hade varit involverad i studien.

Baserat på variationsteoretiska antaganden (utifrån Lo, 2014; Marton, 2015) analyserades initialt varje cykel separat med fokus på hur lärandeobjektet och de kritiska aspekterna framträdde. Analysen riktades mot vad som blev i förgrunden i undervisningen. Det innebar hur läraren och eleverna pratade om dessa exempel samt hur elevsvaren användes. Analysen sattes också i relation till elevers lärande både så som det uttrycks på lektionen och det som framkom i skillnaden mellan för- och eftertest.

I nästa steg jämfördes resultaten från för- och eftertesten mellan cyklerna för att identifiera specifika undervisningsmoment där elevernas prestationer skilde sig åt. Dessa sekvenser analyserades sedan djupgående utifrån variationsteoretiska antaganden för att förstå vad som eventuellt påverkade elevernas resultat. Jämförelserna fokuserade på hur de kritiska aspekterna framträdde avseende variationsmönster och hur läraren hjälpte eleverna i att rikta sin uppmärksamhet mot dessa aspekter.

Etik

För att säkerställa efterlevnad av etiska principer (se Vetenskapsrådet, 2017) gav eleverna och deras vårdnadshavare skriftligt samtycke att delta i projektet. Samtliga elever deltog i undervisningen, förutom de som inte gav sitt medgivande att bli filmade. För att skydda elevernas och lärarnas konfidentialitet, inkluderas inga namn, skolor eller orter i artikeln. Det insamlade materialet används endast i forskningssyfte och förvaras säkert i enlighet med riktlinjerna vid Linköpings universitet.

1 Enligt Hair m.fl. (2010) bör data anses vara normalfördelad om skevheten ligger mellan -2 och +2 samt kurtosis mellan -7 och +7.

Resultat

Resultatet presenteras i två delar. Den första delen beskriver dels resultat från den kvalitativa analysen, dels resultat från kvantitativa analysen av elevtesterna. Den andra beskriver hur de kritiska aspekterna hanterades i undervisningen.

Nedan presenteras först analysen av elevernas olika tillvägagångssätt och de kritiska aspekter som identifierades baserat på dem. Därefter beskrivs de resultat som eleverna fick på för- och eftertesten.

Elevers olika sätt att erfara likvärdiga bråk och identifierade kritiska aspekter

Genom den kvalitativa analysen identifierades fem olika sätt att erfara likvärdiga bråk. I tabell 1 redovisas, i den första kolumnen, elevers sätt att erfara bråk. Kolumn två presenterar de strategier som eleverna använder för att lösa uppgifterna. Den tredje kolumnen specificerar vilken kritisk aspekt som har identifierats i relation till varje kategori. För att förstå likvärdiga bråk behöver de urskilja vad ett bråk är. Därför handlar de första strategierna om bråk och de resterande om likvärdiga bråk. De två översta kritiska aspekterna är likartade, skillnaden består i att den understa av dem är inriktad mot ett specifikt sätt att erfara bråk som begränsade till täljare och nämnare mindre än 10. I resultatdelen *Hantering av de kritiska aspekterna under lektionerna* kommer dessa kritiska aspekter behandlas under samma rubrik.

Tabell 1
Elevers erfaranden, strategier och kritiska aspekter.

Elevers erfarande	Strategier	Kritisk aspekt
Ser decimaltal som bråk	Ringar in 23,67 som bråk. Skiljer inte på bråktal, decimaltal och procent.	Ett bråk uttrycks i formen $^a/_b$.
Ser bråk som begränsade till täljare och nämnare mindre än 10	Ringar in $^7/_8$ men inte $^{44}/_{64}$. Vid förlängning av bråk överskrids aldrig talet 10 i nämnaren eller täljaren ($^1/_{10} = {}^2/_5$).	Ett bråk uttrycks i formen $^a/_b$ oberoende av vilka tal som står i täljaren och nämnaren.
Ser likvärdiga bråk som likadana tal på ny plats.	Byter plats på täljaren och nämnaren ($^1/_4 = {}^4/_1$).	Talens position ändrar bråkets värde.
Ser likvärdiga bråk som en additiv relation det vill säga nämnare eller täljare adderas med samma tal.	Förlänger bara täljaren ($^2/_5 = {}^4/_5$). Förlänger bara nämnaren ($^3/_4 = {}^3/_8$).	Det finns en multiplikativ relation och förhållandet mellan nämnare och täljare är proportionellt.
Ser likvärdiga bråk som en matematisk procedur med addition.	Adderar täljaren och nämnaren med samma tal ($^3/_4 = {}^4/_5$).	För att förlänga bråk multipliceras täljaren och nämnaren med samma tal.

Elevernas prestationer på för- och eftertest

Elevernas prestation på matematiktestet presenteras för varje cykel. Beskrivande statistik visas, i form av medelvärde (M), standardavvikelse (SD) och medelvärdesskillnad (MD), för elevernas prestationer avseende (a) Bråkidentifiering (BI), (b) Likvärdiga bråk med areamodeller (LBMA), och (c) Likvärdiga bråk utan areasmodeller (LBUA), se tabell 2.

Analysen av elevernas prestationer före och efter undervisning (cykel 1) visade att eleverna presterade signifikant bättre på uppgifter relaterade till bråkidentifiering (BI), $t(19) = 2{,}99$, $p = 0{,}008$ och uppgifter om likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA), $t(19) = 3{,}17$, $p = 0{,}005$. På bråkidentifieringsuppgiften observerades en stor skillnad i prestation före och efter undervisning (Hedges´g = 0,95), medan likvärdiga bråk utan areamodeller visade en måttlig förbättring (Hedges´g = 0,55).

I cykel 2 presterade eleverna signifikant bättre på eftertestet jämfört med förtestet på bråkidentifieringsuppgiften, $t(16) = 2.40$, $p = 0{,}029$, samt på uppgifterna som involverade likvärdiga bråk utan areamodeller, $t(16) = 4{,}26$, $p < 0{,}01$. En betydande effektstorlek observerades för utvecklingen av prestationen i uppgifter med likvärdiga bråk utan areasmodeller (Hedges´g = 0,82), medan en måttlig effektstorlek påvisades för utvecklingen av prestationen i bråkidentifieringsuppgiften (Hedges´g = 0,73).

I cykel 3 observerades signifikanta effekter på uppgiften för att identifiera bråk, $t(23) = 3{,}49$, $p = 0{,}02$, och på uppgifter för likvärdiga bråk utan areamodeller, $t(23) = 6{,}11$, $p < 0{,}01$. Effektstorleken avseende skillnaden mellan prestation före och efter undervisning var för likvärdiga bråk utan areamodell (Hedges´g = 1,76) och för förändringen av prestationen på uppgiften för att identifiera bråk (1.1) var betydande.

Tabell 2

Resultat från för- och eftertest, cykel 1–3.

	Cykel 1 n=19					Cykel 2 n=16					Cykel 3 n=23				
Testvariabel	Förtest M (SD)	Eftertest M (SD)	MD	t (19)	Hedges´g	Förtest M (SD)	Eftertest M (SD)	MD	t (16)	Hedges´g	Förtest M (SD)	Eftertest M (SD)	MD	t (23)	Hedges´g
BI	0.50 (0.51)	0.90 (0.31)	0.40	2.99**	0.95	0.61 (0.50)	0.91 (0.24)	0.30	2.40*	0.73	0.46 (0.51)	0.92 (0.28)	0.46	3.49**	1.10
LBMA	1. 85 (0.52)	1.80 (0.37)	-0.05	0.75	0.11	1.74 (0.62)	1.76 (0.56)	0.02	0.37	0.03	1.96 (0.19)	2.00 (0.00)	0.04	Ns	0.00
LBUA	3.35 (3.63)	5.50 (4.22)	2.15	3.17*	0.55	2.96 (3.18)	5.76 (3.75)	2.80	4.26**	0.82	3.93 (3.34)	8.64 (1.63)	4.71	6.11**	1.76

Not. * $p < 0{,}05$. ** $p < 0{,}001$

Sammanfattningsvis visar resultaten varierande effekter inom varje cykel för de olika testvariablerna. I cykel 1 framträdde en betydande positiv effekt för bråkidentifiering (BI) med en Hedges´g effektstorlek på 0,95, medan effekten för likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) var mindre positiv med en Hedges´g effektstorlek på 0,55. I cykel 2 var effekten för bråkidentifiering (BI) något mindre med en Hedges´s g effektstorlek på 0,73, medan effekten för likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) ökade till 0,82. Cykel 3 uppvisade en markant ökning av effekten för både bråkidentifiering (BI) med en Hedges´g effektstorlek på 1,10 och likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) med en Hedges´g effektstorlek på 1,76.

Inom varje cykel observerades också ökningar i medelvärden för testvariablerna BI och LBUA. För bråkidentifiering (BI) observerades en gradvis ökning från 0,4 (cykel 1) till 0,46 (cykel 3). Likaså ökade medelvärdesskillnaden för likvärdiga bråk utan areamodeller (LBUA) från 2,15 (cykel 1) till 4,71 (cykel 3). Dessa resultat antyder en positiv utveckling över tid inom varje cykel för båda testvariablerna. De flesta elever förbättrade sina resultat avseende både bråkidentifiering och förståelse av likvärdiga bråk utan visuella modeller efter att de hade fått undervisning.

Hantering av de kritiska aspekterna under lektionerna

I nedanstående resultat framställs hur de kritiska aspekterna synliggörs i undervisningen.

Ett bråk uttrycks i formen $^a/_b$

En kritisk aspekt vad gäller lärande av bråk är att förstå hur ett bråk uttrycks. I denna studie handlar det om att eleverna kan särskilja hur bråk, decimaltal och procent uttrycks och förstå skillnaden i funktionen hos bråkstrecket och decimaltecknet. De behöver också urskilja att ett bråk kan ha både ensiffriga och tvåsiffriga nämnare och täljare.

För att denna aspekt skulle bli urskiljningsbar för eleverna, fick eleverna i uppgift att särskilja bråk, procent och decimaltal från varandra. Läraren visade tre separata korgar, märkta med orden ”bråk”, ”procent”, och ”decimaltal” och placerade talen 25,8, $^1/_4$, 33%, $^{27}/_{65}$ och 4% över dem. Genom att öppna en dimension av variation av hur rationella tal och tal i procentform kan uttryckas hjälpte läraren eleverna att rikta sin uppmärksamhet mot de olika sätten att skriva tal. Det var viktigt att inkludera bråk där täljaren och nämnaren överskred 10, eftersom detta hade visat sig vara utmanande för vissa elever.

Därefter ledde läraren en diskussion där lärare och elever gemensamt placerade talen i sina respektive korgar. Under denna aktivitet fick eleverna bidra med förslag och läraren klargjorde vilka tecken som användes i de olika uttrycken. Ett exempel på en sådan aktivitet ses i excerpt 1.

Excerpt 1. Utdrag cykel 3, lektion 1

Elev:	25 komma 8 ska vara i decimaltal.
Lärare:	Det är ju ett decimaltal ja det finns ett decimaltecken där [pekar].
Elev:	4 procent ska vara i procent.
Lärare:	Den ska ner där ja för där har vi ju procenttecknet där [pekar].
Elev:	Tjugosju av sextiofem ska till bråk, precis som en fjärdedel
Lärare:	Precis, tjugosju sextifemtedelar och en fjärdedel ska ju ner till bråkkorgen.

I excerpt 1 (cykel 3, lektion 1) framgår det att läraren förklarade på vilket sätt de olika talen skrivs, inklusive decimal- och procenttecken och bråkstreck. Genom att det finns en variation avseende hur rationella tal och procenttal skrivs, möjliggör det att eleverna lättare urskiljer dessa skillnader. I denna studie använde vi dock inte samma siffror i de olika talen, vilket gör att även dessa varierar. Detta skulle kunna ha påverkat kontrastens tydlighet. Baserat på resultaten så verkar det emellertid inte ha haft avgörande betydelse för elevernas lärande.

Dessutom var läraren noga med att korrekt uttrycka talen verbalt, även om eleverna inte gjorde det. Detta illustreras när en elev säger ”tjugosju av sextiofem” (excerpt 1, cykel 3, lektion 1). I detta exempel bekräftar läraren svaret, samtidigt som läraren ändrar formuleringen och betonar ”delar” i uttrycket för att matematiskt korrekt uttrycka talet. Genom att variera uttryckssättet av bråket möjliggjorde läraren att eleverna kunde urskilja hur talet ska uttryckas.

Denna aktivitet genomfördes på samma sätt under samtliga tre cykler, eftersom nästan alla elever redan i den första cykeln förbättrade sin förmåga att identifiera bråk, se tabell 2, cykel 3, testvariabel BI.

Talens position ändrar bråkets värde

En annan kritisk aspekt är att eleverna behöver urskilja att likvärdiga bråk handlar om förhållandet mellan bråken och att detta förhållande förändras när täljaren och nämnaren byter plats.

På en övergripande nivå förändrades undervisning från att ge eleverna en möjlighet att själva notera kontraster till att lärarna explicit uppmärksammade eleverna på kontraster och kontrollerade hur eleverna uppfattat innehållet.

I cykel 1 inleddes momentet genom att läraren presenterade det matematiska uttrycket ½, både som en halv rektangel och genom en halv sträcka på tallinjen. Eftersom ½ är invariant blir representationerna i förgrunden, vilket möjliggör att eleverna urskiljer att ½ kan representeras på olika sätt. Med detta som utgångspunkt skrev läraren bråkuttrycken ½ och 2⁄1 på tavlan, vilket skapade en kontrast där enbart positionen på talen i täljaren och nämnaren varierade. Läraren ställde sedan en fråga till eleverna om de båda bråken var lika mycket värda. Genom att ställa den frågan gavs eleverna en möjlighet att se att talens position i ett bråk påverkar dess värde. En elev fick möjlighet att uttrycka sina tankar kring detta, se excerpt 2 (cykel 1, lektion 1) nedan:

Excerpt 2. Utdrag cykel 1, lektion 1

Lärare:	Är de lika mycket värda?
Elev:	De är inte samma.
Lärare:	De är inte samma. Varför är de inte samma?
Elev:	Du har bytt plats på dem.
Lärare:	Jag har bytt plats på dem och då blir det inte samma värde.

Elevens fokus riktades mot om talen har samma position, snarare än mot att jämföra om uttrycken har samma numeriska värde. Läraren hanterade detta elevinspel genom att upprepa det eleven sa. Vid elevens andra svar gjorde läraren ett tillägg och sa att ”då blir det inte samma värde” (excerpt 2, cykel 1, lektion 1). Det indikerar att eleven riktade sitt fokus mot positionen, men detta utforskades inte vidare. Läraren konstaterade sedan att det inte blir samma värde men förklarade inte varför det är så, vilket innebar att eleverna lämnades själva att förstå det. Eleverna fick därför inte hjälp med den begreppsliga förståelsen av bråk. I ovanstående exempel (excerpt 2, cykel 1, lektion 1) användes en kontrast, men eftersom enbart talens position blev i förgrunden, och inte hur talens position påverkade bråkens värde, minskade elevernas lärandemöjligheter.

I cykel 3 genomfördes förändringar för att förbättra elevernas möjlighet till lärande. Ordningen på vissa moment ändrades samtidigt som läraren introducerade både benämningen och funktionen av täljaren och nämnaren utifrån bråket ½. Detta innebär att elevernas uppmärksamhet inte enbart riktades mot benämning, som i cykel 1, utan även mot den begreppsliga förståelsen. För att göra detta använde läraren areamodellen i form av en rektangel som var uppdelad i två lika stora delar. I excerpt 3 nedan exemplifieras lärarens förklaring:

Excerpt 3. Utdrag cykel 3, lektion 1

Lärare:	Täljaren visar ju hur många utav de här delarna som jag har fyllt i, och nämnaren visar hur många delar jag har delat någonting i [pekar]. Så här har vi en halv. Om jag skulle ha fyllt i hela den här [fyller i andra halvan], vad hade jag fått för bråktal då? Om jag hade fyllt i båda delarna?

I citatet från excerpt 3 (cykel 3, lektion 1) framgår det att läraren förklarar både täljarens- och nämnarens funktion kopplat till det givna exemplet som visas på tavlan. Dessutom ger läraren en generell förklaring av deras betydelse. Bråket är invariant och representationen av bråket varierar, vilket gör att uttryckssättet kommer i förgrunden, särskilt när talen 1 respektive 2 i bråket kopplas ihop med den visuella representationen. När läraren sedan frågar vilket bråk det blir när andra halvan fylls i, riktas uppmärksamheten mot täljarens funktion, eftersom det är den som varierar mot en invariant bakgrund, då nämnaren inte ändras i det svar som eftersöks (½ och ⅔). Eleverna får också stöd i hur de kan tänka för att koppla ihop den visuella representationen med det matematiska uttrycket.

När kontrasten (½ och ²⁄₁) sedan introduceras gör läraren en koppling till det förtest som eleverna genomfört (se excerpt 4, cykel 3, lektion 1), vilket inte förekom i cykel 1. Denna koppling kan hjälpa eleverna att se relevansen i de exempel som läraren presenterar.

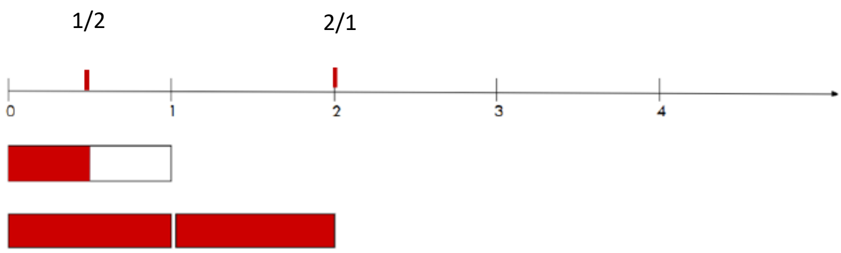
Excerpt 4. Utdrag cykel 3, lektion 1

Lärare:	När vi gjorde det här förtestet, kommer ni ihåg? Då fick man sätta ut värdet på olika bråk och då var det några elever som skrev så här [skriver] att en halv var lika med två endelar (½ = ²⁄₁). Men nu undrar jag: Är det så? Om ni funderar lite, om ni kopplar det till vad ni vet om täljaren och nämnaren och så. Är det här två bråken lika mycket värda? Prata med dem du sitter bredvid. [Eleverna pratar med varandra] Är de här bråken lika mycket värda?
Elev:	Nej.
Lärare:	Varför inte då?
Elev:	För att det andra talet ... det här ju två hela.
Lärare:	Jättebra. Ska jag visa vad du sa?

I excerptet 4 (cykel 3, lektion 1) syns att läraren först knyter an till elevernas tidigare uppfattning, men också uppmanar dem att använda den kunskap om täljarens och nämnarens funktion som de precis har gått igenom när de diskuterar skillnaden mellan de två bråken. Detta möjliggör att elevernas tidigare sätt att förstå bråk kan kontrasteras mot ett nytt sätt, vilket gör att det nya sättet blir lättare att urskilja.

Därefter fortsätter läraren genom att, baserat på elevens inspel, använda areamodellen och tallinjen för att illustrera innebörden. Läraren visar en halv och kontrasterar detta mot två hela och gör samtidigt en koppling till de matematiska uttrycken. Detta följs av att läraren visar samma tal på tallinjen och markerar både ½ och ²⁄₁ (se figur 1).

Figur 1



Tallinje och rektanglar som visar bråken 1/2 och 2/1

Genomgående visas båda talen samtidigt, först i areamodellen och sedan på tallinjen. De kopplas också direkt samman med de matematiska uttrycken. I denna sekvens sker en progression där eleverna först får se kontrasten mellan ½ och ²⁄₁ i rektanglarna, för att sedan också se dem på tallinjen. Det blir då också en kontrast mellan de båda representationerna. I den kontrasten är bråken invarianta och representationerna varierar, vilket gör att uttrycksformen för bråken blir i förgrunden.

Sekvensen avslutas med att även $\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{1}$ visas på samma sätt. På så sätt får eleverna ytterligare ett exempel (både via areamodellen och på tallinjen) på att de olika bråken är olika stora och att de hamnar långt ifrån varandra på tallinjen, vilket möjliggör en generalisering av de insikter från de tidigare exemplen. I cykel 3 är det läraren som använder kontraster för att synliggöra de kritiska aspekterna. Läraren kontrollerar hur undervisningen tagits emot och går utifrån elevernas inspel vidare.

Konstruktion av likvärdiga bråk görs med multiplikation

För att förlänga bråk behöver eleverna urskilja att för att behålla proportionaliteten mellan bråken behöver både täljaren och nämnaren multipliceras med samma tal.

En gemensam utgångspunkt i alla cykler var att introducera hur bråket 1/2 kunde uttryckas på olika sätt och markera dess position på tallinjen som ett inledande moment. Eleverna fick föreslå alternativa sätt att uttrycka samma värde. Undervisningen kring denna kritiska aspekt hanterades på delvis olika sätt i de tre cyklerna, med betydande skillnader avseende hur läraren arbetade med de kontrasterande exemplen och hur elevinspelen användes i relation till det.

Excerpt 5 (cykel 1, lektion 2) visar följande samtal mellan elever och lärare efter att läraren har visat eleverna en halv på tallinjen och frågar hur det ska skrivas.

Excerpt 5. Utdrag cykel 1, lektion 2

Lärare:	[Skriver $\frac{1}{2}$ vid markeringen på tallinjen] Där har vi en halv … Nu skulle jag vilja att vi hittar på andra bråk som är lika mycket som en halv. De ska vara värda lika mycket som en halv. Vi ska skriva fler bråk här. Det ska vara lika mycket som en halv.
Elev:	Tre delat på sex.
Lärare:	Tre delat på sex [skriver $\frac{3}{6}$ under $\frac{1}{2}$]. Det är lika mycket som en halv.
Elev:	Fem delat på tio.
Lärare:	Fem delat på tio [skriver $\frac{5}{10}$ under $\frac{3}{6}$].

I excerpt 5 (cykel 1, lektion 2) framgår det att läraren uppmanar eleverna att skapa bråk som är likvärdig med en halv. Efter denna sekvens fortsätter eleverna att ge exempel på samma sätt, och även dessa skrivs upp och upprepas av läraren. Här öppnas en dimension av variation som handlar om olika sätt att skriva en halv, värdet (dvs. en halv) är invariant, men sättet det skrivs på varierar. Detta gör att elevernas uppmärksamhet riktas mot att samma bråk kan uttryckas på olika sätt.

Av excerpt 5 framgår att läraren genomgående upprepar elevernas formuleringar. Läraren öppnar inte upp en dimension av variation som handlar om hur bråk uttrycks. Det innebär att när eleverna uttrycker bråket som division, såsom ”tre delat på sex”, kontrasteras inte det mot det korrekta sättet att uttrycka bråk det vill säga ”tre sjättedelar”. Detta gör att ett felaktigt tanke- och uttryckssätt riskerar att befästas. Dessutom förlorar eleven lärandemöjligheten i att förstå varför det är ett felaktigt uttryckssätt.

Efter att eleverna har fått ge exempel på hur en halv kan uttryckas fokuserar läraren (se excerpt 6, cykel 1, lektion 2) på den matematiska förklaringen till att två bråk kan vara lika mycket värda. Läraren skriver $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ och frågar:

Excerpt 6. Utdrag cykel 1, lektion 2

Lärare:	Vad har hänt här? Vad har vi gjort med den här ettan för att göra den till en tvåa? Vad har vi gjort med tvåan för att det ska bli fyra?
Elev:	Man har plussat på en till etta så att det blir två och en till tvåa så att det blir fyra.

Lärare: Ja. Här skulle man kunna tänka att det skiljer ett här emellan [pekar på täljarna] och att det skiljer två här emellan [pekar på nämnarna]. Absolut.

Ur excerpt 6, cykel 1, lektion 2 framgår att lärarens första fråga leder elevernas uppmärksamhet till täljaren och nämnaren som separata enheter, istället för att betrakta bråken som helheter. Elevinspelet bekräftar detta tillvägagångssätt, med fokus på täljaren och nämnaren separat och använder en additiv strategi istället för ett multiplikativ. Läraren bekräftar elevens svar med ordet ”Absolut”, vilket riskerar att förstärka uppfattningen att bråk kan förlängas med hjälp av additiv strategi. Excerptet ovan följs av att läraren frågar: ”Kan vi tänka något annat räknesätt än addition?”. Detta öppnar upp en dimension av variation där alternativa strategier kan ges eftersom uppgiften är invariant och strategierna varierar. En elev föreslår då att det går att rita ”en rund figur” som delas i fyra delar och fylla i två av dem och att det blir en halv. Läraren bekräftar elevens förslag och sedan sker nedanstående konversation (se excerpt 7, cykel 1, lektion 2).

Excerpt 7. Utdrag cykel 1, lektion 2

Lärare: NN var ju inne på ett spår att vi har gjort någonting med ettan för att det ska bli två och vi har gjort något med tvåan för att det ska bli fyra. Vad är det vi har gjort då?

Elev: Dubblat.

Lärare: Vi har dubblat ser ni? Vad multiplicerar jag med när vi har dubblat?

Elev: Två.

Lärare: Med två. Kolla här! Med två tänker vi här (pekar på täljaren) och med två tänker vi här. [Skriver ·2 i täljaren och nämnaren] Ser ni … Ett multiplicerat med två blir … två va? Och två multiplicerat med två blir …?

Elev: Fyra.

Lärare: Ja det blir fyra, så vi har alltså dubblat, vi har dubblat både i täljaren och i nämnaren och det är viktigt.

I ovanstående excerpt 7 (cykel 1, lektion 2) finns inslag av att läraren lotsar eleverna genom att ställa korta frågor som leder till rätt svar, men det kan samtidigt innebära att eleverna inte förstår grundprincipen bakom uppgiften fullt ut. När eleven föreslår dubbling som metod är inte det felaktigt, men det kan innebära att eleven använder en additiv strategi för att omvandla bråket, istället för en multiplikativ. När läraren introducerar att dubbling innebär multiplikation kan det fungera som en kontrast mellan att använda en additiv respektive en multiplikativ strategi.

I hanteringen av denna uppgift öppnas en dimension av variation genom att olika sätt att tänka kring uppgiften tas upp, men det är ändå inte självklart att det ökar elevernas lärandemöjligheter. De lösningsförslag som kommer från eleverna utforskas inte gemensamt, utan det blir otydligt (framför allt i excerpt 6, cykel 1, lektion 2) att elevens svar inte fungerar matematiskt. De olika sätten att hantera uppgiften skulle kunnat användas som kontraster, där elevens sätt att tänka skulle utforskas systematiskt i relation till matematiskt hållbara lösningar.

En analys av elevernas lärande avseende denna kritiska aspekt visade att flera elever hade förbättrat sina resultat, testvariabel LBUA, men många hade fortfarande svårt. Analysen av undervisningen visade också på flera problem, vilket gjorde att dessa moment reviderades. Inför cykel 2 och 3 gjordes förändringar som främst handlar om hur läraren använder elevsvar, dels genom att genomgående rikta uppmärksamheten mot hur bråk uttrycks, dels genom att aktivt använda elevernas svar på förtestet som lektionsinnehåll.

I cykel 3 inledde läraren, på liknande sätt som i de andra cyklerna, den andra lektionen genom att eleverna får bidra med förslag på olika matematiska sätt att uttrycka en halv. I denna omgång är läraren noga med att det korrekta bråk. Därefter går läraren igenom förlängning av bråk med eleverna, vilket exemplifieras i excerpt 8 nedan.

Excerpt 8. Utdrag cykel 3, lektion 2

Lärare:	En halv sa vi ju var lika mycket som två fjärdedelar [pekar på 2/4 under tallinjen, skriver samtidigt 1/2 = 2/4]. De var ju värda en halv båda två och ser ni här nu då, att för att komma hit [pekar på ettan och tvåan i de båda täljarna] har jag multiplicerat med någonting. För att ettan ska bli en tvåa har jag multiplicerat med någonting [pekar på ettan och tvåan] och för att tvåan ska bli en fyra har jag multiplicerat med samma tal [pekar på tvåan och fyran].

I ovanstående excerpt 8 (cykel 3, lektion 2) visas hur läraren förklarar för eleverna hur täljaren och nämnaren multipliceras med samma tal för att få ett likvärdigt bråk. Genom att peka på både 1/2 och 2/4 på tallinjen visar läraren att båda bråken har samma värde och är lika stora. Läraren är explicit med att täljare och nämnare i en 1/2 har multiplicerats med samma tal. Därefter uppmanas eleverna att fundera över vilket tal som har använts för att multiplicera både täljaren och nämnaren och därmed göra bråken likvärdiga. I excerpt 8 är bråkens värde invariant, men täljaren och nämnaren varierar, vilket innebär att förändringen i hur bråken representeras skriftligt blir i förgrunden.

Läraren beskriver sedan att detta kallas förlängning och presenterar följande text på tavlan: ”Förlänga bråk: Multiplicera med samma tal i både täljaren och nämnaren.” Läraren initierar sedan en diskussion om hur en tredjedel kan förlängas till niondelar. Genom detta får eleverna möjlighet att generalisera sina kunskaper.

Efter den gemensamma genomgången får eleverna exempel där de ska bedöma om två bråk bråk är likvärdiga eller inte baserat på den uppskrivna regeln. Dessutom ombeds de att beskriva hur de tror att eleverna har tänkt vid de felaktiga exemplen. De valda exemplen baseras på de elevsvar som framkommit i förtestet, till exempel enbart användning av additiv strategi för att förlänga täljaren eller nämnaren, eller användning av en multiplikativ strategi för att förlänga bråkuttrycket. I detta moment uppstår en ytterligare lärandemöjligheter jämfört med cykel 1. I denna cykel har läraren först en genomgång och i nästa steg bjuds eleverna in för att i par undersöka just det som har visat sig vara svårt inom området. Inför detta har de fått undervisning i hur det matematiska innehållet ska hanteras. I excerpt 9 (cykel 3, lektion 2) visas delar av när läraren leder samtal om hur eleverna har svarat.

Excerpt 9. Utdrag cykel 3, lektion 2

Lärare:	Då tar vi uppgift B här nu då. Är tre fjärdedelar lika med fyra femtedelar?
Elev:	Mmm. De har bara lagt till en på varje.
Lärare:	De har bara lagt till. De har bara adderat där. De har gjort så här [skriver +1 vid täljaren och +1 vid nämnaren]. Är de lika mycket värda då?
Elev:	Naeej …
Lärare:	Naej. Varför inte det? Vad var man tvungen att använda för räknesätt?
Elev:	Multiplikation.
Lärare:	Precis. Multiplicera [pekar på regeln] med samma tal i både täljaren och nämnaren. Här [pekar på uppgiften] har de adderat i både täljaren och nämnaren och då är inte den lika mycket värd [drar streck över likhetstecknet].

I excerpt 9 (cykel 3, lektion 2) får eleverna möjlighet att undersöka samma vanliga felaktiga svar som spontant uppstod under cykel 1. Denna gång kan eleverna och läraren använda sig av den etablerade regeln för att identifiera att förfarandet är felaktigt. Det innebär att de felaktiga svaren som eleverna får undersöka inte uppstår spontant, utan att lektionen är designad med utgångspunkt i de felaktiga svaren som framkom i förtestet. När eleven uttrycker att "de har bara lagt till" fångar läraren upp elevens förklaring, och språkliggör strategin med att säga att dom bara adderat. Sedan kontrasteras den felaktiga additiva strategin mot den korrekta multiplikativa. I exemplet är det felaktiga elevsvaret invariant. I relation till det synliggörs ett additivt tankesätt. Detta kontrasteras mot ett multiplikativt tankesätt. Detta gjordes delvis även i cykel 1 (se excerpt 7, cykel 1, lektion 2), men då framkom inte kontrasten lika tydligt eftersom det inte utforskades huruvida eleven tänkte additivt eller multiplikativt. Eftersom denna lektion istället tog elevsvaren som utgångspunkt möjliggjorde det att läraren på ett strukturerat sätt kunde lyfta elevernas vanliga felsvar och undersöka dem tillsammans med eleverna.

Resultaten från eftertestet tyder på att eleverna gör betydande framsteg under denna cykel, se tabell 2, cykel 3, testvariabel LBUA. Detta innebär att en majoritet av eleverna efter denna lektion presterar korrekt på denna typ av uppgifter.

Diskussion och slutsatser

Denna studie handlar om hur undervisning kan designas och analyseras med variationsteorin som grund för att stödja elevers förmåga att omvandla och få en begreppslig förståelse av likvärdiga bråk. Trots den omfattande forskning om hur elever förstår likvärdiga bråk (se Fazio m.fl., 2016; Schneider & Siegler, 2010), har det funnits ett påtagligt behov av ytterligare kunskap om hur undervisningen kan utformas för att stödja elevernas utveckling av denna förmåga, vilket tidigare studier påpekat (jfr Lee m.fl., 2011; Mills, 2016).

Resultaten i denna studie bidrar med kunskap om hur undervisningen kan designas baserat på variationsteoretiska principer för att öka elevernas möjlighet till lärande. Vid designen och genomförande av undervisningen vill vi diskutera tre områden som framstår som särskilt betydelsefulla: (a) utgå från identifierade kritiska aspekter, (b) använda kraftfulla kontraster, (c) utgå från elevsvar och (d) använda tallinjen.

För att undervisningen ska vara framgångsrik blir det mest centrala att läraren har klart för sig vad eleverna ska lära sig (Marton, 2015). Det behöver ta sin utgångspunkt i hur eleverna erfar lärandeobjektet, vilket gjorde att förtestet fick stor betydelse i den här studien. De kritiska aspekter som identifierades hade likheter med det som visats i tidigare forskning (t.ex. Boyer & Levine, 2012; Erlwanger, 1973; Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007), vilket tyder på att elever ofta stöter på samma typ av utmaningar inom detta område. I årskurs 5 förväntar sig nog många lärare att eleverna kan särskilja bråk från procent och decimaltal innan undervisningen om likvärdiga bråk. I denna studie framgick det att detta inte kunde tas för givet utan behövde ingå i lektionsdesignen, vilket gjorde den första kritiska aspekten viktig att starta med. Enligt Kilpatrick med flera (2001) och Lamon (2020) är det dock känt att de många olika tolkningarna, representationerna och symboliska konventionerna för rationella tal kan utgöra en av svårigheterna med att förstå talen och eleverna behöver tydligt se skillnaderna mellan bråk, decimaltal och procent för att de ska få en fördjupad taluppfattning.

Genomgående användes grundprincipen i variationsteorin som handlar om att öppna upp en dimension av variation genom att variera den fokuserade aspekten mot en invariant bakgrund (Marton, 2015). Kontrasterna hjälpte eleverna att urskilja det matematiska innehållet eftersom de bidrar till att eleverna riktar sin uppmärksamhet mot de kritiska aspekterna (Kullberg & Runesson, 2013; Sveider, 2021). Men det räcker inte med enbart kontraster. Det blev tydligt att användandet av elevsvar och att eleverna själva var aktiva var viktigt för att elevers lärande. Vi använde i flera cykler samma kontrast, men den bäddades in i olika typer av aktiviteter och samtal, där läraren också hanterade de elevsvar som uppkom på lektionen på olika sätt. Det blev tydligast då läraren signalerade att felsvar var korrekt (se excerpt 5 och 6). Denna typ av interaktion liknar det som Björklund Boistrup (2010) kallar för ”anything goes”. Det innebär att läraren inte problematiserar felaktiga svar, utan berömmer elevernas deltagande. Detta riskerar att leda till att missuppfattningar befästs hos eleverna. Manula (2018) visar i sin avhandling att elevsvar som handlar om lärandeobjektet kan användas som underlag i undervisningen eftersom elevers olika lösningar kan användas för att skapa kontraster som gör att deras uppmärksamhet riktas mot de kritiska aspekterna. I vår studie använde vi i alla cykler felsvar från förtesten i lektionsdesignen. Denna grundprincip genomfördes dock på olika sätt. Det visade sig att det var viktigt att den matematiska principen var tydlig för eleverna och att de själva fick undersöka regeln i relation till olika typer av svar och sedan diskutera det tillsammans med läraren (se excerpt 9, cykel 3, lektion 2). Även Hughes med flera (2017) påtalar att läraren behöver förklara matematiska principer för eleverna och modellera hur de ska tänka, men att det också är viktigt att eleverna själva är aktiva. Att skapa aktiva elevdiskussioner kan vara svårt och Svantesson Wester (2022) framhåller att läraren behöver designa uppgifter som kräver att eleverna diskuterar lärandeobjektet. Vid en jämförelse mellan cyklerna i vår studie framkommer vikten av att läraren inte bara designar uppgifter som eleverna kan diskutera, utan även att läraren leder samtalet genom att ställa fördjupande frågor, vilket även framkommer i flera tidigare studier (Inagaki m.fl., 1999; Mercer, 2018).

En annan faktor som också visade sig vara betydelsefull är hur övergången mellan det konkreta och det abstrakta. Hudson och Miller (2006) har påtalat att många elever har svårigheter med denna övergång, vilket även framkom i denna studie då eleverna då eleverna kunde använda areamodellen för att skapa likvärdiga bråk, men hade svårt med den skriftliga representationen, se tabell 2, cykel 1–3, testvariablerna LBMA och LBUA. Om undervisningen fastnar i att representera ett bråk med hjälp av areamodellen riskerar det att förstärka elevers uppfattning om att bråk är två enskilda heltal (Tian m.fl., 2021) och att det kan förstärka elevers additiva tänkande (Moss, 2005). För att förhindra detta använde vi i vår studie tallinjen som en brygga mellan det konkreta (areamodellen) och det abstrakta (matematiskt uttryck), vilket även visats i andra studier (Schumacher m.fl., 2018).

Tallinjen fungerar både som en representation av del-helhet, genom att den representerar en sträcka längs linjen och kan markera olika positioner (Hamdan & Gunderson, 2017; Schumacher m.fl., 2018). Det gör den visuell och konkret, samtidigt som bråkets värde kan jämföras med andra bråk på tallinjen för en djupare förståelse (Cramer m.fl., 2019). Vi använde tallinjen för att koppla bråk med naturliga tal, vilket är ett sätt att tydliggöra sambanden mellan olika talrepresentationer (Eriksson, 2015). Tallinjen kan användas på alla typer av bråk, vilket är svårare med areamodellen. Användandet av tallinjen har visat sig vara framgångsrikt, men det krävde att läraren hanterade detta på ett sätt som synliggjorde kopplingarna mellan areamodellen, tallinjen och den skriftliga representationen.

Studien är liten och resultaten är med största sannolikhet inte generaliserbara för alla elevgrupper. Det är inte oproblematiskt att göra statistiska beräkningar på så pass små elevgrupper, då det ställer höga krav på urval och genomförande för att resultaten ska kunna visa på metodens effektivitet. Den insamlade datan bygger på ett målinriktat urval, vilket enligt Bryman (2018) innebär att resultaten inte kan generaliseras till hela populationen. Detta är en nackdel då en kvantitativ forskningsstrategi syftar till att möjliggöra generalisering. I den här studien har de kvantitativa resultaten behandlats i relation till omfattande beskrivningar av undervisningssituationer. Dessa beskrivningar möjliggör att studiens resultat kan överföras till liknande kontexter (se Larsson, 2005) av lärare och forskare och därigenom bidra till en kumulativ kunskapsbas inom matematikdidaktik.

Den begränsade varaktigheten av lektionsdesignen reser viktiga frågor kring överensstämmelsen mellan design och mätning av dess effekter. Enligt Ruiz-Primo med flera (2002) kan kortvariga interventioner främst avspegla kortsiktiga beslut och inte nödvändigtvis reflektera de långsiktiga kumulativa effekterna av mer långvariga undervisningsinsatser. Å andra sidan kan detta korta tidsfönster vara fördelaktigt när man betraktar hur snabbt eleverna utvecklade sin förmåga att omvandla likvärdiga bråk.

I denna studie spelade det nära samarbetet mellan forskare och lärare en central roll i utformningen av lektionerna. Genom detta samarbete preciserades undervisningens mål, vilket potentiellt ledde till en mer riktad och ändamålsenlig undervisning, vilket i sin tur kan ha haft en positiv inverkan på effektstorlekarna (Cook m.fl., 2023).

En annan övervägning var användningen av både för- och eftertester för att utvärdera elevernas kunskaper. Denna design tillät oss att mäta förändringar i elevernas prestation över tid och bedöma effekterna av undervisningsinterventionen. Dock kan det finnas frågor kring beroende mellan för- och eftertester, vilket Bakker med flera (2019) påpekar som en potentiell begränsning. För att mildra detta genomförde vi en pilottestning för att säkerställa att eleverna förstod testuppgifterna och att de var lämpliga för vår elevgrupp.

En ytterligare aspekt att beakta är rapporteringen av effektstorlekar. Enligt Bakker med flera (2019) kan effektstorlekar variera beroende på studiens design, och det är viktigt att tolka dem med hänsyn till detta. Vi använde Hedges' g för att bedöma effekterna av LS-cyklerna på våra testvariabler, vilket tillät oss att kvantifiera och jämföra effekterna av undervisningen.

Slutligen, trots studiens begränsade varaktighet, indikerar resultaten en märkbar förbättring i elevernas prestation, särskilt på uppgifter för likvärdiga bråk utan användning av areamodeller. Denna observation stödjer möjligheten att även korta och intensiva undervisningsperioder kan ha positiva effekter på elevernas förståelse inom området likvärdiga bråk. Det är dock viktigt att följa upp studien genom att mäta elevernas prestationer vid andra tidpunkter än enbart direkt efter för att kunna bedöma om effekterna är hållbara på lång sikt.

Referenser

Bakker, A., Cai, J., English, L., Kaiser, G., Mesa, V. & Van Dooren, W. (2019). Beyond small, medium, or large: Points of consideration when interpreting effect sizes. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 1–8. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09908-4

Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N. & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology, 112*(3), 628–648. https://doi.org/10.1037/edu0000384

Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: A multimodal social semiotic study*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet].

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (3 uppl.). Liber.

Boyer, T. W. & Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3=2/6=3/9=4/12? *Journal of Experimental Child Psychology, 111*(3), 516–533. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.11.001

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H. & Bezuk, N. S. (2006). *Learning mathematics in elementary and middle schools* (4 uppl.). Merrill/Prentice Hall.

Cook P. J., Dodge K., Farkas G., Roland G., Fryer R. G., Guryan J., Ludwig J., Mayer S., Pollack H. & Steinberg L. Not too late: Improving academic outcomes for disadvantaged youth. *American Economic Review, 113*(3), 738–65.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Wyberg, T., Pettis, C. & Fagerlund, C. (2019). Reconstructing the unit on the number line: Tasks to extend fourth graders' fraction understandings. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(3), 180–194. https://doi.org/10.1080/19477503.2016.1245035

Dündar, S. (2015). Mathematics teacher-candidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1379–1397. https://doi.org/10.12973/EURASIA.2015.1396A

Dyson, N. I., Jordan, N. C., Rodrigues, J., Barbieri, C., & Rinne, L. (2020). A fraction sense intervention for sixth graders with or at risk for mathematics difficulties. *Remedial and special education*, *41*(4), 244–254. https://doi.org/10.1177/0741932518807139

Ekdahl, A.-L. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections.* [Doktorsavhandling, Jönköping University].

Ennis, R. P. & Losinski, M. (2019). Interventions to improve fraction skills for students with disabilities: A meta-analysis. *Exceptional Children*, *85*(3), 367–386. https://doi.org/10.1177/0014402918817504

Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap.* [Licentiatavhandling, Stockholms universitet].

Erlwanger, S. H. (1973). Benny´s conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, *1*(2), 7–26.

Fazio, L. K., DeWolf, M. & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory, and Cognition*, *42*(1), 1–16. https://doi.org/10.1037/xlm0000153

Flores, M. M., Hinton, V. M. & Taylor, J. J. (2018). CRA fraction intervention for fifth-grade students receiving tier two interventions. *Preventing School Failure*, *62*(3), 198–213. https://doi.org/10.1080/1045988X.2017.1414027

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Jordan, N. C., Siegler, R., Gersten, R. & Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, *105*(3), 683–700. https://doi.org/10.1037/a0032446

Fuchs, L., Malone, A., Schumacher, R., Namkung, J. & Wang, A (2017). Fraction intervention for students with mathematics difficulties: Lessons learned from five randomized controlled trials. *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 631–639. http://doi.org/10.1177/0022219416677249

Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B. & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades* (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Reginal Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J. & Anderson, R. E. (2010). *Multivariate data analysis* (7 uppl.). Prentice-Hall.

Hamdan, N. & Gunderson, E. A. (2017). The number line is a critical spatial-numerical representation: Evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology*, *53*(3), 587–596. https://doi.org/10.1037/dev0000252

Hecht, S. A., Close, L. & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *86*(4), 277–302. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2003.08.003

Hudson, P. P. & Miller, S. P. (2006). *Designing and implementing mathematics instruction for students with diverse learning needs*. Pearson.

Huges, C. A., Morris, J. R., Therrien, W. J. & Benson, S. K. (2017). Explicit Instruction: Historical and contemporary context. *Learning Disabilities Research and Practice, 32*(3), 140–148. https://doi.org/10.1111/ldrp.12142

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. I B. Litwiller (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (s. 72–78). National Council of Teachers of Mathematics.

Inagaki, K., Morita, E. & Hatano, G. (1999). Teaching-learning of evaluative criteria for mathematical arguments through classroom discourse: A cross-national study. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 93–111. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0102_1

Jigyel, K. & Afamasaga-Fuataí, K. (2007). Models of fractions and equivalence. *Australian Mathematics Teacher, 63*(4), 17–25.

Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N. & Dyson, N. (2017). Delaware longitudinal study of fraction learning: Implications for helping children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 621–630. https://doi.org/10.1177/0022219416662033

Kamii, C. & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(4), 365–378. https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90035-7

Karlsson, E. & Wennergren, A. C. (2014). Att använda elevsvar i undervisningen. *Forskning om undervisning och lärande*, (13), 53–66. https://doi.org/10.61998/forskul.v2i13.27562

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan* (1 uppl.). Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kullberg, A. & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 547–567. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0080-9

Lamon, S. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teacher* (4 uppl.). Lawrence Erlbaum Associates.

Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik, 25*(1), 25–38.

Lee, S. J., Brown, R. E. & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198–220. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.564993

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 235–264. https://doi.org/10.1007/BF00305624

Levenson, E. (2010). Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 121–142. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9208-y

Lo, M. L. (2014). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Acta Universitatis Gothoburgensis.

Manula, T. (2018). *Students' and teachers' jointly constituted learning opportunities*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet]

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Studentlitteratur.

Mills, J. (2016). Developing conceptual understanding of fractions with year five and six students. I B. White, M. Chinappan & S. Trenholm (Red.), *Opening up mathematics education research* (Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia) (s. 479–486). MERGA.

Mercer, S. (2018). Psychology for language learning: Spare a thought for the teacher. *Language Teaching*, *51*(1), 1–22. https://doi.org/10.1017/S0261444817000258

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and breakers: New approaches to teaching the rational number system. I M. S. Donovan & J. D. Bransford (Red.), *How students learn: history, math, and science in the classroom* (s. 121–162). National Academies Press.

Pang, M. F. & Ki, W. W. (2016). Revisiting the idea of 'critical aspects'. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *60*(3), 323–336. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1119724

Pedersen, P. & Bjerre, M. (2021). Two conceptions of fraction equivalence. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 135–157. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7

Rodrigues J., Dyson N., Hansen N. & Jordan N. C. (2016). Preparing for algebra by building fraction sense. *Teaching Exceptional Children*, *49*, 134–141. https://doi.org/10.1177/0040059916674326

Ruiz-Primo, M., Shavelson, R., Hamilton, L. & Klein, S. (2002). On the evaluation of systemic science education reform: Searching for instructional sensitivity. *Journal of Research in Science Teaching*, *39*, 369–393. https://doi.org/10.1002/tea.10027

Schneider, M. & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *36*(5), 1227–1238. https://doi.org/10.1037/a0018170

Schumacher, R. F., Jayanthi, M., Gersten, R., Dimino, J., Spallone, S. & Haymond, K. S. (2018). Using the number line to promote understanding of fractions for struggling fifth graders: A formative pilot study. *Learning Disabilities Research & Practice*, *33*(4), 192–206. https://doi.org/10.1111/ldrp.12169

Sidney, P. G., Thompson, C. A. & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, *58*, 288–298. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science*, *26*(4). https://doi.org/10.1177/0963721417700129

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994–2004. https://doi.org/10.1037/a0031200

Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L. & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide (NCEE #2010-4039).* National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Skolverket. (2008). TIMSS 2007: *Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv* (Rapport 323).

Sun, X. (2015). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 65–85. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9263-4

Svanteson Wester, J. (2022). *Teaching and learning mathematics with integrated small-group discussions. A learning study about scaling geometric figures*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].
Sveider, C. (2021). *Representationer av tal i bråkform. En studie om matematikundervisning på mellanstadiet*. [Doktorsavhandling, Linköpings universitet].
Tian, J., Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2021). Distributions of textbook problems predict student learning: Data from decimal arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 113*(3), 516–529. https://doi.org/10.1037/edu0000618
Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 419–441. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2
Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (10 uppl.). Pearson.
Van Steenbrugge, H. V, Lesage, E., Valcke, M. & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers ' knowledge of fractions : A mirror of students ' knowledge? *Journal of Curriculum Studies, 46*(1), 138–161. https://doi.org/10.1080/00220272.2013.839003
Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningsed* [elektronisk resurs].
Wang, A. Y., Fuchs, L. S., Fuchs, D., Gilbert, J. K., Krowka, S. & Abramson, R. (2019). Embedding self-regulation instruction within fractions intervention for third graders with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 52*, 337–348. https://doi.org/10.1177/0022219419851750
Watson, A. & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 91–111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1
Vig, R., Murray, E. & Star, J. R. (2014). Model breaking points conceptualized. *Educational Psychology Review, 26*, 73–90. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9254-6
Vikström, A., Kullberg, A. & Runesson Kempe, U. (2017, 29 aug-2 sep). *Can public knowledge be created through practitioner research?: Learning studies and variation theory as mechanisms and strategies behind knowledge production in practitioners´ research* [konferenspresentation] 17:e Biennial EARLI 2017, Tampere, Finland.
Wong, M. (2013). Locating fractions on a number line. *Australian Primary Mathematics Classroom, 18*(4), 22–26.

Författarpresentationer

Cecilia Sveider

Cecilia Sveider är fil.dr i pedagogik med ämnesdidaktisk inriktning vid Linköpings universitet och forskar med fokus på matematikdidaktik för att förbättra undervisning och lärande inom matematik.

Anja Thorsten

Anja Thorsten är docent i pedagogik vid Linköpings universitet med ett särskild intresse för undervisningsutvecklande forskning.

Joakim Samuelsson

Joakim Samuelsson är professor i pedagogik med inriktning mot matematikdidaktik vid Linköpings universitet. Han undervisar på lärarprogrammet och bedriver forskning om undervisning och lärande i matematik, från förskola till gymnasieskola.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

Det matematiska samtalets utmaningar – andraspråkselever samtalar för att lösa problem i en bedömningssituation

Orginalartikel

Eva Norén*[1], Charlotte Ahlström Castillo[2] & Anne-Lie Hellström[2]

Sammanfattning

Studiens övergripande syfte var att undersöka på vilket sätt elever i årskurs 9, med svenska som andraspråk, samtalar kring och löser matematiska problem under en bedömningssituation som efterliknar en verklig muntlig nationell provsituation. I samtal behöver andraspråkselever ta risker och använda sig av ord de ännu inte behärskar. Enligt anvisningarna, som hör till de nationella proven, bör elevsamtalen vara utforskande där framåtsyftande frågor ställs och eleverna aktivt lyssnar på varandra. I resultatet framträder tre teman, som vi även har funnit i tidigare forskning; språkliga strategier, språkliga förmågor samt samtalsformer. Ytterligare ett tema framträder; undvikandestrategier. Studien visar att det är svårt att avgöra vilka matematiska kunskaper en elev har, när det svenska språket inte är väl utvecklat. Resultatet indikerar att eleverna i matematikundervisningen explicit behöver få träna på att använda språkliga strategier. Samverkan mellan lärare i matematik och svenska som andraspråk kan vara gynnsamt.

Nyckelord: matematik, andraspråkselever, bedömning, muntliga språkstrategier, gruppsamtal

Abstract

The purpose of the study was to investigate how second language learning students in grade 9, solve mathematical problems during an assessment situation, that is like an oral national exam situation. In dialogues, second language learners need to take risks and use words they have not yet mastered. According to the instructions in the national tests, the student conversations should be exploratory, where forward-looking questions are asked, and the students should actively listen to each other. The results show three themes, also found in previous research; linguistic strategies, linguistic abilities and forms of conversation. A fourth theme emerges; avoidance strategies. The study shows that it is difficult to determine what mathematical skills a student has when the Swedish language is not well developed. Students need explicit practice in using linguistic strategies during mathematics instruction, and fostering collaboration between mathematics and Swedish as a second language teachers proves beneficial.

Keywords: Mathematics, Second language learners, Assessment, Oral language strategies, Group discussion

1 Institutionen för ämnesdidaktik, Stockholms universitet

2 Stockhom stad

*Korresponderande författare:
Eva Norén
eva.noren@su.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 3, 2024, s. 60–78
DOI: 10.61998/forskul.v12i3.24016
ISSN:2001-6131

Förhandspublicerad: 2024-05-27
Publicerad: 2024-10-14

Introduktion

Den här artikeln handlar om hur elever som har svenska som sitt andraspråk samtalar i en bedömningssituation i årskurs 9, när de löser matematiska problem som är formulerade på svenska. Denna grupp elever förväntas lösa de nationella proven i matematik på svenska, trots att deras kunskaper i svenska kanske inte räcker till. Bakgrunden till artikeln utgår från att många lärare, liksom vi själva, upplever att andraspråkselever (elever med svenska som andraspråk) ofta blir stressade, har svårt att hitta ord och begrepp, men också blir blyga och underpresterar, speciellt i sammanhang där de förväntas prestera muntligt under matematiklektionerna, och särskilt i bedömningssituationer.

Som matematiklärare respektive lärare i svenska som andraspråk, upplever vi att just elever på högstadiet som har svenska som sitt andraspråk har svårt att nå de högre betygen i matematik. Detta problem är generellt för denna grupp elever i landet. Enligt Skolverkets statistik vad gäller slutbetyg i årskurs 9 (riksnivå) 2019/2020, hade 18 procent av eleverna med svenska som andraspråk F i matematik. Elever med svenska som andraspråk presterar på en lägre nivå i matematik, än de som har svenska som första språk. 17,5 procent av elever med svenska som andraspråk fick betyget F jämfört med 7,5 procent av de elever som har svenska som modersmål, vilket betyder en skillnad på drygt 230 procent (Skolverket, statistik år 21/22). I vår undersökning vill vi få kunskap om just den muntliga prestationen, i matematiskt argumenterande och resonerande samtal, för att förstå vilka utmaningar som denna grupp elever möter.

De nationella proven konstrueras utifrån analyser av läro- och kursplaner och ”ska täcka så stora [kunskaps]områden som möjligt” (Skolverket, 2023). I syftesdelen i kursplanen i matematik beskrivs i de långsiktiga målen vilka förmågor eleverna ska ges förutsättningar att utveckla. Dessa är förmågan att *framföra problem*, *använda och analysera* matematiska begrepp och samband mellan begrepp, *föra och följa matematiska resonemang* och *använda matematiska uttrycksformer* för att *samtala om*, *resonera* och *redogöra* för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. ”Språklig förmåga är således av stor betydelse när elever lär sig matematik. I praktiken är ett språkutvecklande arbetssätt i matematik en förutsättning för att eleverna skall kunna utveckla kursplanens långsiktiga mål” skriver de Ron (2024).

Den muntliga delen av det nationella provet i matematik (NPM) innebär att eleverna skall sitta tillsammans i mindre grupper, sammansatta av lärare, och gemensamt försöka lösa olika matematiska problem genom att samtala med varandra. Det gäller för grundskolans årskurs 3, 6 och 9 där NPM genomförs. Provtiden för den muntliga delen upplevs i praktiken som för kort för att ha med studiehandledare som talar elevernas modersmål, eller för att sitta och slå i lexikon. Skolverket nämner dock att varje elevgrupp ska få den tid de behöver och att elever kan få språkstöd av modersmålstalande lärare. Provsituationen är särskilt utmanande för andraspråkselever eftersom de skall prestera och de bedöms på hur de använder ord och begrepp, men också språkliga förmågor på sitt andraspråk, förutom kunskaper i matematik. Hur väl de lyckas förklara, resonera och argumentera för sina tankar är här av betydelse, men också hur väl de bidrar till att samtalet förs vidare.

För andraspråkselever är det akademiska språket mer utmanande än det språk de använder i vardagen. Det kan vara svårt att ställa meningsfulla frågor på sitt andraspråk och bristen på ord kan leda till att eleverna väljer att inte deltaga muntligt. Visuella hjälpmedel är en hjälp, men stöttar inte eleverna tillräckligt, hävdar Truxaw och Rojas (2013). Det är också vår personliga erfarenhet från klassrummet att vardagsspråket på svenska inte heller räcker till. En tvåspråkig lärare som använde vardaglig arabiska, för att förklara matematiska begrepp på svenska, beskriver detsamma (Norén, 2011). I studien *Challenges of learning mathematics in a second language* konstaterar Truxaw och Rojas (2013) att eleverna har svårt att förklara, resonera, motivera och argumentera för sina tankar. Detta, skriver författarna, kan bidra till att enskilda elever tappar självförtroendet och kanske får ett sämre resultat och betyg, än vad hen egentligen borde få utifrån sina rent matematiska kunskaper.

Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka på vilket sätt elever i årskurs 9, med svenska som andraspråk, samtalar kring och muntligt löser matematiska problem under en bedömningssituation. Eleverna löser tillsammans äldre frisläppta uppgifter från den muntliga delen av NPM och bedömningssituationen efterliknar en verklig NPM situation.

Följande frågor har varit vägledande:

- Vilka språkliga strategier och språkliga förmågor använder eleverna sig av?
- Hur kan samtalen beskrivas i termer av hur eleverna lyssnar på varandra och bygger på varandras idéer?
- Vilka framgångsfaktorer och vilka hinder framträder för att samtalet leder eller inte leder till en lösning av det matematiska problemet?

Bakgrund

Argumenterande och resonerande samtal, som krävs i den muntliga delen på det nationella provet i matematik, förutsätter att eleverna samtalar, ifrågasätter, samt vänder och vrider på det som samtalet behandlar. Detta har visat sig vara mycket kulturbundet. Hunter (2014) har tittat närmare på detta, hon hänvisar till sociomatematiska normer (Yackel & Cobb, 1996). Sociomatematiska normer handlar om hur man i klassrummet vänjer sig vid att arbeta, till exempel med att lösa matematiska problem individuellt eller i grupp, att ifrågasätta eller att ställa frågor om matematikinnehållet, men också vilka lösningar på problem som accepteras. Att elever arbetar i smågrupper under matematiklektionerna är exempel på en social norm, men att kräva att eleverna skall nå konsensus genom att använda matematisk argumentation, är en sociomatematisk norm (Kazemi & Stipek, 2001). För att samtalet skall komma igång och leda till en diskussion där ett matematiskt resonemang kan leda till en lösning på ett problem, krävs, menar Hunter, att ett utforskande samtal sker. I ett sådant samtal frågar och ifrågasätter eleverna, genom att vara delaktiga i en gemensam diskussion.

I instruktionerna till NPM finns information om hur det muntliga provet, del A, ska genomföras och hur bedömningen av detsamma ska gå till. En social norm är här att den muntliga delen av NPM genomförs i en grupp av elever, men också hur provsituationen iscensätts och att eleverna ska resonera högt när de löser uppgifterna:

> Uppmana eleverna att tänka högt. Berätta också att lärarens roll är att fördela ordet, inte att bekräfta om eleverna har rätt eller inte. Om eleverna är tveksamma ska de vända sig till varandra och reda ut tillsammans. Den elev som redovisar får tala färdigt och sedan kan övriga elever komplettera om behov finns. Om frågorna är besvarade innan de är ställda behöver frågorna inte ställas. (Skolverket, u.å a, s. 15).

Sociomatematiska normer hittas främst i bedömningsanvisningarna för NPM och relaterar till kursplanen i matematik, det vill säga att det som ska bedömas är ”De förmågor som det muntliga provet avser att pröva är problemlösning, begrepp, resonemang och kommunikation" (Skolverket, u.å b, s. 7).

Såväl provets genomförande som bedömningsanvisningarna lutar sig mot forskning, exempelvis att läraren bör eftersträva att planera och stötta gruppsamtal så att de förs *utforskande*. Det innebär bland annat att eleverna förstår att de inte måste hålla med varandra men ändå kan komma fram till en gemensam lösning (Hunter, 2014, se även Mercer, 2004; Mercer & Sams, 2006). Vi belyser detta ytterligare i avsnittet Teoretiska utgångspunkter.

Tidigare forskning

Tidigare forskning visar att det är viktigt för andraspråkselever att få rätt hjälp och stöd när det ställs krav att prestera ämnesmässigt på sitt andraspråk. Att veta hur man gör när man argumenterar, analyserar och diskuterar, kräver att man har fått träna på just sådana språkliga förmågor, och att man har språkliga redskap för att utföra dessa talhandlingar på sitt andraspråk (Axelsson m.fl., 2010; Hajer & Meestringa, 2010).

Elever som har svenska som sitt andraspråk har dels olika kunskaper om och i det svenska språket, dels olika studievanor (Economou, 2018). Denna grupp elever bedöms ofta ha behov av extra stöd i det svenska språket, och behöver utveckla en sådan svenska som elever som har svenska som modersmål redan har utvecklat, både vad gäller ord/begrepp, grammatiska strukturer, men också kulturella drag som till exempel hur man uttrycker sig, hur man samtalar, samt innebörden av ord och begrepp utanför det rent lexikala. För många elever som har svenska som sitt andra eller tredje språk, och särskilt för nyanlända elever (som har gått kortare tid än fyra år i svensk skola), är det en dubbel utmaning att lära sig svenska och samtidigt, på ett andraspråk, lära sig och prestera i skolans alla ämnen (Moschkovich, 2002, 2007, 2013).

Att få möjlighet att prestera på en rättvis kognitiv nivå i matematiken, även om inte språket räcker till, är en rättighet och eftersträvansvärt för elever som har svenska som andraspråk. För att lyckas med en inkluderande undervisning i matematiken måste läraren ha kunskap om elevernas erfarenheter av matematik, inte bara begrepp och terminologi, utan även hur läraren kan arbeta med instruktioner. Moschkovich (2013) hävdar att lärare behöver behärska såväl den matematiska diskursen som elevernas språkhistoria och deras utbildningsbakgrund generellt. Lärare bör också underlätta för eleverna att använda olika sätt att resonera på, skriver Moschkovich, genom att låta dem träna på språkliga förmågor som att resonera, argumentera och förklara samt att jämföra.

Orsaken till att andraspråkselever inte förstår ett ord i matematik kan vara att det begrepp som ordet representerar inte är bekant på det ännu främmande språket. Eleven kan däremot förstå begreppet på sitt modersmål. Barwell (2009) hävdar att det är svårt för lärare att veta om andraspråkelevers problem med matematiska ord och begrepp handlar om språkkunskaper eller om det är ett missförstånd av en representation. Moschkovich (2007) förklarar att för elever som lär sig ett andraspråk utgör det en stor utmaning att byta mellan två språk – deras modersmål, som de är vana vid att använda, och det nya andraspråket – när de löser matematiska problem och uttrycker sina svar. Detta kan leda till längre responstider, vilket i sin tur kan påverka elevernas prestation i den muntliga delen av nationella provet i matematik (NPM), som utförs under begränsad tid.

Såväl Barwell (2009), Norén (2011), Norén och Caligari (2020) som Truxaw och Rojas (2013) konstaterar att vanliga problem för andraspråkselever, vad gäller problemlösning i matematik, är att elever missar implicit information, det vill säga information som inte är direkt uttryckt i texten, och att enskilda ord och begrepp kan dra elevens tankar åt fel håll. Ovanliga ord och uttryck tar kraft från elevens tankemässiga arbete med själva matematikproblemet (Parszyk, 1999).

Anpassningar och modifieringar av interaktionen under ett samtal är en följd av att någon ger signaler om bristande förståelse. Det uppstår då förhandlingar om olika betydelser och språket kan anpassas efter en nivå som är aktuell (Lindberg, 2004). För andraspråkselever kan förståelse för, och tolerans av, olika samtalsstilar och kulturspecifika kommunikationsmönster ha en stor betydelse för själva interaktionen och på så vis även för andraspråkstalarnas möjligheter att hålla kvalificerade samtal (Lindberg, 2004).

Rubinstein-Ávila med flera (2015) konstaterar att fokus i matematikundervisningen har gått från traditionell till en mer problemlösningsbaserad undervisning. De tar upp att det finns ett utbrett missförstånd att matematik är ett universellt språk i sig, vilket inte skulle kräva särskilt språkstöd. Andraspråkselever behöver få delta i en matematikundervisning där de förväntas att aktivt resonera, försvara och omvärdera sitt matematiska tänkande. Rubinstein-Ávila med flera, nämner även att individer intuitivt har förmåga att känna igen mönster, identifiera relationer, känna igen relativa enheter samt att kan tänka flexibelt, bedöma, tänka kring sannolikhet och göra huvudberäkningar, samt har kunskap och skicklighet samt en intuitiv förståelse av siffror och tal. Dessa förmågor, skriver Rubinstein-Ávila med flera (2015), tränas bäst genom att eleverna får deltaga i aktiviteter där man talar, räknar och diskuterar samtidigt som man övar sin förmåga att bedöma rimligheten i sitt eget och andras resonemang.

Elever som är andraspråkselever behöver ofta ta risker, samt använda sig av ord och begrepp hen ännu inte behärskar. För eleverna kan det då, som Abrahamsson och Bergman (2005) framhäver ” bli nödvändigt att ta till olika strategier och överanvända uttryck eller skapa nya ord” (s. 18). Abrahamsson och Bergman visar att olika strategier är en viktig del av andraspråksutvecklingen. Den som lär sig ett nytt språk behöver vara aktiv i att skapa sitt språk, ibland skapas egna regler och hypoteser helt omedvetet. Exempel på detta är övergeneraliseringar – att överanvända en språklig regel (t.ex. säljde, komde), förenklingar (hoppar över prepositioner, artiklar), omskrivningar och nyordsbildningar som att ”mardrömma” (drömma, mardrömmar) eller ”fotvantar” (raggsockor). Dessa språkliga strategier är vanliga och visar på ett risktagande, vilket alltså är en utvecklingsfas i lärandet av ett andraspråk. Ofta växlar hen mellan helt korrekta och egna lösningar som ”dom där djuren” eller ”den där djurorna” (Abrahamsson & Bergman, 2005). Det finns således en risk för missförstånd när andraspråkselever utvecklar och prövar olika språkliga strategier.

Teoretiska utgångspunkter

Vi utgår från ett sociokulturellt perspektiv på språk där samtal och lärande via dialog lyfts fram. Språket utgör det främsta kommunikationsmedlet som människor använder (Vygotskij, 1999). Vi kommunicerar tankar och idéer, samtidigt som vi försöker förstå sådant som är nytt för oss. Den sociokulturella teorin är ett ramverk som bland annat har använts för att utforska matematik och språkperspektiv såsom tillägnande av vokabulär, användandet av språkliga register och delaktighet i meningsfulla matematiska samtal. Vi har tidigare nämnt en form för matematisk dialog som eftersträvas i NPM, nämligen *utforskande*. Samtal som inte är utforskande kan vara *disputerande*, då eleverna inte alls lyssnar på varandra utan försvarar sina egna idéer, eller *kumulativa*, då elevernas utsagor accepteras helt okritiskt utan något som helst reflekterande från elevernas sida. Dessa tre slag av samtal som Mercer och Sams (2006) samt Hunter (2014) beskriver är en teoretisk konstruktion, i verkligheten överlappar dessa varandra, men det finns oftast en huvudfåra i elevernas samtal och resonemang (Mercers, 2004; Mercer & Littleton, 2007). De utgår från Vygostkijs (1999) syn på kommunikation, dialog och tanke. De tre formerna för dialog eller samtalande, skiljer sig åt vad gäller hur elever engagerar sig i varandras resonemang och framförda idéer. I det eftersträvade utforskande samtalet är eleverna kritiska och konstruktiva genom att ställa framåtsyftande frågor och de lyssnar aktivt på varandra. Oftast kommer eleverna fram till en gemensam lösning av matematiska problem eftersom en gemensam ståndpunkt utvecklas under det undersökande samtalets gång. I enlighet med Mercer (2004) menar vi i föreliggande studie att utforskande samtal är de som i första hand behöver utvecklas för att eleverna ska kunna föra matematiska samtal där alla deltar och gemensamt löser problem.

Vårt arbete är i linje med Mercer och hans kollegor. De intresserar sig för hur elever tillsammans skapar mening och kunskap genom social interaktion i dialog, men också för hur dialog får dem att bli allt mer kapabla att delta i vissa typer av intellektuell verksamhet (Mercer & Littleton, 2007). På så sätt delas kunskap och förståelse skapas gemensamt. Dialog mellan elever och med stöd av en lärare, är vad som förväntas i den muntliga delen av NPM.

Metod, urval och empiri och analys

Vi har undersökt tre elevgruppers samtalande under två olika problemlösningssituationer, liknande den muntliga delen av NPM i årskurs 9. Vår avsikt var att på ett så naturligt sätt som möjligt fånga empiriska data i en redan existerande miljö, i det här fallet deltog en av oss författare i samtalen. Valet av forskningsmetod grundas i att vi ville undersöka hur eleverna samtalar med varandra kring matematiska problem, i en för dem stressande situation som en provsituation utgör (Genzuk, 2003).

Vi har utgått från två offentliga, icke sekretessbelagda, muntliga NPM. Det ena bygger på diagram med tillhörande frågor av algebraisk karaktär (PRIM-gruppen, 2014). Det andra provet bygger också på diagram men frågorna syftar på procentuella beräkningar med hjälp av avläsningsdata (PRIM, 2010). De flesta NPM är sekretessbelagda, vilket begränsar urvalet av underlag för att göra undersökningen. Vi har således använt två uppgifter från äldre prov som är frisläppta.

Urvalet elever utgörs av tolv elever i åk 9, vilka alla har svenska som sitt andraspråk. Skolan ligger i ett förortsområde och har en hög andel elever med svenska som andraspråk. Eleverna har gått i skola olika lång tid i Sverige. Eleverna som deltar i studien var alla 15 år och har gett sitt skriftliga samtycke. Eleverna fick information om studien av sina forskande lärare och fick reda på att de kunde lämna studien när helst de ville utan att förklara varför. Eleverna fick också veta att deras namn inte anges någonstans och inte heller deras resultat på de matematiska uppgifterna som de skulle samtala om. Samtligt inspelat material förvaras enligt Stockholms universitets anvisningar.

Tabell 1

Elevernas pseudonymer i respektive grupp

Grupp	Pseudonym
A 1–2 år i Sverige Nyanlända	Alex Eli Kim Quan
B Ca 4 år i Sverige Räknas inte som nyanlända	Charlie Billie Robin Tam (finns inte med i excerpten pga. sjukdom vid inspelningarna)
C Födda i Sverige SVA-elever med annat modersmål i hemmet	Tintin Dylan Nico Marjan

Eleverna kategoriserades fyra och fyra i tre grupper (tabell 1). Grupp A (där Alex, Eli, Kim och Quan ingick) har varit cirka 1–2 år i Sverige, grupp B (Charlie, Billie, Robin och Tam), cirka 4 år och grupp C (Tintin, Dylan, Nico och Marjan) är födda i Sverige men har annat modersmål än svenska. Vi kategoriserade eleverna på detta sätt utifrån antagandet att de behärskar svenska på mer eller mindre samma nivå inom varje kategori. Elevernas namn är fingerade.

Empirin utgörs av sex ljudinspelade samtal om 40–60 minuter, totalt 320 minuter. Två olika provtillfällen för vardera grupper har ljudinspelats, dessa inspelningar har sedan transkriberats. Samtalen skedde under april och maj månad 2020. För att få svar på våra forskningsfrågor har vi använt oss av en tematisk analys (Braun & Clarke, 2006). Analysprocessen består av några typiska steg inom tematisk analys; vi bekantade oss med materialet genom att lyssna och läsa igenom det transkriberade materialet flera gånger, vi sökte efter teman som kan besvara forskningsfrågorna, strukturerade och definierade teman och slutligen avgränsade och namngav vi teman. Vi har närmat oss materialet med ett abduktivt förhållningssätt vilket möjliggjort ett mer öppet letande efter teman. I vårt fall innebär detta att vi hade antaganden om teman som vi skulle komma att stöta på i materialet, med utgångspunkt i den tidigare forskningen och som vi ser som rimliga utgångspunkter för att få svar på våra forskningsfrågor. Men, vi har även varit öppna för att icke förväntade teman kunde dyka upp och visa sig vara viktiga.

Vi letade efter särdrag i transkripten som relaterade till *språkliga strategier*, *språkliga förmågor* eller *samtalsform* med utgångspunkt i den tidigare forskningen. Dessa särdrag bildar en ram för vad vi fann i det empiriska materialet, de definieras som teman enligt nedan:

Språkliga strategier som eleverna använder sig av för att samtala och kommunicera är exempelvis förenklingar, transfer och att överanvända språkliga regler (Abrahamsson & Bergman, 2005).

Språkliga förmågor som eleverna visar att de använder och som ställs upp som kunskaper som skall bedömas i den muntliga delen av NPM, att *resonera*, *argumentera* och *motivera*, samt att *diskutera* och *värdera*. Vad innebär då dessa förmågor? Vilka konkreta ord och begrepp används när man argumenterar eller värderar, och som indikerar att eleven har dessa språkliga förmågor? Vi har utgått från ord och begrepp som vanligen tas upp i läromedel för elever med andraspråk och då ofta förekommer i olika typer av stöttningsmallar för språket. I dessa förekommer ofta ord, meningar eller början på meningar som visar att eleven kan uttrycka en åsikt eller värdera information på sitt andraspråk. Som exempel kan nämnas uttryck som, ”jag tycker att …,” ”min åsikt är …”, ”eftersom”, ”på grund av …”. Eleverna kan uttrycka avvikande åsikt, ”jag håller inte med …”, och be om förtydligande, ”kan du förklara igen …”. När man värderar och analyserar gör man ofta jämförelser och då används adjektiv i hög grad varför bland annat medvetenheten om adjektivets kongruens, stor, större, störst är viktigt. Att just dessa ord och begrepp skulle kunna indikera utvecklade språkliga förmågor stöds av Hajer och Meestringa (2010). Hajer och Meestringa har skrivit om språkutvecklande didaktik och tar upp flera exempel på hur man kan bryta ned vilka konkreta ord och begrepp eleven behöver ha för att just resonera, argumentera, motivera, diskutera och värdera. Med väl genomtänka språkliga stödstrukturer (så kallade nyckelschema) kan man stötta eleven i processen att börja uttrycka en åsikt och att värdera någon annans åsikt. Ett sådant nyckelschema utgår från tre aspekter, tankestruktur, lektionsaktivitet och språkliga verktyg. Om tankestrukturen är att eleven skall kunna ange en åsikt (argumentera) kan det konkreta språkliga verktyget vara orden ”min åsikt är att …”, ”jag anser att …” (Hajer & Meestringa, 2010).

Vi letade i materialet efter vilken samtalsform som var vanligast bland eleverna – disputerande, kumulativt eller explorativt (Mercer & Sams, 2004) och om det bidrog till att eleverna kunde närma sig en lösning av uppgiften.

Resultatet visar att vi kunde identifiera de tre ovan nämnda temana i det empiriska materialet. Dock framträdde ytterligare ett tema, ett som vi inte funnit i tidigare forskning och på förhand inte kände till. Ett tydligt mönster trädde fram i flera av de ljudinspelade elevsamtalen och vi bestämde oss för följande definition av det fjärde identifierade temat:

Undvikandestrategier – som belyser hur elever undviker att deltaga i samtalet och att svara på frågor med hjälp av olika strategier, till exempel att hålla med, att låta en annan elev ta över frågan eller helt enkelt bara svara ”jag vet inte”.

Resultat

Vi ger här specifika exempel på transskript och på analys av desamma och hur vi har kategoriserat mönster som har framträtt i teman enligt ovan nedtecknade beskrivningar. I slutet av resultatavsnittet följer en sammanfattning av resultatet.

Språkliga strategier som eleverna använder sig av

De elever som har visat mer utvecklade språkliga strategier och är risktagare, använder sitt svenska språk genom att typiskt använda egna ord och konstruktioner som till exempel ”kostnadssträckan”, för grafen som visar kostnaden, eller ”den vita linjen” för en vit stapel. Även deiktiskt tal, som till exempel uttrycket ”den här” (följt av pekande på grafen), är en relativt vanlig strategi i alla grupperna (Moschkovich, 2002, 2007). Nedan presenterar vi först de två uppgifterna som eleverna arbetade med. Därefter följer två excerpter från datamaterialet. Efter vardera excerpten följer analysen av detsamma.

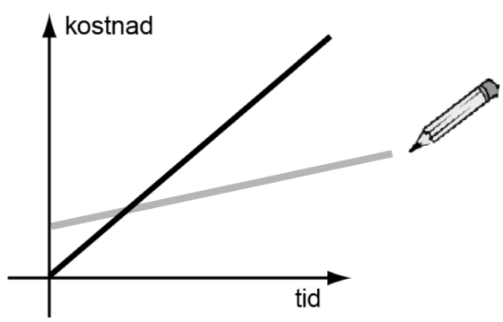
De två uppgifterna

Eleverna skulle läsa av olika grafer i ett diagram för att dra slutsatser kring total samtalskostnad för olika telefonbolag (se figur 1).

Figur 1

Frisläppt uppgift från NPM (2014), en av graferna i uppgiften

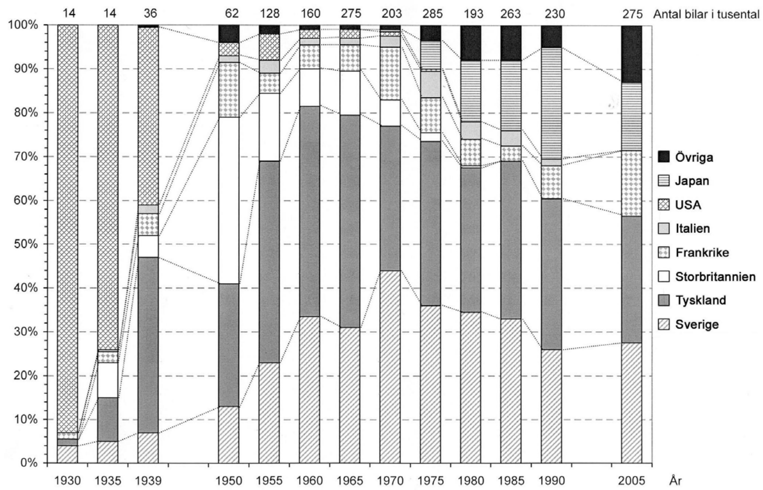
Antag att samtalsavgiften i graf G är 2 kr/min. Skissa grafen för bolag A i samma diagram. Vad betyder skärningspunkten mellan graferna?



Grafen i figur 1 ovan är ett exempel på grafer från uppgiften i NPM 2014. Utifrån fyra olika exempel på grafer ska eleverna försöka komma fram till det mest förmånliga priset.

Figur 2

Frisläppt uppgift från NPM (2010), stapeldiagrammet



Not. Nyregistrerade bilar i Sverige 1930–2005 fördelade på olika tillverkningsländer (andelar i %).

Uppgiften går ut på att visa kunskaper om hur man läser av ett diagram, gör procentuella beräkningar och kan se skillnad på procent och procentenheter. Som underlag får eleverna olika påstående att förhålla sig till. De ska svara falskt eller sant. Utmaningen är att läsa av och använda informationen från stapeldiagrammet för att lösa uppgifterna.

Excerpt 1 (grupp A) figur 1

Läraren:	Vi tittar på bolag B nu och A säger att bolag A är billigare än bolag B … hur ser man det?
Quan:	Kanske för att den här [pekar på grafen] är längre…som kostnad…
Läraren:	Du läser alltså av axeln som visar kostnad … ja … vad säger du Eli?
Eli:	Va…
Läraren:	Vad säger du? stämmer det som Quan säger att bolag A är billigare än bolag B?
Eli:	Kanske
Läraren:	Vill du tänka vidare?
Eli:	Ja
Läraren:	Kim, vad säger du? Är bolag A billigare än bolag B? I diagram B … den första … där…
Kim:	[Suckar djupt] vet inte … får jag tänka…
Läraren:	Javisst. Alex, vad säger du?
Alex:	Jag tycker att bolag A är billigare än B, eftersom kostnadssträckan [grafen som visar kostnaden] visar bolag B längre [högre] än bolag A.
Läraren:	Hur tänker du då?
Alex:	Om här fanns några siffror … liksom 69 kronor, då man vet att bolag B … dyrare än bolag A: eftersom det är längre [grafen stiger].

I excerpt 1 använder Alex sig av ord som hen själv kommer på för att förklara det hen vill säga, vilket är ett tecken ett risktagande på, således pågår andraspråksutveckling. Hen säger "kostnadssträcka" i stället för att använda ordet "graf". Det är en effektiv ordkonstruktion för att förklara ett för eleven på svenska obekant ord. Ordet "kostnadssträcka" signalerar att eleven förstått funktionen av grafen och läraren förstår vad hen menar. Quan förklarar grafens lutning (som ökar) genom att peka på grafen och säga att den är längre, i stället för att använda ordet stiger eller ökar - ord som för hen troligtvis inte är lika bekanta. Dock förstår läraren väl vad som avses. Att vidare peka på grafen förstärker intrycket av att eleven förstått. Vår slutsats här är att båda eleverna har förstått uppgiften och kan tolka grafen rätt, men saknar adekvata ord och uttryck för att föra ett förklarande resonemang. Genom att peka och konstruera egna ord lyckas eleverna visa läraren att de kan förklara. Eli och Kim deltar inte aktivt i diskussionen utan svarar undvikande. När läraren försöker få med dem, begär de mer betänketid. Vi ser att eleverna behöver utökad tid för att resonera.

Excerpt 2 (grupp B) figur 2

[Stapeldiagrammet är utformat på ett sätt som ingen av eleverna tidigare hade träffat på, vilket förstås kan påverka eleverna. Här ber läraren en elev att börja diskutera sin fråga, eleven skall tolka den procentuella andelen i diagrammet.]

Läraren:	Fråga nr 3 då, det är Charlies fråga. 1965 var drygt 30 % av de nyregistrerade bilarna svenska.
Charlie:	Eeh, nej, det står, 1965 var DRYGT [höjer rösten] 30, eeh, … det är lite över 60 eller jag menar 30 … så, ja …
Läraren:	Hur ser man det?
Charlie:	Det är ju … det står såhär: 30 % sen streck 65 svenska vad heter det bilar, det är lite över 30 %. Typ 32 eller någonting. Så svaret är falskt.
Läraren:	Så du menar att svaret är falskt, vad säger du?
Robin:	Alltså … man vet inte om det är och det är lite mer än 30 … de kanske har ritat eller nåt …
Charlie:	Nej, de ritar inte fel … så det är falskt.
Läraren:	Skall vi höra vad Billie säger?
Billie:	Jag säger att det är sant.
Läraren:	Du säger att det är sant, hur motiverar du det?
Billie:	För att det inte behöver vara exakt 30 % för att det stod drygt och den äär … lite mer än 30 % men det är ändå 30 %.
Läraren:	Vad betyder ordet drygt?
Billie:	Ungefär, ja jag tror de …
Charlie:	Ungefär, men jag tror att det, att det ska vara typ 20 någonting men aaa. Men jag säger sant, det är sant … men 30 det är lite över. Drygt det stod drygt [exalterad] … sant men står det över då gills det inte. Aaaa det är sant det är sant.
Läraren:	Du säger att det är sant … om du skulle förklara ordet drygt Robin hur skulle du förklara det för någon som inte visste vad det betydde?
Robin:	Drygt kanske betyder att det är mindre än 30 eller jag vet inte … ungefär kanske det betyder.

Ovanstående exempel visar att ett ord som i sig inte är kopplat endast till matematiken, ”drygt”, kan ställa till det för eleverna. Charlie och Robin som inte har förstått vad ordet drygt betyder misstolkar uppgiften och svarar fel. De har dock en kamrat (Billie) som väljer en språklig strategi genom att visa att hen vet vad drygt betyder och som skulle kunna stötta de andra om de väljer att lita på hen. Billie visar även andra språkliga strategier, genom att ge en omskrivning och en synonym. Även Parszyk (1999) har visat att uttrycket drygt i matematikuppgiftssammanhang är svårt att förstå.

Språkliga förmågor som eleverna använder sig av

Det var svårt att hitta tydliga markörer för olika språkliga förmågor så som resonemang, argumentation, förklaring och motivering i materialet. Markörer för detta kan vara till exempel, *jag tycker att, min åsikt är att, jag håller inte med, därför att, för att*. Det handlar också om att kunna jämföra och värdera, då en användning av adjektiv och komparation ingår. I grupp A och B förekom detta sparsamt. Det förekom att några elever i grupp C visade mer utvecklade förmågor och även hade utvecklat avancerade sådana. Här anknyter vi till sociomatematiska normer eftersom eleven visar medvetenhet om hur en ifrågasätter och visar att en inte håller med. Detta sker på ett respektfullt sätt och kan leda till att samtalet fördjupas. Efter en stunds diskuterande (och uppenbarligen olika tankar om lösningen) säger Tintin i excerpt 3, ”Men nu tänker jag så här”, och fortsätter sedan sitt resonemang. Den andra eleven hakar på resonemanget och tillsammans närmar de sig en lösning och formulerar en ekvation. Här följer excerptet och analysen.

Excerpt 3 (grupp C) figur 1

[Eleverna skall resonera kring vilket telefonbolag som ger bäst villkor för konsumenten genom att tolka grafer och slutligen komma fram till en matematisk formel, en ekvation. Utmaningen här är att komma till räta linjens ekvation med utgångspunkt i exemplet i uppgiften.]

Läraren:	Vilken av de här graferna kan beskrivas med en ekvation? Alltså med en formel? Och hur skulle den kunna se ut?
Dylan:	Jag tror nog att grafen skulle kunna skrivas med en formel. För att du vet, alltså så här … du vet exakt vart den börjar … den börjar i origo.
Marjan:	Då skulle det kunna vara så häär … den måste ju ha minuter gånger typ …
Läraren:	Om vi antar att det kostrar två kronor per minut … hur skulle den se ut då?
Marjan:	Aaa.
Dylan:	Jag tror att det skulle se ut såhär … X gånger 2 … eller alltså 120 sekunder eller två minuter man kan ju skriva två minuter på olika sätt …
Tintin:	Nu tänker jag såhär … det blir ju liksom X gånger 2 lika med … alltså … eehm … då måste man väl gångra på båda sidorna, eftersom att … nej …
Läraren:	Vad står X för?
Marjan:	Det står för tiden som vi ringer … antal minuter
Tintin:	Antal minuter … antal kronor är det väl?
Marjan:	Nej, för vi vet kronor per minut. Det är tiden.
Tintin:	Det är ju två då.
Marjan:	X minuter gånger 2

I excerpt 3 visar eleverna i grupp C mer utvecklade språkliga förmågor och strategier än eleverna i grupp A och B. De kunde lättare komma igång med en diskussion där de också vågade ifrågasätta varandras utsagor, och stå upp för sina egna tankar. Utifrån sociomatematiska normer ser vi att eleverna Tintin och Marjan för ett samtal där de ifrågasätter och diskuterar på ett respektfullt sätt och också får igång ett samtal som närmast går att tolka som utforskande. Eleverna närmar sig en lösning och formulerar tillsammans en ekvation.

Undvikandestrategier

Flera elever visar på blyghet och använder sig av det vi har valt att definiera som temat undvikandestrategier. Elever ber om mer tanketid, de överlåter frågan till någon annan eller svarar

”jag vet inte”. Det var också vanligt förekommande att elever håller med den som sist hade ordet, i ett kumulativs samtalande. Två excerpt följer:

Excerpt 4 (grupp B) figur 2

[Eleverna skall läsa av diagrammet (se figur 2) och diskutera. En bit in i diskussionen diskuterar Charlie och Billie livligt. Robin försöker först komma in i diskussionen, men backar och blir osäker.]

Robin: Vänta … vilket var det … ?

Läraren: Ja, vad säger ni andra?

Robin: Jag vet inte.

Läraren: Blev du osäker?

Robin: Jag tror att det är jag som har rätt, men Billie är smart, så jag tror på Billie.

Excerpt 5 (grupp B) figur 2

Charlie: Jag tänker inte börja.

Läraren: Du vill inte börja?

Charlie: Nä, det är lugnt, asså, jag klarar mig. Jag tror att Robin vill börja.

Robin: Nej, det vill jag inte.

Charlie: Skall vi köra sten, sax, påse eller?

Läraren: Vi kommer att hjälpas åt med frågorna … nu kör de sten sax och påse, då tror jag att Robin är redo att börja.

Robin: Nej, jag vill inte, jag förstod inte frågan.

När Robin visar sig osäker vill hen bolla över frågan till någon av kamraterna, som här till Charlie, i excerpt 5. Att undvika att svara genom att be om betänketid eller att säga att en inte förstod frågan förekommer frekvent. Att inte kunna resonera kan vara relaterat till språklig osäkerhet, och för andraspråkselever är det än svårare om hen inte har ord och begrepp på svenska eller språkliga strategier klart för sig. En elev som är osäker på sina matematiska kunskaper och dessutom har svårt att uttrycka sig och att våga lägga fram sina idéer anser vi har lättare att ge upp och kanske inte ens försöka. I första utsagan ovan (excerpt 4) ser vi hur Robin uttrycker att hen tror på sin egen utsaga om vad som är rätt eller fel, men ändock hänvisar till en annan elev som ”smartare”. Vi ser att flera av de elever i undersökningen som vi vet har ett mindre utvecklat svenskt språk också är de som helst undviker att svara och diskutera. I en sådan situation kan samtalet inte beskrivas som vare sig kumulativt eller disputerande.

Samtalsformer i termer av disputerande, kumulativa och explorativa samtal

Den vanligast förekommande samtalsformen i de inspelade samtalen är den kumulativa, vilket betyder att eleverna bygger på varandras information utan att engagera sig in någon verklig diskussion. Läraren får därför agera som motor för att samtalet inte ska stanna av. Att läraren agerar som motor är väl synligt i även i excerpt 2. Utforskande samtal förekommer, men mer sällan, dock både i grupp B och C. Det utforskande samtalet kommer igång bland elever som använder språkliga strategier och vågar uttrycka sig trots brist på ord, som Alex i excerpt 1 när han säger kostnadssträcka. De här eleverna kan också använda sig av språkliga förmågor som att resonera och argumentera, som Tintin i excerpt 3.

De sociomatematiska normer som eleverna har anpassat sig till eller inte anpassat sig till, det vill säga att veta vad man förväntas göra under samtalet, som att ifrågasätta, att ställa frågor och att bidra till att samtalet förs framåt, spelar stor roll. I materialet visar det sig när läraren får ta en stor del i samtalet för att det skall föras framåt i framförallt grupp A och B. I grupp A och B stannar samtalen upp och bryts bland annat av att någon elev blir frustrerad eller arg och inte kan komma vidare. Eleverna har svårt att haka tag i diskussionen och hjälpa varandra och ställa frågor. Det visar sig vara svårt för eleverna att ta egna initiativ för att ta ordet, läraren behöver hela tiden dela ut ordet. Nedan följer ett excerpt ur datamaterialet:

Excerpt 6 (grupp B) figur 2

[Eleverna skall hjälpas åt att beräkna antal registrerade bilar vid olika årtal, hur skiljer det sig, är påståendet sant eller falskt. Utmaningen här är att förstå att man frågar efter antal bilar och inte efter procentuella andelar. Eleverna måste kunna koppla ihop det totala antalet bilar med den procentuella andelen.

Läraren inleder samtalet. En bit in i samtalet blir en av eleverna frustrerad och kan inte riktigt argumentera för sina tankar om vad som skulle kunna vara lösningen på problemet.]

Charlie:	För att det står bara 1980 … fler nyregistrerade bilar än 1985 och man ser på diagrammet inte där uppe … för det där är antal bilar [diskussion sedan tidigare gällande procent]. Det är liksom om du har 1980 då är det 103 eller hur … då är det plus det som tillverkar, jag menar registrerar. Då är det plus antal bilar sen blir det 263 … från 0 till 263 och skillnaden mellan de här är … jag ska se … mitt svar är sant i alla fall. Mitt svar är sant jag säger att det är sant.
Läraren:	Nu måste ni övertyga honom [till de övriga eleverna].
Robin:	Jag tror om man inte ska titta där uppe hur ska man då veta hur många bilar är det här? Man måste titta, alltså det finns antal bilar i tusental 193 000. Då man kan se att det här är mer än det eftersom de typ …
Charlie:	Exakt, jag har rätt man skall kolla düra … inte där uppe!
Billie:	Jo men …
Charlie:	Jo, man skall kolla där nere för där hur mycket procent det tillverk … eller nyregistrerades och där 80 … 1980 var det mer än 1985 … vi har svaret där, fan … nu blir jag arg. [Charlie är mycket uppjagad vilket hörs på rösten].
Läraren:	De andra blir arga på dig för att du inte lyssnar på dem ….
Charlie:	Frågan är om det är mer eller inte och det är mer …
Billie:	Du skall inte svara i procent … det går inte, alltså i frågan handlar inte om procent.
Charlie:	Men om man ser på procent man ser svaret.
Billie:	Men de är olika.
Charlie:	Mitt svar är att jag skiter i ditt svar … mitt svar är rätt …
Läraren:	Hoppsan! Ibland tycker jag att man skall vara lite lyhörd Charlie.
Charlie:	Det är fel på den där frågan …

I excerpt 6 visar Charlie att hen resonerar mycket, hela det första uttalandet är långt men bitvis svårt att hänga med i eftersom eleven också snubblar lite mellan orden och bitvis saknar sätt att formulera sitt resonemang på. Dock upptäcker vi att Charlie ännu inte har kommit fram till hur hen skall ta sig an uppgiften, vilket hens kamrater och läraren försöker hjälpa hen med via små tillägg i dialogen. Charlie verkar dock vara uppjagad och lyssnar inte på vad de andra säger, att det är antal bilar man skall titta på och inte procent. Charlie reagerar med frustration och ilska eftersom hen har en annan bild av hur uppgiften ska lösas, men kan inte förklara eller acceptera att hen har tagit fel väg. Här kan Charlie inte använda ett resonemang som leder framåt. De andra eleverna, Robin och Billie, försöker på olika vis att föra samtalet vidare och att hjälpa Charlie att se vad som behöver göras. Charlie blir till slut så arg och frustrerad att hen blir otrevlig, ”mitt svar är att jag skiter i ditt svar”. Kamraterna i gruppen tar inte illa vid sig (i ljudfilen hörs hur de skrattar lite, vilket kan ha att göra med att de känner eleven väl). Men, det kan för Charlies del vara ett bevis på att hen behöver träning i hur man samtalar och diskuterar och framför åsikter även om man inte håller med, att man kan förhandla om innehållet på ett adekvat sätt. Genom att slutligen säga att ”det är fel på den här frågan” blir samtalet till viss del avstannat, det blir svårt att få med Charlie i vidare samtal. Samtalet skulle kunna beskrivas som ett disputerande samtal eftersom eleverna inte håller med varandra.

Framgångsfaktorer och hinder

Vår tredje forskningsfråga belyser framgångsfaktorer och hinder. De framgångsfaktorer som framträdde är sådana som bidrog till att ett matematiskt samtal ägde rum, där eleverna samtalade och löser ett matematiskt problem tillsammans i provsituationen. Det visade sig framförallt när eleverna använde ord och begrepp för att ifrågasätta och andra språkliga strategier, som i excerpt 1 där ordet kostnadssträcka används eller att uttrycka en åsikt, och att förklara sin tankegång. Med andra ord visar sig en framgångsfaktor för att lösa de matematiska problemen vara att eleverna delvis använde språkliga strategier och var risktagare, men också visade att de anpassade sig till sådana sociomatematiska normer som hur ett matematiskt samtal kommer igång och fortsätter och där eleverna både ifrågasätter, stöttar och bygger vidare på andra elevers resonemang. Ett utforskande samtal var på så vis en betydelsefull faktor för att det matematiska samtalet skulle komma igång och leda till en lösning. Men, för att ett utforskande samtal skulle komma igång, krävdes språkliga strategier såväl som att eleverna rörde sig inom etablerade sociomatematiska normer. Här menar vi att etablerade sociomatematiska normer härrör från hur uppgifterna och rättningsanvisningarna är formulerade i NPM.

Hinder för matematiska samtal, visade sig när elever inte vågade ta risker och hellre tystnade, eller överlät frågan till en kamrat. De använde sig då av undvikandestrategier. Hinder kan således relateras till att eleverna saknar språkliga strategier på svenska. I dessa fall stoppar samtalet och eleverna har inte möjlighet att visa vilka matematiska kunskaper de har. Många elever kunde inte heller bidra till att föra diskussionen framåt på något sätt och vare sig kumulativa eller disputerande samtal uppstod. Dessa elever förde inte tydliga resonemang, troligen för att de inte nått den utveckling i svenska språket som krävs för att ord och begrepp ska kunna användas för att resonera. Eleverna har ännu inte möjlighet att visa upp de förmågor som efterfrågas. Att ändå försöka visade sig i sin tur kunna vara relativt tidsödande och ledde till att den utstakade tiden snabbt rann ut. Det verkar finnas en balansgång mellan att våga ta risker och att inte försöka alls.

Sammanfattande resultat

Sammanfattningsvis visar resultatet av vår undersökning att elever med kortare tid i Sverige, (grupp A och B) ofta saknar ord och begrepp för att uttrycka sig och sina tankar eller att använda sig av de språkliga förmågor som mäts i det muntliga provet i NPM. De har även svårt att följa de sociomatematiska normer (Yackel & Cobb, 1996) som ofta krävs för att få igång ett utforskande matematiskt samtal, exempelvis att våga ifrågasätta andras förslag till lösningar, att komma med påståenden om sina egna lösningar, samt att pröva sina och andras tankar med egna argument och resonemang. Vi erfar att bristen på adekvata ord och begrepp men även förståelse för hur ett samtal går till kan vara orsak till detta. I sådana situationer kan eleven bli arg och frustrerad och kommunicerar då på ett mindre framåtsyftande sätt, alternativt tystnar och visar tydligt att den inte vill deltaga alls.

De elever som har utvecklat språkliga strategier som att hitta på egna ord, använda transfer, överanvända ord, kontextualisera (så kallat deiktiskt tal) och att stötta sig mot visuella hjälpmedel, verkar komma längre i sina resonemang och är mer delaktiga i samtalet. Eleverna i excerpt 3 använde sig av det som Abrahamsson och Bergman (2005) tar upp, som är viktiga språkliga strategier och som visar på en andraspråksutveckling. Vad gäller tid för att förstå och ibland gå vägen över modersmålet beskriver Moschkovich (2007) att utmaningen att växla mellan modersmål och andraspråk kan vara stor och påverka responstiden. Det ser vi i det empiriska materialet. Eleverna som hade färre språkliga strategier att ta till behövde längre tid och mycket uppmuntran för att uttrycka sina tankar, de skulle också behöva resonera på sitt modersmål. Emellertid hade även elever med längre tid i Sverige, grupp C, svårt med adekvata ämnesord och begrepp samt saknade strategier för att få till diskussioner i sådana samtal som leder framåt till en gemensam lösning, så kallade utforskande samtal. Abrahamsson och Bergman (2005) hänvisar till Palmer (1996) och menar på att den kommunikativa förmågan innebär en rad kompetenser, fonologisk kunskap (uttal), lexikal kunskap, grammatisk kunskap samt diskurskompetens, det vill säga hur man samtalar. Vi erfor att flertalet av eleverna i grupp A och B saknade många av dessa kompetenser, åtminstone på svenska. Eleverna hade svårt att hitta ord, att uttala orden och använde inte heller ord och begrepp som hjälper till att formulera frågor, att ifrågasätta eller att uttrycka en åsikt, det vill säga språkliga förmågor (återigen, på svenska). Att inte kunna formulera frågor eller verbalt ifrågasätta en annan elevs utsaga ser vi hämmar diskussion, resonemang och ett gemensamt arbete att lösa ett matematiskt problem, vilket är målet och det som mäts i NPM. I grupp C fanns det elever som hade kommit längre i sin utveckling av det svenska språket och som visade på fler språkliga strategier. Vi ser att det leder till att det matematiska samtalet tar fart och det blir lättare att närma sig gemensamma lösningar. Dock skall sägas att det även i denna grupp fanns elever som ännu ej har utvecklat språkliga strategier för att aktivt kunna deltaga i samtalen.

Diskussion

Ett viktigt resultat, utifrån undersökningen, är att det är svårt att avgöra vilka matematiska kunskaper en elev visar, när eleven inte kan uttrycka sig som förväntat på det svenska språket och inte heller vågar ta risker. Även när eleven använder långa och omständliga förklaringar, vilket i sig är en andraspråksstrategi, kan det vara svårt att få syn på vilken matematisk kunskap och vilka förmågor eleven visar. Långa förklaringar, där eleven försöker att uttrycka sina strategier och tankar, tar tid. Under den muntliga delen av det NPM är tiden dyrbar. Eleverna i vår studie skulle ha behövt mer tid. Visserligen nämns det i Skolverkets instruktioner (Skolverket, 2024) till läraren att eleverna ska ges den tid de behöver, men det är svårt att bedöma innan bedömningstillfället hur mycket tid som behövs. Generellt behöver elever som har svenska som andraspråk få träna på både språkliga strategier, språkliga förmågor och normer i god tid, så att de är väl förberedda och kan använda tiden under NPM väl. Att känna ett språkligt självförtroende ser vi som mycket viktigt och någonting man kan träna upp, vilket också Axelsson och Jakobson nämner (2010). Det handlar om vägen från att inte våga alls till att ta risker. Eleverna i vår undersökning bad ibland om mer tid att tänka, någonting som även Truxaw och Rojas (2013) visat behövs för andraspråkselever. Här menar vi också att de lärare som bedömer elevens kunnande måste vara lyhörda. De kan även använda resultat på NPM för att följa upp eleverna. Nyanlända elever har rätt till språkstöd, men inte översättning av alla uppgifter till sitt modersmål (Skolverket, 2024).

Att låta andraspråkselever explicit träna på språkliga strategier som man som elev kan använda sig av för att resonera och argumentera på svenska, anser vi i likhet med Hajer och Meestringa (2010), kan stötta denna grupp elever att våga ta risker och bli mer aktiva muntligt. Det är betydelsefullt att eleverna inte fastnar i undvikandestrategier på grund av osäkerhet. När eleverna undviker att ta risker och lämnar över frågor till andra elever förlorar de möjligheten att visa sina matematiska förmågor. Om eleverna explicit får träning i vilka ord, begrepp och formuleringar som kan användas för att uttrycka en åsikt, att formulera en fråga eller att ifrågasätta vad någon annan säger, menar vi att eleverna skulle ha större möjlighet att bidra till att ett matematiskt samtal kan äga rum. Eleverna skulle kunna nå målen för det NPM om de har strategier för hur man bygger upp ett matematiskt samtal och diskuterar, ifrågasätter, kommer med egna påståenden, prövar resonemang och tillsammans försöker nå lösningar på olika problem (Mercer, 2004). Eleverna behöver också uppmärksammas på vilka sociomatematiska normer som råder i situationen. Sociomatematiska normer (Yackel & Cobb, 1996) kan ju se mycket olika ut i olika kulturer och i olika språk, vilket gör det ännu viktigare att säkerställa att eleverna erbjuds att bli medvetna om vad som gäller i denna (för dem) nya skolkontext, generellt i Sverige, men också i den specifika NPM-situationen.

Vidare, utan frågor och ifrågasättanden ser vi att det matematiska samtalet inte blir av, det avstannar och utmynnar ofta i det som kallas kumulativa samtal (Mercer & Sams, 2006), det vill säga, en rad olika yttranden byggs på varandra men inte leder någonstans. Det blir ingen konsensus, alla är inte med i diskussionen och oftast leder det inte till någon lösning av uppgiften. Dessa må vara problem som alla elever kan ha eller hamna i under en stressad provsituation. Den kumulativa samtalsformen är troligen inte utmärkande för just andraspråkselever och skulle ha kunnat utspelas mellan elever som pratar på sitt modersmål. Att inte ha ord och begrepp för hur man ifrågasätter, ställer en fråga eller startar ett resonemang, är dock en större utmaning för andraspråkselever som vill visa sina matematiska kunskaper i bedömningssituationer. Här ser vi att ett samarbete mellan matematiklärare och svenska som andraspråkslärare och modersmålslärare är gynnsamt, vilket Axelsson tidigare har visat (2010; se även Norén, 2010).

Utifrån undersökningens resultat ser vi också att det är viktigt med gruppsammansättningen när man planerar för den muntliga delen i det NPM, utifrån vilka kriterier man sätter ihop gruppen. Att en grupp elever varit lika länge i Sverige betyder inte att de har samma förutsättningar under provet. En elev i en grupp som varit länge i Sverige kan ha stora svårigheter med svenskan, brister i svenskt ordförråd och språkliga strategier, vilket gör att den eleven får det svårt om övriga i gruppen är mer språkligt avancerade. Det handlar inte om "korrekt" svenska, utan om att ha andraspråksstrategier och att vara risktagande nog för att överbrygga de språkliga hindren (Hajer & Meestringa, 2010). På samma sätt kan en elev med kort tid i Sverige, ha en uppsättning språkliga strategier, vilka hjälper hen att komma långt i sitt resonerande, även om ord och begrepp inte alltid är korrekta. Hen gör sig förstådd ändå. Att ha utvecklat språkliga strategier ser vi med andra ord som en nyckelfaktor för att deltaga i det matematiska samtalet på svenska. I ljuset av detta ser vi också att det är viktigt att planera för upplägg och organisation av det muntliga NPM med hjälp av kunskap kring elevernas språkliga och kulturella bakgrund. Detta tänker vi kan göras genom att samarbeta med elevernas svenska som andraspråkslärare och modersmålslärare för att göra så optimala gruppindelningar som möjligt. I en grupp är det bra om elever känner sig trygga och vågar prata. Kartläggningar av elevernas matematikkunskaper sedan tidigare kan vara en god hjälp för att förstå vilka grundkunskaper eleverna har. Där kan också modersmålslärare vara behjälpliga.

Slutligen, anser vi utifrån studiens resultat att elever med svenska som andraspråk behöver utsträckt tid i den muntliga delen av NPM. Just att tid behövs för att eleverna ska kunna resonera är något som vi tydligt ser, detsamma visar Moschkovich (2007). Ett samarbete mellan svenska som andraspråkslärare och matematiklärare är gynnsamt i bedömningen av själva NPM. Det optimala verkar vara att en svenska som andraspråkslärare kan vara med under provet som stöd för bedömning, alternativt att det muntliga provet spelas in så att matematiklärare och svenska som andraspråkslärare kan lyssna och i lugn och ro bedöma vad som faktiskt sägs under samtalen. I vår undersökning såg vi att samarbetet mellan matematikläraren och svenska som andraspråksläraren hjälpte oss att inse när en elev faktiskt missförstod en fråga på grund av ett ord som hen inte förstod innebörden av och därmed svarade fel. Men, vi kunde också se när en elev hade löst en uppgift rätt, även om det krävde en viss förståelse för hur eleven använde sitt språk för att förklara sitt resonemang och sina lösningar. Att bedöma andraspråkselevers muntliga prestation i en bedömningssituation för lärare i matematik är mycket utmanande. Det finns också en risk att elevernas prestation i matematik blir felbedömd. En slutsats och rekommendation utifrån våra resultat är med andra ord att det behöver finnas tid för samarbete mellan svenska som andraspråkslärare och matematiklärare för att säkerställa att elever med svenska som andraspråk får en så gynnsam prov- och bedömningssituation som möjligt. En förhoppning är att detta i sin tur skulle kunna leda till att fler elever med annat modersmål än svenska når högre resultat på de nationella proven i matematik samt betyg i matematik.

Referenslista

Axelsson, M. & Jakobson, B. (2010). Yngre andraspråkselevers meningsskapande i naturvetenskap genom tre analysverktyg. *Nordand*, *5*(2), 9–33.

Axelsson, M., Olofsson, M., Philipsson, A., Rosander, C. & Sellgren M. (2006). *Ämne och språk – språkliga dimensioner i ämnesundervisningen*. Kompetensfonden.

Abrahamsson, T. & Bergman, P. (2005). *När tankarna springer före att bedöma andraspråk i utveckling*. HLS förlag.

Barwell, R. (Red.). (2009). *Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives* (Vol. 73). Multilingual Matters.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Economou, C. (2018). ”På samma villkor?”-Litteraturundervisningens varför och vad i gymnasieämnet svenska som andraspråk. *Utbildning & Demokrati–tidskrift för didaktik och utbildningspolitk*, *27*(3), 53–75.

Genzuk, M. (2003). A synthesis of ethnographic research. *Occasional Papers Series. Center for Multilingual, Multicultural Research* (Red.), Center for Multilingual, Multicultural Research, Rossier School of Education (s. 1–10). University of Southern California.

Hajer, M. & Meestringa, T. (2014). *Språkinriktad undervisning: en handbok*. Hallgren & Fallgren.

Hunter, J. (2014). Developing learning environments which support early algebraic reasoning: a case from New Zealand primary classroom. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 659–682. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0093-4

Kazemi, E. & Stipek, D. (2009). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *Journal of Education*, *189*(1–2), 123–137. https://doi.org/10.1177/0022057409189001-209

Kjellström, K. & Persson, C. (2008). *Mer än matematik-om språkliga dimensioner i matematikuppgifter*. Myndigheten för skolutveckling.

Mercer, N. (2004). Sociocultural discourse analysis. *Journal of Applied Linguistics*, *1*(2), 137–168. https://doi.org/10.1558/japl.2004.1.2.137

Mercer, N. & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach*. Routledge.

Mercer, N. & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education*, *20*(6), 507–528. https://doi.org/10.2167/le678.0

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(2–3), 189–212. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023_5

Moschkovich, J. (2007). Using two languages when learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(2), 121–144. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9005-1

Moschkovich, J. (2013). Principles and guidelines for equitable mathematics teaching practices and materials for English language learners. *Journal of Urban Mathematics Education*, *6*(1), 45–57. https://doi.org/10.21423/jume-v6i1a204

Norén, E. (2010). *Flerspråkiga matematikklassrum: Diskurser i grundskolans matematikundervisning*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. DIVA. https://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:357471/FULLTEXT01

Norén, E. (2011). Students' mathematical identity formations in a Swedish multilingual mathematics classroom. *Nordic Studies in Matematics Education, NOMAD*, *16*(1–2), 95–113.

Norén, E. & Caligari, L. (2020). Practices in multilingual mathematics classrooms: Word problems. In MADIF 12, *The twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education*, Vol. 15 (s. 61–70). Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Parszyk, I. M. (1999). *En skola för andra: minoritetselevers upplevelser av arbets-och livsvillkor i grundskolan*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. DIVA. https://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:452149/FULLTEXT01.pdf

PRIM-gruppen. (2010). *Ämnesprov i matematik åk 9, delprov A*. Skolverket.

PRIM-gruppen. (2014). *Ämnesprov i matematik åk 9, delprov A*. Skolverket.

Rubinstein-Ávila, E., Sox, A. A., Kaplan, S. & McGraw, R. (2015). Does biliteracy+ mathematical discourse= binumerate development? Language use in a middle school dual-language mathematics classroom. *Urban Education*, *50*(8), 899–937. https://doi.org/10.1177/0042085914536999

de Ron, A. (4 maj 2024). *Matematikspråket, modul: Språk i matematik, del 2, åk 7–9*. https://larportalen.skolverket.se/api/resource/P03WCPLAR058625

Skolverket, statistik. (u.å). https://www.skolverket.se/skolutveckling/statistik

Skolverket. (u.å a). *Ämnesprov i matematik årskurs 9 2016/2017 Lärarinformation 1*. https://www.su.se/polopoly_fs/1.662636.1688110271!/menu/standard/file/Äp%209%202017%20Ma%20Lärarinformation%201.pdf

Skolverket. (u.å b). *Ämnesprov i matematik årskurs 9 2016/2017 Bedömningsanvisningar 1*. https://www.su.se/polopoly_fs/1.662634.1688109795!/menu/standard/file/Äp%209%202017%20Ma%20Bedömningsanvisningar%201.pdf

Skolverket. (19 juni 2023). *Nationella provets konstruktion*. https://www.skolverket.se/undervisning/vuxenutbildningen/komvux-gymnasial/nationella-prov-i-komvux-gymnasial/nationella-provens-konstruktion

Skolverket. (26 mars 2024). *Genomföra och bedöma nationella prov i grundskolan*. https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/nationella-prov-i-grundskolan/genomfora-och-bedoma-prov-i-grundskolan#h-Muntligadelprov

Truxaw, M. P. & Rojas, E. D. (2014). Challenges and affordances of learning mathematics in a second language. *Journal of Urban Mathematics Education*, *7*(2), 21–30. https://doi.org/10.21423/jume-v7i2a233

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477. https://doi.org/10.2307/749877

Vygotskij, L. S. (1999). *Tänkande och språk* (K. Lindsten, Övers.). Daidalos. (Originalverk publicerat 1934)

Författarpresentationer

Eva Norén

Eva Norén är är docent i matematikämnets didaktik på Stockholms universitet. Hennes huvudsakliga forskningsintresse rör matematikundervisning i flerspråkiga klassrum, men också programmering och sociopolitiska aspekter i matematikundervisningen. Eva har samarbetat med verksamma lärare i flera år och denna artikel är rett resultat att detta.

Charlotte Ahlström Castillo

Charlotte Ahlström Castillo är förstelärare, lärare i Svenska som andraspråk, SO och spanska på Bagarmossens skola. Hon har arbetat med undervisning av nyanlända i många år och har bland annat engagerat sig i och föreläst om hur undervisning av andraspråkselever kan läggas upp för att stötta en språkutveckling i olika ämnen. Detta intresse har även lett till deltagande i FOU projekt av vilka det senaste fokuserar på andraspråkselevers förutsättningar i matematikundervisningen.

Anne-Lie Hellström

Anne-Lie Hellström är förstelärare och undervisar i matematik på Midsommarkransens grundskola. Hon jobbade tidigare i Bagarmossen, där hon kom att jobba med barn från olika kulturer. Anne-Lie har under åren som lärare funnit ett varmt intresse för hur skolan kan se olika barns språkliga förmågor och vilka utmaningar de stöter på i matematik. Detta renderade i ett FOU projekt som fokuserade på andraspråkselevers förutsättningar i matematikundervisningen.