

forskning

om undervisning & lärande

Vad kan man när man kan tillverka ett uttryck
i slöjdföremål?

A Broman, J Frohagen & J Wemmenhag

Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt
sammanhang för elever i årskurs 1

M Adolfsson Boman, I Eriksson, T Tambour, A Jansson & M Hverven

Hur kan den tysta lärarkunskapen utnyttjas för
bättre undervisning om styckeindelning i engelska?

M Tväråna

Att se det som inte syns – om talföljder i årskurs 3 och 4

L Erixson, K Frostfeldt Gustavsson, K Kerekes & B Lundberg

Variation av undervisningsinnehåll
för att möjliggöra urskiljning av kritiska aspekter
av begreppet densitet

J Magnusson & T Maunula

forskning

om undervisning & lärande

Redaktion

Professor Ingrid Carlgren, professor Lisbeth Lundahl, professor Ingrid Pramling Samuelsson, professor Ulla Runesson samt redaktör Solweig Eklund

Redaktionskommitté

Till Forskning om undervisning och lärande har knutits en redaktionskommitté med framstående forskare inom skolans och förskolans olika ämnesområden:

Ann Ahlberg, professor, Göteborgs universitet

Anette Emilson, lektor, Linnéuniversitetet

Per-Olof Erixon, professor, Umeå universitet

Marléne Johansson, professor, Göteborgs universitet samt Åbo

Roger Johansson, professor, Lunds universitet

Thomas Koppfeldt, professor, Konstfack

Håkan Larsson, professor, GIH

Caroline Liberg, professor, Uppsala universitet

Inger Lindberg, professor, Stockholms universitet

Viveca Lindberg, docent, Stockholms universitet

Bengt Olsson, professor, Göteborgs universitet

Constanta Olteanu, docent, Linnéuniversitetet

Astrid Pettersson, professor, Stockholms universitet

Andreas Redfors, professor, Högskolan Kristianstad

Geir Skeie, professor, Stockholms universitet

Sonja Sheridan, professor, Göteborgs universitet

Ingegerd Tallberg-Broman, professor, Malmö högskola

Eva Österlind, docent, Stockholms universitet

Skriften ges ut av Lärarstiftelsen (Stiftelsen SAF)

i samarbete med Lärarförbundet

Kontakt med artikelförfattarna sker genom info@stiftelsensaf.se

Bidrag till kommande nummer är mycket välkomna!

www.forskul.se och solweig eklund@stiftelsensaf.se

Nästa nummer beräknas utkomma i november 2013

Forskning om undervisning och lärande nr 10 maj 2013

Grafisk form: Britta Moberger

ISBN 978-91-981124-0-5

Inledning

DETTA ÄR PREMIÄRNUMRET av *Forskning om undervisning och lärande* i sin nya utformning. Nu finns skriften endast i elektronisk form som pdf-filer, vilka givetvis kan skrivas ut av den som så vill. Skillnaden mot tidigare är också att artiklarna har granskats inom ramen för ett peer review-förfarande. Nytt är också att numren inte har särskilda teman.

Skriftens främsta syfte för framtida utgivning är att lyfta fram forskning som byggs upp med och för lärare snarare än om och på lärare. Som namnet på tidskriften anger, handlar det främst om forskning med anknytning till lärande och undervisning inom skolans och förskolans samtliga ämnesområden och åldersgrupper.

Under det senaste decenniet har olika modeller där lärare och forskare samverkar utvecklats i syfte att få till stånd en forskning som knyter an till de frågor och problem som lärare brottas med. *Forskning om undervisning och lärande* har en ambition att bli en tidskrift för publicering av olika praktiktäna forskningsansatser. Med skolans skrivning om att verksamheten i skolan ska vila på vetenskaplig grund blir det än viktigare att forskning av, med och för lärare kan publiceras och spridas. Vår förhoppning är att *Forskning om undervisning och lärande* ska kunna publicera forskning som kan ge lärare bättre teoretiska och praktiska redskap i sitt arbete och som beskriver kunskaper som utvecklas i samverkan med och mellan lärare.

ARTIKLARNAS I DETTA NUMMER behandlar vad som är avgörande för elevernas möjligheter att lära sig i en undervisningssituation. Samtliga projekt försöker komma åt vad som kan vara kritiskt för elevers lärande för att kunna förbättra undervisningen så att eleverna verkligen lär sig det som är tänkt att de ska lära sig. Det är elevernas lärande, och inte lektionen, som är i fokus i dessa artiklar. Samtliga artiklar bygger på learning study som bland annat kännetecknas av att elevernas lärande är i fokus. Här lämnas viktiga ämnesdidaktiska bidrag.

I inledningsartikeln *Vad kan man när man kan tillverka ett uttryck i slöjdföremål?* diskuterar författarna Andreas Broman, Jenny Frohagen och Janice Wemmenhag hur elever lär sig att skapa och tolka uttryck i slöjdföremål, mer precist hur detta kan betraktas som ett kunnande i slöjd. I ämnet slöjd förväntas elever formge och fram-

ställa föremål i materialen metall, textil och trä. Mer sällan handlar uppgifterna om att lära eleverna skapa estetiska och kulturella uttryck, som att tillverka en väska med mangauttryck, menar författarna, och mot den bakgrunden har de undersökt hur symboler och symboliska uttryck i slöjdföremål kan förstås som ett ämnesinnehåll och beskrivas som ett specifikt kunnande eleverna ska utveckla i slöjd. En målsättning med studien har varit att generera kunskap om lärande av ett specifikt ämnesinnehåll i slöjd och därigenom utgöra ett bidrag till det slöjddidaktiska fältet.

Marianne Adolfsson Boman, Inger Eriksson, Mona Hverven, Anders Jansson och Torbjörn Tambour presenterar en artikel om *Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1*. Den bygger på data från ett undervisningsexperiment i syfte att introducera algebra i nybörjarundervisningen, för 6–7-åringar. Man ville pröva utformningen av en nybörjarundervisning som skulle ge eleverna möjlighet att utforska innebörden i symboler och matematiska principer innan de börjar arbeta med siffror. Syftet med den här artikeln är dels att beskriva de uppgifter som utformades och prövades och dels att ge några exempel på indikationer på en framväxande förmåga att föra algebraiska resonemang.

Avsikten med studien *Hur kan den tysta lärarkunskapen utnyttjas för bättre undervisning om styckeindelning i engelska?* som Malin Tväråna presenterar var att undersöka vad eleverna hade för uppfattning om vad styckeindelning av en skriven text var bra för, vad de behövde lära sig för att bli bra på det och hur en undervisning som möjliggjorde detta lärande kunde se ut. En förutsättning för att utveckla förmågan föreföll vara att förstå styckeindelning i sig, såväl som relationen mellan styckenas inre struktur, placering och textens hela ämnesinnehåll, som underlättande för lärsarens förståelse av budskapet. Att de olika övningarna under lektionen utgick ifrån ett tydligt problem som var gemensamt och kunde diskuteras/lösas av elever tillsammans med läraren underlättade för eleverna. Även synliggörandet av ett meningsfullt syfte med lektionen verkade främja elevernas lärande.

Lea Erixon, Karin Frostfeldt Gustavsson, Klara Kerekes och Birgitta Lundberg presenterar en artikel *Att se det som inte syns – om talföljder i årskurs 3 och 4*. Studiens syfte är att studera det som är kritiskt för elever i årskurs 3 och 4 när de ska lära sig att konstruera och beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. I artikeln beskrivs de identifierade kritiska aspekterna och hur dessa gjordes synliga i undervisningen genom variation. Resultatet visar, att eleverna utvecklade förmågan att beskriva talföljder när det i undervisningen gavs möjlighet för dem att urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra, urskilja helheten, förstå att det finns ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet och upptäcka att talföljder kan byggas upp på olika sätt. Detta benämns i studien som kritiska aspekter.

Joakim Magnusson och Tuula Maunula bidrar med artikeln *Variation av ett undervisningsinnehåll för att möjliggöra urskiljning av kritiska aspekter av begreppet densitet*. Artikeln fokuserar på undervisning om begreppet densitet och svårigheterna att få elever att lära sig det vi önskar. En studie genomfördes i skolår 7 och 8 och målet var att få elever att kunna urskilja densitet hos olika gaser, vätskor och fasta föremål. Teoriramverket är variationsteoretiskt och i artikeln beskrivs hur denna teori om lä-

Inledning

rande kom att användas i praktiken av lärare, både före, efter och i undervisning. Resultatet av studien blev att lärarna mer distinkt kunde urskilja kritiska aspekter för densitetsbegreppet och att förståelsen av lärandeobjektet fördjupades genom att man provade ut olika kritiska aspekter i undervisning. Dessa aspekter kan enligt författarna ses som ett ämnesdidaktiskt bidrag till NO-undervisning.

DESSA PROJEKT VISAR hur lärares forsknings- och utvecklingsarbete leder till kunskap som är central för yrkesutövningen, nämligen om villkoren för elevers lärande. Projekten är genomförda på skolor vilket också är en viktig aspekt, eftersom det behövs mycket mer forskning som bedrivs på skolor och förskolor. Problemformulering, analys och bearbetning av resultat måste vara viktiga inslag i en lärares arbete.

Solweig Eklund

Vad kan man när man kan tillverka ett uttryck i slöjdföremål?

A Broman, J Frohagen & J Wemmenhag

I ämnet slöjd förväntas elever formge och framställa föremål i materialen metall, textil och trä. Uppgifterna som eleverna får av läraren knyts vanligtvis till någon slöjdteknik som stickning eller hyvling (Skolverket, 2005). Mer sällan handlar uppgifterna om att lära eleverna skapa estetiska och kulturella uttryck, som att tillverka en väska med mangauttryck eller en nyckelring som ser samisk ut. Om föremålets uttryck lämnas åt eleven att skapa 'fritt' riskerar kunnandet att stanna vid ett oreflekterat tyckande om vad som är fint och fult i stället för att förhålla sig till olika stilar eller uttryck. Ett långsiktigt mål i nuvarande kursplan för slöjd i grundskolan (Lgr11) är att utveckla elevers förmåga att tolka olika uttryck i slöjdföremål. Hur detta hanteras i undervisningen får konsekvenser för vad som görs möjligt för elever att lära i slöjd. Under 2010–2011 genomförde vi en learning study i slöjd för att undersöka hur symboler och symboliska uttryck kan förstås som ett ämnesinnehåll i slöjdamnet och beskrivas som ett slöjdspecifikt kunnande.

I DENNA ARTIKEL DISKUTERAR VI hur elever lär sig att skapa och tolka uttryck i slöjdföremål och mer precist hur detta kan betraktas som ett kunnande i slöjd. Studien genomfördes under läroplansbytet från Lp094 (Skolverket, 2009) till Lgr11 (Skolverket, 2011a). *Slöjdens estetiska och kulturella uttrycksformer* preciserades i och med Lgr11 som ett av fyra kunskapsområden i det centrala innehållet för ämnet slöjd. I diskussioner med slöjdlärarkollegor i olika nätverk runt om i landet visar det sig råda en osäkerhet kring hur detta innehåll bör hanteras i undervisningen, både i form av



Andreas Broman är trä- och metallslöjdlärare och pedagogisk ledare på Gustav Vasaskolan i Stockholm.

Janice Wemmenhag är textillärare på Gustav Vasaskolan i Stockholm (i mitten).

Jenny Frohagen är slöjdlärare på Mariaskolan i Stockholm och licentiand i forskarskolan för ämnesdidaktik vid Stockholms universitet.

Broman, Frohagen, Wemmenhag

konkreta uppgifter och vilket kunnande som ska bedömas.

Enligt vår erfarenhet uppfattas slöjd i grundskolan sällan som ett lärande av ett specifikt estetiskt innehåll, som att kunna förhålla sig till olika estetiska och kulturella uttrycksformer. Tyngdpunkten ligger mer på ett praktiskt-tekniskt "görande" eller "fritt skapande" av föremål. Bearbetningsmetoden och bearbetningsgraden av ett material påverkar slöjdföremåls uttryck och kvalitet. Att kunna sticka en mössa eller tälja en smörkniv handlar inte enbart om att sätta sig ner och "göra". Det handlar inte heller enbart om att lära sig en hantverksteknik steg-för-steg eller att enbart forma ett material "fritt" med olika verktyg. Framställandet av ett slöjdföremål är komplext. En vanlig uppfattning är att det handlar om tekniska och funktionella aspekter som att kunna bemästra en traditionell hantverksteknik (Skolverket, 2005). På senare tid har estetiska, kulturella och kommunikativa aspekter av slöjdekunskaper blivit mer framträdande:

It has become more evident that artefacts play a central role in our lives and our culture, they tell stories about the conditions under which we live and work, as well as how they communicate values and interests we want to be related to. This extended role of the artefacts, beyond the functional, is a part of the societal changes and as such included into the general education for citizenship. (Nielsen, 2008, s. 127).

Vår erfarenhet som slöjdlärare är att elever ofta kommenterar en slarvigt målad träyta eller en ofällad kant på en tygväska med att säga "det ska vara så" eller "jag tycker det är snyggt så". Många elever har svårt att motivera sina estetiska val (Homlong, 2011). *Slöjdens estetiska och kulturella uttrycksformer* är ett kunskapsområde i Lgr11 (Skolverket, 2011a) som återkommer i alla årskurser, från årskurs ett till nio. Det är inte ett nytt innehåll i ämnet även om det inte skrivits fram med samma tydlighet och omfattning i tidigare läroplaner. I Lgr69 talades det om att eleverna genom fritt gestaltande arbete skulle utveckla sina estetisk-praktiska anlag och uttrycksmöjligheter (Skolöverstyrelsen, 1969, s. 156). I Lgr80 skrevs slöjdens roll att utveckla en känsla för estetiska värden fram, samt att förmedla ett kulturarv som skulle inspirera eleverna "till att återge och nyskapa gamla ting" (Skolöverstyrelsen, 1980, s. 129). Kulturperspektivet i Lgr80 var knutet till att studera vilken betydelse olika typer av föremål har när det gäller människors olika livsvillkor och kulturer, samt hantverkets utveckling och dess betydelse för människan och miljön. I Lp094 talades det om att slöjdamnet skulle utveckla elevens kommunikativa förmåga. Detta konkretiserades i strävansmålen från kursplanerevisionen år 2000 genom att eleverna förväntades "utveckla förmågan att tillägna sig och använda nya kunskaper samt att överföra och befästa kunskaper från andra områden och kulturer i sitt skapande arbete" och att "utveckla förmågan att göra och motivera personliga ställningstaganden kring estetiska, etiska och funktionella värden" (Skolverket, 2000, s. 93).

Borg (1995) har studerat kursplanetexterna från Lgr62 till Lp094 och funnit att ett återkommande innehåll är "att slöjden ska utveckla elevernas skapande förmåga, ge kunskap i olika manuella metoder och uttrycksmöjligheter samt utveckla deras känsla för form, färg och kvalitet" (s. 150). Slöjdundervisningen har på många håll kommit

att utgöras mer och mer av undersökande och experimentella arbetsätt, inte minst på grund av införandet av slöjdprocessbegreppet (Hasselskog, 2008). Framför allt har elever fått större möjlighet att själva avgöra när ett föremål är färdigt och därmed påverka vad som kan betraktas som genomarbetade former, ytor och strukturer. Det finns emellertid en farhåga att elevers personliga ställningstaganden i slöjdarbetet har fått för stort utrymme i och med den höga graden av individualisering som förekommit (Skolverket, 2005). Det är vår erfarenhet att det är vanligt förekommande att elevers motiveringar av typen ”jag tycker det är fint så här” godtas som tillräckligt kunnande när det gäller estetiska uttryck och andra kvalitetsaspekter i slöjd. Detta skapar svårigheter för elevers lärande när det gäller förmågan att kunna förhålla sig till olika former av etablerade uttryck och koder som tillhör olika slöjdtraditioner och kulturer. Det estetiska kunnandet riskerar att trivialiseras om elevens val och motiveringar av sitt slöjdföremåls uttryck inte utmanas i undervisningen.

I Lp094 infördes och betonades starkt begreppet *slöjdprocessen* vilket satte elevernas individuella ställningstaganden när det gäller olika val i centrum för bedömningen. Tidigare hade fokus i högre grad legat på att bedöma resultatet och finishen på den färdiga produkten (Borg, 2007). Detta förändrade förhållningssätt i undervisningen kan ha fått negativa konsekvenser för elevers möjligheter att utveckla estetisk kunnighet i slöjd. Om det fria skapandet får för mycket utrymme riskerar förmågan att förhålla sig till hantverksnormer, slöjdtraditioner, olika stilar och uttryck att skjutas åt sidan.

Det saknas forskning som undersökt hur elever i grundskolan lär sig att skapa slöjdföremål och hur lärare undervisar om, kommunicerar och bedömer estetiska aspekter i slöjd (Mäkelä, 2011; Hasselskog, 2010; Borg, 2007). I ett examensarbete från Göteborgs Universitet (Fransson, 2010) har en grupp slöjdlärares resonemang kring estetiska och kulturella uttrycksformer lyfts fram genom fokusgruppssamtal. Det som framkommer är att lärarna visar stor osäkerhet kring innebörden av estetiska och kulturella uttrycksformer, något vi känner igen från diskussioner med slöjdlärarkollegor runt om i landet. Borg (2007) argumenterar för att det professionella språket i slöjdsalen behöver utvecklas för att förbättra elevers lärande, lärarnas undervisning och bedömning av slöjdekunskaper. Estetiska aspekter i denna artikel har sin utgångspunkt i så kallade formalestetiska uttrycksmedel som färg, form, komposition, material och struktur/textur (Mäkelä, 2011, s. 193) samt begreppet *formbild* som ”a set of principles for judgement of form quality” (Gulliksen, 2006, s. 21). Att konstruera en formbild innebär att söka principer för att kunna bedöma formkvaliteter och en formbild kan beskrivas som en förhandlad konstruktion inom givna ramar som styr och begränsar tolkningsmöjligheterna (Mäkelä, s. 42). Gulliksen (2006) har studerat en textilslöjdsgrupp och en träslöjdsgrupp på två olika lärarutbildningar i Norge och funnit att läraren kan ha utgångspunkten att det finns en given formbild som ska kommuniceras eller tvärtom, att det inte finns ett givet svar att förhålla sig till: ”it appears as though each individual teacher and student may interpret this in the way he or she wants” (s. 226). Hur slöjdlärare förhåller sig till bedömning av formkvaliteter i en svensk grundskolekontext är inte undersökt i någon större utsträckning.

Broman, Frohagen, Wemmenhag

Enligt Lgr11 ska eleven i slöjdundervisningen utveckla sin förmåga att välja och motivera tillvägagångssätt i slöjdarbetet utifrån *syftet* med arbetet och utifrån kvalitets- och miljöaspekter (Skolverket, 2011a, s. 213). Frågan är hur 'syftet' med ett slöjdarbete kan förstås. Detta syfte ska relateras till det centrala innehållet för aktuell årskurs, men hur detta görs rent praktiskt är oklart. Det fjärde långsiktiga målet i Lgr11 handlar explicit om att kunna tolka estetiska och kulturella uttryck i slöjdföremål. Hur kan vi förstå innebörden av begreppet tolka i ett slöjddidaktiskt perspektiv? Hur kan vi förstå det i relation till det årskursvisa centrala innehållet? Inom kunskapsområdet *slöjdens estetiska och kulturella uttrycksformer* för årskurs 4–6 ska eleverna i undervisningen lära sig om:

- hantverk och slöjdtraditioner från olika kulturer som inspirationskällor och förebilder för egna idéer och skapande,
- hur olika kombinationer av färg, form och material påverkar slöjdföremåls estetiska uttryck,
- hur symboler och färger används inom barn och ungdomskulturer och vad de signalerar. (Skolverket, 2011a)

Det är mot bakgrund av detta som vi i föreliggande studie valt att undersöka hur symboler och mer precist symboliska uttryck i slöjdföremål kan förstås som ett ämnesinnehåll i undervisningen och beskrivas som ett specifikt kunnande eleverna ska utveckla i slöjd.

Learning Study om symboler och symboliska uttryck i slöjdföremål

Studien som ligger till grund för denna artikel tillkom genom en satsning på praktikenära ämnesdidaktisk forskning i ett samarbete mellan Stockholms Stad och Stockholms Universitet. Forskningsfrågan i studien lyder: *Hur kan förmågan att tolka slöjdföremåls symboliska uttryck förstås som ett ämnesspecifikt kunnande i slöjd?* Målsättningen har varit att generera kunskap om lärande av ett specifikt ämnesinnehåll i slöjd och därigenom utgöra ett bidrag till det slöjddidaktiska fältet. Vi har använt oss av begreppet 'tillverka' i stället för kursplanens begrepp 'framställa' som ett sätt att beskriva slöjdekunskande där estetiskt kunnande är tätt sammanlänkat med hantverkskunskande (Dormer, 1994).

Learning Study är en praxisnära forskningsansats och metod (Carlgren, 2012; Lo & Marton, 2007) som används för att studera ett ämnesspecifikt kunnande inom ramen för undervisning i grundskolan och andra skolformer. Metoden har utvecklats från den japanska Lesson Study-traditionen (Lewis, 2002) och forskningsmetoden Design Experiment (Brown, 1992). Learning Study är också förankrad i variationsteorin (Lo & Marton, 2012; Lo, 2012) och flera centrala begrepp som används i forskningsdesignen kommer från denna teoretiska grund. Variationsteorin kan även utgöra en grund för hur undervisningen struktureras, eller någon annan lärandeteori (Marton, 2005). Forskningsdesignen är kollaborativ (en grupp lärare studerar, planerar, genomför och analyserar materialet), intervenerande och iterativ (detta görs i ett antal efterföljande lektionscykler).

Deltagande lärare och forskare i en learning study studerar ett specifikt objekt för lärande i ämnet (Runesson, 2008; Marton & Pang, 2006). Runesson (Ibid.) förklarar lärandeobjektet med att säga "there is no learning without something learned. When teachers and learners interact in the learning situation, they interact about something". (s. 155). För att kunna arbeta systematiskt i en learning study med att utveckla undervisningsformer förutsätts att själva innebörden av lärandeobjektet (det som ska läras) är klargjord. Detta blir särskilt intressant i slöjdämnet där många elever uppfattar att de snarare deltar i en aktivitet, att de gör/tillverkar något, men inte att de lär sig något specifikt innehåll. Centralt i en learning study är att valet av lärandeobjekt tar sin utgångspunkt i upplevda problem i undervisningen. Det kan vara något som eleverna har svårigheter att förstå och hantera eller som lärarna upplever är svårt att hantera i undervisningen. Lärandeobjektet är ett exempel på en preciserad ämnesspecifik förmåga som eleverna förväntas utveckla under en viss lektion eller under en begränsad serie av lektioner.

I en learning study identifierar lärargruppen aspekter som är nödvändiga att urskilja om man ska kunna tillägna sig lärandeobjektet. De kallas därför kritiska. Dessa kritiska aspekter ligger sedan till grund för designen av den eller de forskningslektioner som planeras och genomförs inom ramen för en cykel. Att synliggöra de kritiska aspekterna av lärandeobjektet är nödvändigt för att åstadkomma lärande (Marton, 2005). Vanligtvis genomförs tre cykler av forskningslektioner. Varje cykel inleds med ett test (förttest) i den aktuella elevgruppen där aktuella kritiska aspekter identifieras. Lärargruppen får då ett underlag som visar vad eleverna kan men också vad som är svårt för eleverna. Därefter planeras och genomförs en eller flera forskningslektioner – som tar sin utgångspunkt i elevernas resultat på förtestet och då främst det som varit kritiskt för eleverna, där de uppvisat svårigheter. Under forskningslektionerna prövar lärarna hur man kan förtydliga dessa kritiska aspekter i undervisningen för att förbättra elevernas lärande. En tid efter att forskningslektionen genomförts får eleverna återigen genomföra testet (eftertest). Testresultatet ger då läraren ett underlag för om elevernas kunskaper har förbättrats och vilka kritiska aspekter som kvarstår. Genom att låta eleverna utföra för- och eftertest kan undervisningen granskas mer systematiskt.

Vi har intresserat oss för innebörden av vad det är elever förväntas kunna när de kan tillverka symboliska uttryck i slöjdföremål samt hur undervisningen kan exemplifieras beroende på hur lärandeobjektet uppfattas. När man talar om slöjd som uttryck och kommunikativ verksamhet behöver elever förstå att de föremål de tillverkar berättar något. Slöjdföremål har en narrativ funktion (Mäkelä, 2011; Nielsen, 2008) genom att de sänder ut signaler om estetiska preferenser, stil och kulturell tillhörighet. Eleverna behöver förstå att de individuella uttryck som de väljer att ge sina slöjdföremål bestäms av hur de förhåller sig till olika symboliska uttryck. Det kan handla om hur en viss kombination av material, färg och form, samt bearbetning, signalerar till exempel en specifik kulturell tillhörighet. Om en elev väljer att sy en väska av ett visst tyg och fäster spetsar, knappar, säkerhetsnålar eller andra detaljer så kan denna väska uppfattas som tillhörande en viss stil, till exempel punkstil eller mangastil. Det kan även handla om att föremålet ger en association till ett visst sam-

Broman, Frohagen, Wemmenhag

manhang. Om den är gjord av naturfärgat linne med gröna detaljer kan den ge en känsla av natur och skog.

Föreliggande studie har genomförts med elever i årskurs fem i en kommunal F-5 skola. Eleverna börjar på denna skola med slöjd i årskurs tre. Sammanlagt har fem klasser med ca 26 elever per klass deltagit i studien. Två av dessa klasser ingick enbart i vår pilotstudie. Studiens tre lektionscykler har genomförts i tre olika klasser, en klass per cykel. Studien omfattar slöjdarbete i olika slöjdmaterial. Vi tre som genomfört studien är alla slöjdlärare med 6 till 16 års erfarenhet i grundskolan (två är utbildade i trä- och metallslöjd och en i textilslöjd). Två av oss höll parallellt i undervisningen under alla tre lektionscyklerna.

I denna studie har vi använt oss av variationsteoretiska mönster för att systematiskt visa på skillnader och likheter genom *kontrastering* och *generalisering* (Mau-nula, Magnusson & Echevarría, 2011). Detta har skett i cykel tre, i planeringen och genomförandet av för- och eftertestlektionerna samt forskningslektionerna. I alla tre cykler har vi arbetat med att studera och pröva lärandeobjektet samt urskilja kritiska aspekter av detsamma.

Att genomföra tester eller prov är ovanligt i slöjdundervisning. Därför lade vi initialt fokus på att designa en lämplig testuppgift samt pröva denna i en första elevgrupp, en textilslöjdsgrupp och en träslöjdsgrupp. Vanligtvis används samma test i alla cykler i en learning study för att kunna jämföra elevernas resultat mellan cyklerna. Så har inte skett i denna studie. Eftersom vi prövat olika uttolkningar av lärandeobjektet i alla tre cyklerna har detta krävt att vi konstruerat en ny testuppgift i varje cykel. I princip har testen i varje cykel krävt en åttiominuters-lektion i tidsåtgång.

Dokumentationen av elevernas resultat utvecklades under cyklernas gång. Elevernas färdiga slöjdföremål fotograferades i cykel ett och cykel tre (i den andra cykeln skedde ingen tillverkning av föremål). Eleverna fick därefter besvara ett frågeformulär i cykel ett och två där de fick motivera sina val och tillvägagångssätt i slöjdarbetet. I den tredje cykeln valde vi att intervjua eleverna en och en med Mp3-spelare eftersom vi hade haft svårigheter med att tolka flera av elevernas svar i frågeformuläret. I en intervjusituation är det möjligt att ställa en förtydligande följdfråga, varför vi valde att använda denna metod i stället för skriftligt formulär. Vi har gjort fenomenografiska analyser (Marton, 1981) i cykel ett och cykel tre på bilderna av elevernas slöjdföremål samt deras svar skriftligt/muntligt. Dessa analyser har legat till grund för att formulera kritiska aspekter i respektive cykel. Forskningslektionerna filmades och detta filmmaterial har legat till grund för kollegiala samtal under studiens gång.

Resultatet som presenteras under följande fyra rubriker syftar till att ge en bild av studiens förlopp och visa på den förskjutning som skedde av lärandeobjektet som vi sedan diskuterar i slutet av artikeln. Vi har valt att endast presentera bildmaterial från för- och eftertest i cykel tre eftersom det var först i denna lektionscykel som vi bedömt att uttolkningen av lärandeobjektet blivit preciserat ämnesmässigt. De tre elevexempel vi valt ut representerar inte en spridning av bättre eller sämre resultat på testet. Vi vill snarare med dessa exempel visa på en variation av de kritiska aspekterna och därigenom en variation av hur elevernas kunnande kan förstås.

Cykel ett: "Den egna idén ska få ett eget uttryck"

Vi ville undersöka vad det innebär att kunna skapa och tolka symboler i slöjdföremål. Detta är kopplat till det fjärde långsiktiga målet i kursplanen för slöjd i Lgr11 som handlar om hur 'tolka' kan förstås som ett ämnesspecifikt kunnande i slöjd. I denna första cykel uppfattade vi att lärandeobjektet var förmågan att uttrycka sig genom att använda sig av symboler på ett slöjdföremål.

Förtest

Elevernas uppgift var att tillverka en dörrskylt som berättar vem som bor bakom dörren. För att begränsa uppgiften till det symboliska uttrycket i själva dörrskylten valde vi att inte bedöma skyltarnas upphängningsfunktion. Klassen var uppdelad i två grupper, en textilslöjdsgrupp en träslöjdsgrupp (vi har inte skrivit ut metallslöjd, eftersom det inte förekommit någon bearbetning i metall). Båda grupperna testades med samma uppgift men fick arbeta materialspecifikt i respektive sal. Efter avslutat test svarade eleverna på ett frågeformulär kopplat till deras intention med skylten.

Vid analysen av förtestet såg vi att flera elever hade svårigheter att tillverka ett tydligt budskap. Eleverna behövde överlag utveckla kunskaper om sedvanliga symboler i samhället. En majoritet av eleverna hade också utfört uppgiften på ett sådant sätt att de inte använt slöjdens tekniker utan i stället till exempel målat direkt på en obearbetad tygbit utan någon övrig bearbetning av materialet. Vi noterade även att endast en elev bearbetat skyltens yttre form i avsikt att förstärka uttrycket. Det vi såg som kritiskt för att kunna åstadkomma ett slöjdarbete med ett symboliskt uttryck var elevernas uppfattning om *vad en symbol är; hur eleverna väljer symboler; färgval; hur eleverna väljer och hanterar material, tekniker och verktyg*. Vi bestämde oss för att genomföra två åttiominuters forskningslektioner där vi belyste dessa kritiska aspekter.

Forskningslektionen

Den första lektionen började med en lärarledd diskussion där lärarna gick igenom och visade exempel på vad en symbol är. I samband med detta tittade vi på och diskuterade vad olika vedertagna symboler betyder och hur val av symboler, färger och former kan förstärka varandra och tydliggöra ett budskap men också göra budskapet otydligt. Vi lyfte speciellt skyltens yttre form och hur den kan påverka budskapet eftersom endast en elev hade använt sig av denna möjlighet på förtestet. Symbolerna vi tittade på var bland annat vägskyltar, politiska symboler, peacemärket, återvinningsymbolen med flera.

På den andra lektionen fick eleverna ge varandra respons på sina arbeten från förtestet utifrån några centrala begrepp så som färg, form, symboler och hur dessa hänger ihop och kan förstärka/försvaga varandra. Därefter hade vi en diskussion utifrån tydlighet i budskapet, materialval, materialbearbetning och tekniker. Eleverna fick även en uppgift där de fick skissa och beskriva hur de tänkt tillverka en ny skylt med ett förutbestämt budskap. Under tiden eleverna skissade diskuterade vi med dem hur deras val påverkade tydligheten i det budskap de fått till uppgift att uttrycka. Under lektionerna skedde ingen tillverkning eftersom det skulle ta för mycket tid i anspråk.

Broman, Frohagen, Wemmenhag

Eftertest

Testet genomfördes identiskt med förtestet veckan efter den andra forskningslektionen. Analysen av eftertestet visar att flera elever förbättrat sina resultat när det gäller användning av symboler, färgval och bearbetning av materialet. Fler elever hade nu använt sig av slöjdens hantverkstekniker och antalet elever som hade bearbetat den yttre formen för att förstärka uttrycket hade ökat. Flera elever hade fortfarande svårigheter med att välja symboler.

Slutsats

Eftersom en majoritet av eleverna fortfarande verkade uppfatta uppgiften som något otydlig och vi själva ansåg att uppgiften var alldeles för "öppen" och svårbedömd, bestämde vi oss för att byta testuppgift inför cykel två. Vi insåg att vi behövde koppla uppgiften till mer specifika slöjdkulturer och föremål som kan kopplas till dessa, inte bara ett egenkomponerat symbolspråk. Lärandeobjektet försköts från *förmågan att uttrycka sig genom att använda symboler på slöjdföremål* till att handla om *ett slöjdföremåls symboliska uttryck* och att detta handlar om *vilka signaler själva slöjdföremålet sänder ut*. Kunnandet i lärandeobjektet uppfattade vi nu handlar om att kunna förstå vilket material föremålet är tillverkat av, materialbearbetning, färger, slöjdföremålets yttre form och användandet av mönster och symboler.

Cykel två: "Uteslutningen av slöjdens hjärtebarn"

Vi uppfattade att eleverna behövde få träna sig på att tolka genom att verbalisera vad föremål signalerar. Skulle vi till och med välja bort och utesluta det så slöjdspecifika *tillverkandet* för att enbart studera elevernas verbala tolkningar? Vi kände oss dock inte tillfreds med tanken på att kunnandet i denna cykel skulle komma att bli enbart verbalt. Samtidigt befann vi oss nu under stor tidspress inför stundande terminsavslut. För att komma vidare beslöt vi oss för att utesluta själva tillverkandet och enbart studera innebörden av lärandeobjektet att tolka, i förståelsen att beskriva föremål verbalt.

Förtest

Vi valde ut fem föremål med olika symboliska uttryck. En jeansväska sydd av en återbrukad jeansficka, en Musse Pigg-figur huggen i lindträ, en ljuslykta tillverkad av en ölburk i aluminiumplåt, en Angry Bird sydd av fleecetyg och en samisk kåsa tillverkad av björkvril och renhorn. Föremålen numrerades och ställdes på ett bord i den ena slöjdsalen. Förtestet genomfördes i denna cykel med både textil- och träslöjdsgruppen gemensamt. Eleverna fick undersöka föremålen, vrida och vända på dem, inte muntligt kommentera någonting utan arbeta enskilt och under tystnad. Varje elev svarade skriftligt på några frågor tillhörande vart och ett av de fem föremålen.

Analysen av elevernas resultat på testet visade oss att eleverna hade svårt att benämna aspekter som material och etnisk kultur, den samiska kulturen. Vi noterade även att flera elever har svårigheter att förstå skillnaden mellan föremål och material så som ölburk och aluminiumplåt, byxor och jeansstyng.

Forskningslektionen

I den här cykeln genomförde vi endast en åttiominuters forskningslektion i helklass. Under lektionen visade lärarna olika material och likvärdiga föremål som i förtestet. Lärarna ledde diskussioner om hur val av material, form, funktion, bearbetning, färgsättning, symboler och mönster kan förstärka och försvaga olika uttryck. Under forskningslektionen visade eleverna en stor nyfikenhet kring just det samiska föremålet och förståelsen för detta kulturella uttryck.

Eftertest

Testet genomfördes identiskt med förtestet veckan efter forskningslektionen. Analysen av eftertestet visar att de flesta elever förbättrat sina resultat när det gäller att kunna benämna material, föremåls användningsområde och kulturtillhörighet.

Slutsats

Inför cykel tre ville vi återinföra det slöjdspecifika tillverkandet i vår studie. Vi insåg också att vi behövde avgränsa lärandeobjektet ännu mer än i cykel ett och två. Avgränsningen skulle då också underlätta vår bedömning av elevernas arbete. Lärandeobjektet hade nu förskjutits från att i cykel två tolka befintliga föremåls symboliska uttryck till att tillverka ett föremål med ett symboliskt uttryck. Vi hade nu landat i att skapandet och bearbetningen av ett material är bärande i slöjd och i skapandet ligger ett tolkande. Kunskandet i lärandeobjektet, uppfattade vi nu, handlar om att kunna urskilja att material, färger, bearbetningsmetoder, former, symboler och mönster påverkar ett föremåls symboliska uttryck.

Cykel tre: "Att tillverka ett samiskt uttryck"

Under forskningslektionen i cykel två hade som sagt eleverna visat en stor nyfikenhet kring just det samiska föremålet och de ställde många frågor om den samiska kulturen. Detta intresse från eleverna var något vi tog fasta på till denna tredje och sista cykel. Nu ville vi designa en tydligt avgränsad testuppgift och ansåg att den samiska slöjdkulturen var lämplig eftersom den kan uppfattas som avgränsad gällande färg, form, material, bearbetning, mönster och symboler. Vi ville testa elevernas förmåga att tolka ett symboliskt uttryck genom att de skulle tillverka en nyckelring med ett samiskt uttryck.

Vi valde en nyckelring av två skäl. Dels för att en nyckelring är ett föremål som de flesta elever känner till och för att det inte är ett typiskt traditionellt samiskt föremål. Vår avsikt var inte att eleverna skulle lära sig sami duodji (sameslöjd) eller daida duodji (samiskt konsthantverk) utan snarare att de skulle lära sig att urskilja vad som gör att ett föremål uppfattas som samiskt.

Förtest

Eleverna fick till uppgift att *göra en nyckelring som ser samisk ut*. Eleverna hade tillgång till både textil- och träslöjdssalen för att de skulle kunna arbeta med slöjd som ett ämne. I korridoren mellan slöjdsalarna hade vi dukat upp lådor med olika material. Lådorna innehöll både typiskt samiska material såsom kläde, ullgarn, tenntråd,

Broman, Frohagen, Wemmenhag

renskinn, renhorn, björkvril och icke typiska samiska material såsom fleece, akrylgarn, ståltråd, syntetskin, vit akrylplast och enträ. De textila materialen fanns i både de samiska färgerna och i sådana färger som inte förknippas med den samiska kulturen. För att ytterligare avgränsa testuppgiften tog vi bort en del av funktionsaspekten genom att eleverna fick en färdig nyckelring av stål så att de kunde koncentrera sig på att tillverka endast själva hänget. Eleverna fick en lektion (åttio minuter) på sig att tillverka en nyckelring. Efter avslutat test intervjuades eleverna. I de tidigare två cyklerna hade vi använt oss av frågeformulär. I den här cykeln bytte vi från skriftligt frågeformulär till muntlig intervju för att vi upplevt brister i metoden genom att det var svårt att få fullständiga elevsvar. Intervjun handlade om vilka material och färger eleverna valt och varför de valt just dessa. De fick också berätta om de ansåg att de hade valt någon symbol och mönster på sitt hänge och vad de ansåg vara typiskt samiskt med hänget. Därefter fick de kommentera bearbetningsgraden av sitt arbete.

Analysen av elevernas resultat på förtestet visar att en majoritet av eleverna behövde utveckla kunnandet avseende val av material, färger, yttre form, hantverksteknik, symboler och mönster. Även förmågan att bearbeta materialet behövde utvecklas hos en majoritet av eleverna.

Forskningslektionen

Vi bestämde oss för att genomföra två åttiominuters forskningslektioner där vi belyste dessa kritiska aspekter. Den första lektionen började med att eleverna i mindre grupper fick sortera materialen från förtestet utifrån vad de ansåg vara typiska/icke typiska samiska material. Därefter följde en lärarledd diskussion där lärarna gick igenom och visade vilka material som var typiskt samiska. I samband med detta tittade vi på och jämförde olika samiska och icke samiska föremål och hur dessa varierar utifrån material, färger, yttre form, hantverksteknik, symboler och mönster. Därefter följde även en diskussion om hur val av material, färger, yttre form, hantverksteknik, symboler och mönster kan förstärka varandra och tydliggöra ett föremåls etniska och kulturella tillhörighet men också göra tillhörigheten otydlig.

På den andra lektionen delades klassen i en textil-, en trä- och en hornslöjdsgrupp. Grupperna fick således inte undervisning i alla tre material och hur de kan bearbetas. Vi tog detta beslut på grund av tidsbrist, annars hade vi velat att båda grupperna skulle fått ta del av hur man kan bearbeta både hårda och mjuka material. Respektive grupp undervisades i några olika hantverkstekniker och bearbetningsmetoder som kan kopplas till samiskt hantverk. Bearbetningsmetoderna fick eleverna sedan öva sig på varefter de fick en uppgift att tillverka ett smycke med ett samiskt uttryck. Under tiden eleverna arbetade diskuterade vi med dem om hur deras val av material, färger, yttre form, hantverksteknik, symboler och mönster påverkade uttrycket för den etniska och kulturella tillhörighet de fått till uppgift att tolka.

Eftertest

Testet genomfördes identiskt med förtestet veckan efter forskningslektionen. Analysen av eftertestet visar att de flesta elever förbättrat sina resultat inom alla områden.

Vi har valt ut tre elevexempel på föremål från för- och eftertest i cykel tre som visar hur förbättringen kan förstås.

Elev A :



Vår bedömning av Elev A:s nyckelring från förtestet (till vänster i bild): Kombination av typiska/icke typiska samiska material (renskinn, skinnimitation, enträ). Icke typiska samiska färger (vit, beige, brun). Icke typisk samisk yttre form (hjärtform). Delvis bearbetad (utsågad form, borrarat hål, oslipad yta med sågmärken kvar). Inga typiska samiska symboler och mönster.

Elev A svarade följande under intervjun i förtestet:

Vilka material valde du på din nyckelring?

– Jag valde trä, tyg och lite färg, trä och skinntyg.

Varför valde du dessa material?

– Som sametiden, då slaktar dom. Jag tänkte bara på det.

Vilka färger valde du på din nyckelring?

– Brun, vit och beige.

Varför valde du dessa färger?

– Jag tyckte dom passade som samefärger, jag vet faktiskt inte.

Vilken form valde du på din nyckelring?

– Jag valde att göra ett hjärta.

Varför valde du denna form?

– För jag tycker det är fint.

Vår bedömning av Elev A:s nyckelring från eftertestet (till höger i bild): Typiska samiska material (renhorn). Typiska samiska färger (renhornets vita färg, barkfärg i mönstret). Typisk samisk yttre form (avrundad form). Vålbearbetad (slät yta utan

Broman, Frohagen, Wemmenhag

sågmärken). Typiska samiska symboler och mönster (inskuret solkors/snöflingeliknande mönster).

Elev A svarade följande under intervjun i eftertestet:

Vilka material valde du på din nyckelring?

– Jag tog horn.

Varför valde du dessa material?

– Det blir coolt när man skär in mönster.

Vilka färger valde du på din nyckelring?

– Brun och hornfärg.

Varför valde du dessa färger?

– För att det är naturfärg.

Vilken form valde du på din nyckelring?

– En rektangel.

Varför valde du denna form?

– För att jag tyckte formen passade.

Sammanfattande bedömning av Elev A:s förbättring: Elev A har i förtestet inte åstadkommit ett samiskt uttryck. I eftertestet däremot har eleven tillverkat en nyckelring med ett tydligt samiskt uttryck genom att använda renhorn, bearbetat ytan vit, rundat kanter, skurit och färgat in symboler/mönster som är sameliknande. Eleven har däremot inte motiverat några av dessa val och uttrycksmedel som samiska.

Elev B:



Vår bedömning av Elev B:s nyckelring från förtestet (till vänster i bild): Kombination av typiska/icke typiska samiska material (renskinn, skinnimitation, enträ, ståltråd). Icke typiska samiska färger (beige, brun). Icke typisk samisk yttre form (triangel-

form). Delvis bearbetad (utsågad form, borrarat hål, oslipad yta med sågmärken kvar). Inga typiska samiska symboler och mönster.

Elev B svarade följande under intervjun i förtestet:

Vilka material valde du på din nyckelring?

– Den består av tyg och trä och sen ståltråd.

Varför valde du dessa material?

– För trä tycker jag är fint att det hänger, så jag tyckte det kunde vara trä.

Vilka färger valde du på din nyckelring?

– Den är ljusbrun, på sidorna mörkbrun, på framsidan och baksidan är det liksom ljusbrunt.

Varför valde du dessa färger?

– För jag tycker det är liksom som djur. Det är liksom samiskt för mig.

Vilken form valde du på din nyckelring?

– Det är en vanlig nyckelring med en triangel.

Varför valde du den formen?

– Jag tyckte det såg fint ut, jag vet inte varför, jag tyckte bara det såg fint ut.

Vår bedömning av Elev B:s nyckelring från eftertestet (till höger i bild): Typiska samiska material (renhorn, ullgarn). Typiska samiska färger (renhornets vita färg, rött, blått, grönt, gult). Typisk samisk yttre form (avrundade former, tofs). Vålbearbetad (slät yta utan sågmärken, tät fläta). Typiska samiska symboler och mönster (flätmönstret).

Elev B svarade följande under intervjun i eftertestet:

Vilka material valde du på din nyckelring?

– Ull och renhorn.

Varför valde du dessa material?

– Renhornet är liksom samiskt för mig.

Vilka färger valde du på din nyckelring?

– Lite beige, lite brun (anm. renhornets färg) grön, röd, blå och gul.

Varför valde du dessa färger?

– För det är färgerna på samiska flaggan, renhornets färg är liksom samiskt för mig.

Vilken form valde du på din nyckelring?

– En renbensbit på en fläta.

Varför valde du denna form?

– Jag tycker det är snyggt, flätan är samisk och renhornet.

Sammanfattande bedömning av Elev B:s förbättring: Elev B har i förtestet inte åstadkommit ett samiskt uttryck. I eftertestet däremot har eleven tillverkat en nyckelring med ett tydligt samiskt uttryck genom att använda ullgarn i de samiska färgerna, flätat en rund vålbearbetad fläta i typiska mönster med tofs. Använt renhorn, bearbetat ytan vit, rundat kanter. Eleven har motiverat de flesta val och uttrycksmedel som samiska.

Broman, Frohagen, Wemmenhag



Elev C:

Vår bedömning av Elev C:s nyckelring från förtestet (överst i bild): Icke typiska samiska material (akrylplast, akrylgarn). Icke typiska samiska färger (orange). Icke typisk samisk yttre form (rektangel, knutar på rad). Delvis bearbetad (borrat hål, ostrukturerat garnarbete). Inga typiska samiska symboler och mönster.

Elev C svarade följande under intervjun:

Vilka material valde du på din nyckelring?

– Ståltråd, garn och någon plastplatta.

Varför valde du dessa material?

– Vet inte.

Vilka färger valde du på din nyckelring?

– Vit, rosa och orange.

Varför valde du dessa färger?

– Tycker dom är fina.

Vilken form valde du på din nyckelring?

– Lite som en rektangel och lite runt.

Varför valde du denna form?

– Rektangeln är som en liten namnskylt.

Vår bedömning av Elev C:s nyckelring från eftertestet (underst i bild): Typiska samiska material (ullgarn). Typiska samiska färger (rött, blått, grönt, gult). Typisk samisk yttre form (avrundade form, tofs). Vålbearbetad (tät fläta). Typiska samiska symboler och mönster (flätmönstret).

Elev C svarade följande under intervjun på eftertestet:

Vilka material valde du på din nyckelring?

– Garn, ullgarn.

- Varför valde du dessa material?
 (Inget svar, frågan missades under intervjun)
- Vilka färger valde du på din nyckelring?
 – Blå, grön, röd och gul.
- Varför valde du dessa färger?
 – För att dom är samiska.
- Vilken form valde du på din nyckelring?
 – Lite mer avlång, en flätning, en tofs.
- Varför valde du denna form?
 – Tofsen för att den är samisk.

Sammanfattande bedömning av Elev C:s förbättring: Elev C har i förtestet inte åstadkommit ett samiskt uttryck. I eftertestet däremot har eleven tillverkat en nyckelring med ett samiskt uttryck genom att använda ullgarn i de samiska färgerna, flätat en rund välbearbetad fläta i typiska mönster med tofs. Eleven har motiverat de flesta val och uttrycksmedel som samiska.

I cykel tre utvecklade vi en bedömningsmatris utifrån de kritiska aspekterna enligt följande:

Bedömningsaspekter	Kvalitet 0	Kvalitet 1	Kvalitet 2	Kvalitet 3
Materialval	Valt ett icke typiskt samiskt material, till exempel plast, syntet	Kombinerat typiskt och icke typiskt samiskt material	Valt ett eller flera typiska samiska material utan motivering till det samiska	Valt ett eller flera typiska samiska material med motivering till det samiska
Färgval	Valt icke typisk samisk färg	Kombinerat typiskt och icke typiskt samisk färg	Valt typisk samisk färg utan motivering till det samiska	Valt typisk samisk färg med motivering till det samiska
Föremålets form	Valt icke typisk samisk form	Valt typisk samisk form i kombination med icke typisk samisk form	Valt typisk samisk form utan motivering till det samiska	Valt typisk samisk form med motivering till det samiska
Hantverksteknik	Materialet är obearbetat eller ringa bearbetat	Materialet är delvis bearbetat med en typisk samisk teknik	Materialet är bearbetat med en typisk samisk teknik utan motivering till det samiska	Materialet är bearbetat med en typisk samisk teknik med motivering till det samiska
Symboler och mönster	Ej använt symboler/mönster eller använt icke typiska samiska symboler/ mönster	Använt typiska samiska och icke typiska samiska symboler/mönster	Använt typiska samiska symboler/mönster utan motivering till det samiska	Använt typiska samiska symboler/mönster med motivering till det samiska

Broman, Frohagen, Wemmenhag

Med hjälp av matrisen bedömde vi hur eleverna hade valt material utifrån de material som dukats fram. Några av materialen var typiskt samiska (renhorn, renskinn, kläde, tenntråd, björkvril, ullgarn) och andra var icke typiskt samiska material (akrylplast, konstskinn, fleece, färgad koppartråd, enträ, syntetgarn). Det vi menar med 'motivering' är att eleven till exempel säger "jag har valt rött, gult och blått för att det är samiska färger" eller "det här materialet känns liksom samiskt" (om horn). Om eleven har motiverat sitt val genom att säga "jag har valt rött, gult och blått för att det är Djurgårdens färger" eller valt horn men inte har någon uppfattning om varför, då saknas en motivering till ett samiskt uttryck. Eleven har då inte reflekterat över arbetets syfte eller har förbisett syftet, och lusten av ett annat uttryck styr. Med föremålets form menar vi det symboliska uttrycket som föremålets form signalerar, till exempel rundade former eller former som föreställer typiska samiska föremål.

Diagram 1 sammanfattar elevernas resultat i förtestet i cykel tre:

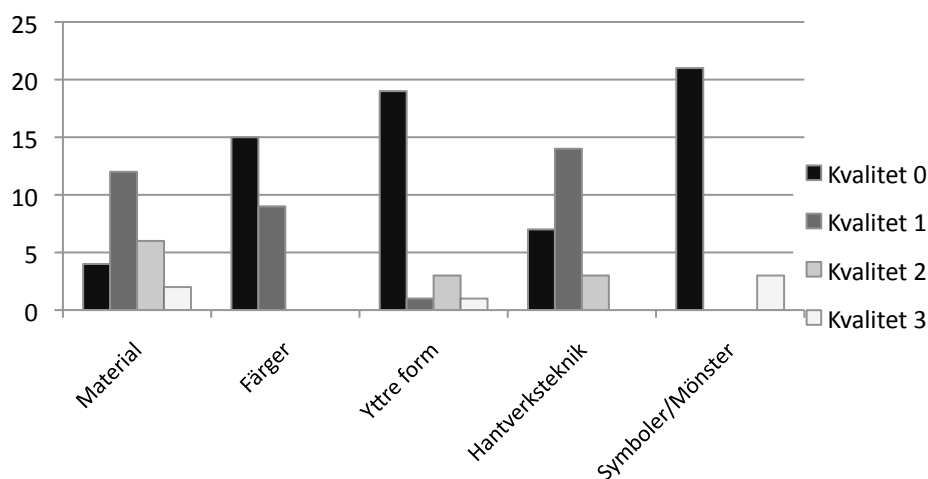
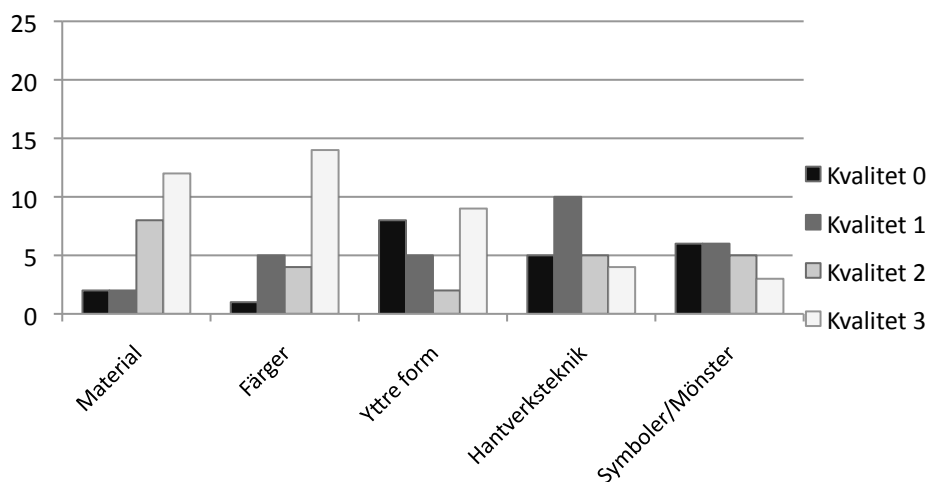


Diagram 2 sammanfattar elevernas resultat i eftertestet i cykel tre:



Slutsats

Vi hade nu skapat en uppgift som var tydligt avgränsad och framför allt slöjdspecifik. Genom att eleverna fick tillverka ett slöjdföremål med ett specifikt kulturellt uttryck (samiskt) blev deras förmåga att tolka detta uttryck synliggjord. Elevernas kunskapsnivåer blev tydligare att bedöma i denna uppgift jämfört med cykel ett och cykel två. Resultatutfallet som synliggörs i diagrammen ovan visar på en generell förbättring av elevernas kunnande inom alla fem områden. Störst förbättring skedde när det gäller elevernas förmåga att välja material och färger. Minst förbättring skedde när det gäller elevernas förmåga att bearbeta materialet samt förmågan att välja lämpliga symboler/mönster.

I slutet av både cykel ett och cykel två skedde en förskjutning av hur vi uppfattade innebörden av lärandeobjektet vilket ledde till att vi ändrade både testuppgifter och lektionsinnehållet i nästkommande cykel. I cykel tre däremot uppfattade vi ingen förskjutning utan snarare bekräftades vår uppfattning om vad eleverna skulle lära sig. Fortfarande handlar lärandeobjektet om att kunna urskilja att material, färger, bearbetningsmetoder, former, symboler och mönster påverkar ett föremåls symboliska uttryck. I cykel tre kunde vi konstatera att det är avgörande för elevernas lärande att läraren visar på och lyfter fram exempel på specifika symboliska uttryck. Det betyder att läraren måste visa och diskutera hur dessa uttryck komponeras med hjälp av specifika material, färger, former, bearbetningsmetoder samt symboler och mönster.

Sammanfattning av de tre cyklerna

Tabellen på sid 23 sammanfattar innehållet i de tre cyklerna och hur vår formulering och omformulering av lärandeobjektet påverkade innehållet i undervisningen. Först redogörs för vad eleverna ska lära sig (vår uppfattning av lärandeobjektet). Därefter redogörs för de kritiska aspekter som identifierats utifrån elevernas resultat av förtestet i respektive cykel. Slutligen redogörs för innehållet i respektive testuppgift samt för innehållet och upplägget av respektive forskningslektion.

Diskussion

Ett karaktärsdrag för denna studie är att vi gjort olika uttolkningar av lärandeobjektet i varje cykel, vilket vanligtvis inte sker i en learning study. Anledningen till varför vårt lärandeobjekt har förskjutits är något vi finner intressant att diskutera. En annan fråga som återkommit gång på gång i våra diskussioner under studiens gång är hur ett estetiskt kunnande – *förmågan att tolka ett symboliskt uttryck* – kan förstås som ett hantverkskunnande. Slutligen lyfter vi några didaktiska resonemang utifrån studiens resultat.

Lärandeobjektets förskjutning

Varje uttolkning av lärandeobjektet har förändrat utformningen av undervisningen. Detta har i sin tur påverkat vilket kunnande som gjorts möjligt för eleverna att utveckla i undervisningen. Från att i cykel ett ha haft fokus på att eleverna skulle *använda symboler på sitt slöjdföremål* gled vi i cykel två över till att eleverna enbart

	Cykel ett	Cykel två	Cykel tre
Lärandeobjekt	Att skapa identitetsbärande symboler i slöjdföremål.	Att tolka symboliska uttryck (ej skapa).	Att tillverka ett samiskt uttryck.
Förtest (och eftertest)	Tillverka en dörrskylt med symboler som berättar vem som bor bakom dörren. Besvara frågor skriftligt angående val.	Tolka fem föremåls uttryck utifrån olika estetiska och kulturella aspekter genom skriftligt prov.	Tillverka en nyckelring med ett samiskt uttryck. Besvara frågor muntligt genom intervju.
Kritiska aspekter	<p>Vad en symbol är (till exempel inte en avbild).</p> <p>Hur val av material och bearbetningen av detta material påverkar uttrycket.</p> <p>Hur användning av färger kan skapa ett tydligt respektive otydligt uttryck.</p> <p>Den yttre formens betydelse för uttrycket.</p> <p>Hur användning av symboler kan skapa ett tydligt respektive ett otydligt uttryck.</p>	<p>Hur föremålet kan placeras in i ett kulturellt sammanhang (vem använder föremålet och till vad).</p> <p>Vad som kan förstärka ett specifikt uttryck (till exempel Iors färger och former, samiska material och mönster, väskans lock eller dragkedja).</p> <p>Förstå skillnaden mellan material och produkt (aluminiumplåt – läskburk).</p> <p>Hur bearbetningen av materialet påverkar uttrycket.</p>	<p>Att föremålet förväntas ha ett specifikt symboliskt uttryck.</p> <p>Hur val av material och bearbetningen av detta material påverkar uttrycket.</p> <p>Hur användning av färger kan skapa ett tydligt respektive ett otydligt uttryck.</p> <p>Den yttre formens betydelse för uttrycket.</p> <p>Hur användning av symboler och mönster kan skapa ett tydligt respektive ett otydligt uttryck.</p>
Forskningslektion (80 minuter per lektion)	<p><u>Lektion 1 av 2:</u> Läraren leder diskussion om vad en symbol är. Läraren visar utskrivna bilder av vedertagna symboler, bland annat trafikskyltar och leder en diskussion utifrån elevernas resultat på förtestet.</p> <p><u>Lektion 2 av 2:</u> Läraren sammanfattar förra lektionen. Läraren leder genomgång med fokus på bearbetning. Eleverna får göra en skiss på en skylt med förbestämt budskap (dra lapp). De får handledning och respons under arbetets gång.</p>	<p><u>Lektion:</u> Läraren visar olika material och likvärda föremål som i testet (till exempel seriefigurerna Musse Pigg – Ior). Läraren leder diskussion om hur val av material, form, funktion, bearbetning, färgsättning och symboler/mönster förstärker uttrycket.</p>	<p><u>Lektion 1 av 2:</u> Eleverna får till uppgift att sortera olika material som typiska/icke typiska samiska material. Eleverna får respons på resultatet. Lärarna visar på kontraster mellan typiska/icke typiska samiska föremål.</p> <p><u>Lektion 2 av 2:</u> Lärarna visar bearbetningsmetoder som förstärker ett samiskt uttryck. Eleverna får sedan tillverka ett smycke med ett samiskt uttryck. De får handledning och respons under arbetets gång.</p>

skulle kommentera symboliska uttryck i tal och skrift utan att själva slöjda. I cykel tre återtog vi det vi menar med ett slöjdperspektiv, det vill säga att eleverna skulle tillverka ett uttryck. Dessutom kopplades tillverkningen till ett specifikt uttryck (det samiska) som innefattar val av typiska material, färger, former, tekniker och symboler/mönster. När lärandeobjektet förskjutits mellan cyklerna har den specifika förmågan som undervisningen syftar till att utveckla, ändrats. I cykel ett ledde vår uppfattning av lärandeobjektet till att eleverna fick utveckla sin förmåga att skapa egna symboler. Här kan kunnandet beskrivas som förmågan att tillverka tydliga symboler. Däremot kan kunnandet i cykel ett inte beskrivas som förmågan att tillverka ett slöjdföremål som inbegriper en tolkning av ett specifikt uttryck, som i cykel tre. Både i cykel ett och i cykel tre finns betoningen på slöjdkunnande som ett hantverkskunnande. Med detta menar vi att kunnandet kommer till uttryck genom att eleven faktiskt tillverkar ett föremål, inte bara pratar eller skriver om ett eller flera föremål som i cykel två. Vårt resultat visar på betydelsen av hur vi som slöjdlärare måste vara noggranna med att hantera kursplanens skrivningar på ämnets villkor. Av kommentarmaterialet till kursplanen för slöjd (Skolverket, 2011b) framgår att förmågan att tolka inte enbart ska förstås som ett analytiskt och teoretiskt inslag, utan även ska kopplas till elevens skapande. Om inte, riskerar ett ord som 'tolka' att förstås som enbart ett verbalt och skriftligt kunnande snarare än ett resonerande som pågår i relation till ett tillverkande. Förskjutningen av lärandeobjektets formulering har inneburit en precisering av kunnandet och därmed en fördjupning av kunskapen om detta lärandeobjekt.

Relationen mellan estetiskt kunnande och hantverkskunnande

Resultatet från denna studie bidrar till en diskussion om hur ett estetiskt kunnande förhåller sig till ett hantverkskunnande i slöjd. Studien tog sin utgångspunkt i den del av ämnesinnehållet i Lgr11 som knyter an till estetiska och kulturella uttrycksformer. Redan under pilotstudien såg vi dock att många elever hade svårigheter med hantverksmässiga aspekter. Flera elever hade svårt att spänna fast träämnen i hyvelbänken på lämpliga sätt trots att detta har varit en återkommande del i undervisningen under tidigare läsår. Likaså hade flera elever svårt att hantera textiltryck vilket eleverna också hade arbetat med tidigare. Dessa aspekter påverkade elevernas resultat i hög grad när det gällde att tillverka tydliga uttryck. Även om vår tanke var att isolera det estetiska kunnandet i testuppgiften blev det tydligt att det estetiska kunnandet är beroende av hantverkskunnandet – alltifrån att välja lämpligt material till hur man väljer och hanterar ett verktyg och bearbetningsgrad av materialet. Med hantverkskunnande menas då att kunna förhålla sig till traditionella hantverkstekniker och traditionella slöjdformer. Det handlar om att utveckla sin förmåga att tolka och använda uttryck medvetet och att kunna följa och bryta stilar och koder. Estetiskt kunnande och hantverkskunnande förutsätter varandra. Dormer (1994) påtalar att särskiljandet av *Craft* från *Art* är en grundläggande problematik särskilt som kunskapen i att framställa ett objekt ofta har kommit att värderas mycket lägre än kunskapen i att utveckla själva idén om objektets funktion och uttryck. En vanlig missuppfattning av hantverkskunnande (*Craft Knowledge*) som Dormer påtalar är uppfattningen

Broman, Frohagen, Wemmenhag

att det strider mot skapandet av originalitet och individuella uttryck, eftersom hantverkskunnande anses som något allmänt (*communal*) och strikt bundet av regler och att detta skulle strida mot den fria tanken, kreativitet och det individuella uttrycket (s. 7). Hantverkskunnande har ansetts vara något rent mekaniskt och regelbaserat och att detta skulle strida mot personlig kreativitet och förmågan att göra estetiska bedömningar. Om vi inte förstår och lyfter fram estetiska aspekter av hantverkskunnande samt relationen mellan funktion och uttryck i slöjdundervisningen finns en risk att vi förlorar en tradition av tillverkande/framställande (*making*) och framför allt betydelsen av att lära sig att tänka och handla interaktivt, *thinking-through-making* (ibid., s.8).

Att undervisa om estetiska och kulturella uttryck i slöjdföremål

Resultatet från de tre cyklerna i denna studie visar att en slöjduppgift som syftar till att utveckla förmågan att tolka ett specifikt uttryck, i detta fall *en nyckelring med ett samiskt uttryck*, underlättar för elevers lärande. Nyckelringsuppgiften innehåller ett specifikt uttryck som eleverna har att förhålla sig till. Detta underlättar för elevens lärande genom att det finns en uppsättning kriterier. I sin tur underlättar kriterierna även för lärarens pedagogiska bedömning. I nyckelringsuppgiften finns kriterier för val av lämpliga material, färger, former, symboler/mönster och hantverksteknik/bearbetning för att skapa det samiska uttrycket. I dörrskyltsuppgiften däremot fanns det inte några motsvarande kriterier och eleverna fick välja uttryck fritt.

Att avgränsa en uppgift till ett uttryck för en specifik kultur innebär att elevens föreställningar om denna kultur utmanas. Eleven tvingas att göra en tolkning och att motivera sin tolkning. I vår studie valde vi ett uttryck för en etnisk kultur. Andra exempel på uttryck kan vara ett känt formspråk såsom Malmsten eller Marimekko. Det handlar inte om att något ska kopieras rakt av, som i så kallad mallslöjd, utan det handlar snarare om att eleven tvingas förhålla sig till detta uttryck. Om en elev till exempel väljer akrylplast (ett icke typiskt samiskt material) och därutöver använder sig av andra uttrycksmedel (typiska färger, former, symboler/mönster, bearbetning) som tillsammans skapar ett samiskt uttryck, kan detta bedömas som att eleven kan tillverka ett föremål med ett samiskt uttryck. Detta kunnande förstärks om eleven har motiverat sina val till exempel genom ett etiskt ställningstagande (*jag valde bort horn för jag ville inte använda ett animaliskt material*) eller genom ett medvetet traditions- eller stilbrott (*i en urban värld känns plast mer relevant än horn*). Detta resonemang kan jämföras med elev C:s resultat på förtestet i cykel tre där eleven oreflekterat valt material, former, färger, hantverkstekniker och symboler/mönster i relation till ett samiskt uttryck.

Vi har i denna studie gjort ett försök att knyta undervisningen till en teori om lärande, variationsteorin:

Om lärande bygger på vår möjlighet att urskilja något, så gäller det att försöka synliggöra detta så tydligt som möjligt/.../Ett sätt att hantera detta är med variationsmönstret kontrast. Detta innebär att man visar vad något är genom att samtidigt visa på vad det inte är. (Maunula, Magnusson & Echevarría, 2011, s. 40–41)

Vi har prövat variationsmönstren kontrastering och generalisering under forskningslektionen i cykel tre. Det vi då gjorde var att bland annat visa på typiska och icke typiska material (horn respektive akrylplast), färger (rosa-beige respektive gult-rött-blått-grönt), former (runda respektive kantiga) och föremål (industriell plastkåsa respektive samisk kåsa i björkvril och renhorn). Elevernas resultat på eftertestet i cykel tre visar på en tydlig förbättring när det gäller att välja lämpliga material och färger. Däremot var det färre elever som hade förbättrat sitt resultat när det gäller det hantverkstekniska/bearbetning samt användning av symboler och mönster. Resultatet kan bero på att vi under forskningslektionen i cykel tre fokuserade på variation när det gäller just typiska och icke typiska material, färger och former. Vi fokuserade i mindre grad på att visa variation av bearbetning samt variation av symboler och mönster. Vårt sätt att variera innehållet kan vara en bidragande orsak till att eleverna förbättrade sitt resultat på eftertestet, men detta är inget vi kan säga med säkerhet.

En didaktisk aspekt som aktualiserats i studien är tidsåtgången för en slöjduppgift. En vanlig uppfattning bland slöjdlärare är att en slöjduppgift kräver mer tid om eleverna ska kunna visa på högre kunskapskvaliteter. Som regel sträcker sig slöjduppgifter över ett antal veckor, ofta upp till en termin (Skolverket, 2005). I vår tredje lektionscykel visade det sig dock att det är möjligt för eleverna att tillverka ett mindre slöjdföremål som stämmer väl överens med uppgiftens syfte och där eleverna dessutom kan visa på högre kunskapskvaliteter i slöjdarbetet. Det kan vara av intresse att utveckla denna typ av korta uppgifter för att till exempel kartlägga elevers kunskande i slöjd och därigenom utgöra ett komplement till längre slöjduppgifter.

Vi vill med denna artikel bidra till en diskussion om hur man kan tänka kring och designa slöjduppgifter som syftar till att utveckla kunskande om symboliska uttryck. Det vanliga är annars att slöjduppgifter syftar till att eleverna ska tillverka ett visst föremål och/eller lära sig en viss hantverksteknik (Skolverket, 2005). Denna studie visar på att en uppgift som syftar till att tolka/tillverka ett uttryck innehåller både ett hantverkskunnande och ett estetiskt kunnande. De kritiska aspekter som identifierats under respektive cykel kan utgöra ett underlag för vidare diskussion om vad det är man kan när man kan slöjda, i detta fall vad det innebär att kunna tillverka symboliska uttryck i slöjdföremål. Genom att lyfta fram en variation av ett uttryck/formbild i ett slöjdföremål som innefattar formalestetiska uttrycksmedel, kan kunnandet i att tillverka estetiska och kulturella uttryck utvecklas. I annat fall riskerar elevernas kunskande att stanna vid en subjektiv och ytlig förståelse av estetiska och kulturella uttryck, som att ett slöjdföremål är att betrakta som 'fint' eller 'fult'.

Referenser

- Borg, K. (2007). Processes or/and products. What do teachers assess? *Design and Technology Education: An International Journal*. 12.2.
- Borg, K. (1995). *Slöjdämnet i förändring 1962–1994*. LiU-PEK-R-191. Linköping: Linköpings Universitet, Institutionen för pedagogik och psykologi.

Broman, Frohagen, Wemmenhag

- Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), s. 141–178.
- Carlgren, I. (2012). The Learning Study as an approach for 'clinical' subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies* 1(2), s. 1–18.
- Dormer, P. (1994). *The art of the maker*. London: Thames and Hudson Ltd.
- Fransson, J. (2010). *Slöjdens estetiska och kulturella uttrycksformer – Några lärares resonemang kring ett av slöjdens kunskapsområden, i Lgr11*. Examensarbete inom lärarutbildningen vid Göteborgs Universitet. Tillgänglig på Internet: https://gu-pea.ub.gu.se/bitstream/2077/25925/1/gupea_2077_25925_1.pdf.
- Gulliksen, M. (2006). *Constructing a formbild – an inquiry into the dynamical and hierarchical aspects of the hermeneutical filters controlling the formbild construction in design education situations* (Vol. 34). Oslo School of Architecture.
- Hasselskog, P. (2008). Här är det slöjdprocessen som räknas. I: Lindberg, Viveca & Borg, Kajsa (red.) *Kunskapande, kommunikation och bedömning i gestaltande utbildning*. Stockholm: Stockholms universitets förlag, s. 31–46.
- Hasselskog, P. (2010). *Slöjdlärares förhållningssätt i undervisningen* (Göteborg Studies in Educational Sciences, 289). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Homlong, S. (2011). Samtal om estetiska aspekter i textilslöjden. *Techne serien vol 18:1 Vetenskapliga perspektiv och metoder inom slöjdfältet*. Tillgänglig på Internet: <http://journals.hioa.no/index.php/techneA/article/view/41/162>.
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia, PA: Research for Better School Inc.
- Lo, M.L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. (Göteborg Studies in Educational Sciences, 323). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lo, M.L. & Marton, F. (2007). Learning from the learning study. *Journal of Research in Teacher Education*, 1, s. 33–41.
- Lo, M.L. & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching: Using Variation Theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, 1(1), s. 7–22.
- Maunula, T., Magnusson, J. & Echevarría, C. (red.). (2011). *Learning Study – undervisning gör skillnad*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Marton, F. (1981). Phenomenography – describing conceptions of the world around us. *Instructional Science* vol. 10, s. 177–200.
- Marton, F. (2005). Om praxisnära forskning. I: Vetenskapsrådet. *Forskning av denna världen II – om teorins roll i praxisnära forskning*. Vetenskapsrådets rapportserie, 4:2005. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On Some Necessary Conditions of Learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 15(2), s. 193–220.
- Mäkelä, E. (2011). *Slöjd som berättelse – om skolgång och estetiska perspektiv*. (Doktorsavhandling i pedagogiskt arbete, 41). Umeå: Print & Media, Umeå Uni-

versitet.

- Nielsen, L.M. (2008). Art, Design and Environmental Participation. Themes in Norwegian Studies 1995–2007. I: Lindström, Lars (red.) (2008). *Nordic visual arts education in transition: a research review*, s. 127–145. Stockholm: Vetenskapsrådet. Tillgänglig på internet: http://www.cm.se/webbshop_vr/pdf/14_2008.pdf.
- Runesson, U. (2008). Learning to design for learning. I: Sullivan och Wood (red.). *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*, s. 153–172. Rotterdam: Sense Publishers.
- Skolverket (2000). *Kursplaner och betygskriterier 2000. Grundskolan*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2005). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Ämnesrapport slöjd*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2009). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lp094*. Tillgänglig på internet: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=1069>.
- Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i slöjd*. Stockholm: Fritzes.
- Skolöverstyrelsen. (1969). *Läroplan för grundskolan. Allmän del*. Stockholm: Utbildningsförlaget, Liber AB.
- Skolöverstyrelsen. (1980). *Läroplan för grundskolan. Allmän del*. Stockholm: Utbildningsförlaget, Liber.

Att introducera likhetstecken i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1

M Adolfsson Boman, I Eriksson, M Hverven, A Jansson & T Tambour

Artikeln bygger på data från forsknings- och utvecklingsprojektet (FoU) "Utveckling av matematiskt tänkande – expanderande uppgifter i nybörjarundervisningen" där lärare från Skärsätra skola tillsammans med forskare från Stockholms universitet genomförde ett undervisningsexperiment i syfte att introducera algebra i nybörjarundervisningen.

FOU-PROJEKTET HADE SIN UPPRINNELSE i ett tidigare matematikutvecklingsprojekt som genomfördes av en grupp lärare på skolan tillsammans med en av forskarna¹ hösten 2010. I samband med detta utvecklingsprojekt uppstod flera diskussioner om den matematik som eleverna introduceras i under skolans första år. Lärarna beskrev att nybörjarundervisningen i de flesta läromedel bygger på att eleverna introduceras till matematik via konkreta och laborativa uppgifter i huvudsak inom talområdet 1–20².

Med en grov klassificering kan matematikundervisningen delas in i en aritmetisk och en algebraisk tradition (van Oers, 2001). I en aritmetisk betonas elevers bemästrande av taluppfattning och matematiska (korrekta) uträkningar. Det finns inom denna tradition en tanke om att eleverna under de första skolåren via konkreta och laborativa aritmetiska uppgifter förankrade i deras vardag kan utveckla en pre-algebraisk förståelse (Schmittau, 2004, 2005; Schmittau & Morris, 2004). I kontrast till den aritmetiskt grundade nybörjarundervisningen som dominerar den svenska matematikundervisningen diskuterade vi några av de idéer som legat till grund för den algebraiskt grundade matematikundervisning som bland andra Vasilii Davydov (2008) tillsammans med lärarna sedan 1960-talet utvecklat vid skola Nr. 91³ i Moskva.

1. Projektet som genomfördes hösten 2010 leddes på skolan av klasslärare Marianne Adolfsson Boman och som handledare fungerade Inger Eriksson från Stockholms universitet.

2. På skolan arbetade lärarna med läromedlet Mästerkatten.

3. Skola Nr. 91 har ända sedan 1960-talet fungerat som en försöks- och forskningsskola där man bland annat har arbetat med att utveckla undervisningen med utgångspunkt i Vygotskij-traditionen.

Inspirerade av dessa diskussioner och erfarenheterna från det egna utvecklingsarbetet uttryckte lärarna och rektor ett intresse för att förändra nybörjarundervisningen i matematik. Hösten 2012 startade därför ett FoU-projekt för att pröva utformningen av en nybörjarundervisning som skulle ge eleverna möjlighet att utforska innebörden i symboler och matematiska principer innan de börjar arbeta med siffror.

Två övergripande frågor för projektet formulerades:

1. Vilka typer av uppgifter kan, utifrån de centrala idéerna i Davydovs matematiska program, utformas och användas för att introducera elever i årskurs 1 till ett algebraiskt (pre-numeriskt) tänkande?
2. Vad kan ses som tecken på ett framväxande algebraiskt tänkande?

Med utgångspunkt i dessa två forskningsfrågor är syftet för den här artikeln att dels beskriva de uppgifter som utformades och prövades under hösten 2012 och dels att visa på några exempel på indikationer på en framväxande förmåga att föra algebraiska resonemang.

Projektets förutsättningar och genomförande

Skärsåtra skola är en F-5 skola med 325 elever, 17 lärare (10 klasslärare, 1 idrottslärare, 1 musiklektör, 2 slöjdlärare och 1 bildlärare) och två specialpedagoger. Totalt sju av skolans tio klasslärare och de två specialpedagogerna medverkade i projektet under hösten 2012. Skolans rektor har också medverkat om än i begränsad omfattning⁴. Marianne Adolfsson Boman var huvudansvarig lärare på skolan och undervisningsexperimentet genomfördes i hennes årskurs 1 (28 elever).

Planeringsarbetet påbörjades redan under slutet av vårterminen 2012 då lärarna dels läste matematikdidaktiska texter⁵, dels genomförde en preliminär planering. Den preliminära planen diskuterades först via mail och senare vid två inledande planeringsmöten i augusti. Flera uppslag kring hur de första introducerande lektionerna skulle utformas diskuterades. De flesta av frågorna som forskningsgruppen⁶ diskuterade handlade om hur en nybörjarundervisning som inte börjar med till exempel vardagsnära additionsuppgifter inom talområdet 1-10 kan utformas. De teoretiska

4. För att alla lärare som var intresserade av projektet också skulle ha möjlighet att delta, hade rektor avsatt planeringstid i tjänst motsvarande 2 timmar varannan vecka.

5. Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Nämnaren Tema. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet, Kinard, J. T. Sr. & Kozulin, A. (2010). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande*. Lund: Studentlitteratur, Kronqvist, K-Å. & Malmer, G. (1993). *Räkna med barn*. Falköping: Ekelunds förlag AB, Neuman, D. (1993). *Räknefärdighetens rötter*. Vällingby: CE Fritzes AB och Skolverket.

6. Forskningsgruppen bestod av de sju lärarna och tre personer från Stockholms universitet. Marianne Adolfsson Boman var lärare i försöksklassen och samtidigt projektets lokala ledare. Projektledare var Inger Eriksson, didaktiker från Stockholms universitet. Mona Hverven, matematikdidaktiker, deltog vid projektstart och vid planeringen av de första uppgifterna som prövades i undervisningen. Anders Jansson, didaktiker, medverkade vid intervjuer av eleverna och i analysarbetet i projektets slutfas. Torbjörn Tambour, matematiker medverkade vid analysen av elevernas lösningar i de filmade intervjuerna.

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

principer som Davydovs matematiska program bygger på och som skulle guida planeringsarbetet och försöksverksamheten diskuterades återkommande.

Under hösten hölls sammantaget fem möten i FoU-gruppen där i princip samtliga lärare som medverkade i projektet deltog. Vid de två första planeringsmötena utformades i grova drag de tre nyckeluppgifter eleverna skulle möta under terminen (presenteras nedan). Dessa uppgifter utgjorde stommen för undervisningsexperimentet. Under de tre återstående planeringsmötena rapporterade Marianne om hur nyckeluppgifterna fungerade och hur de kunde vidareutvecklas. Gruppen gjorde inte upp några detaljerade lektionsplaneringar utan främst handlade diskussionerna om vilken typ av situationer vi ville skapa för eleverna. Marianne hade sedan detta som grund för hur varje enskild lektion utformades.

Underlag för artikeln utgörs av de fem bandade planeringsmötena, uppföljnings-samtal tillsammans med Marianne och de videofilmade gruppintervjuerna med 16 av eleverna samt exempel på elevernas lösningar.

Davydovs matematiska program

Davydovs matematiska program beskrivs i litteraturen vanligen i relation till den undervisningstradition som kallas *Developmental teaching* (DT) (Davydov, 2008; Schmittau, 2005). Benämningen, som på svenska kan översättas med utvecklande undervisning, betonar att målet för undervisning i första hand är elevers utveckling. En grundtanke är att lärande är en motor för utveckling.

The child learns to perform an operation of some kind. At the same time he masters a structural principle whose sphere of applications is wider than that of the operation in which this principle was mastered. Consequently by taking one step in learning the child moves two steps in development, i.e. learning and development are not coincident. (Vygotskij, 1963: 26–27)

Andra betydelsefulla antaganden som ligger till grund för DT handlar om vad som ses som nödvändiga förutsättningar för lärande. Centralt är att allt lärande på ett eller annat sätt måste förstås i relation till vilka verksamheter eleverna ges tillträde till och vilka redskap han eller hon får tillgång till (Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2010). Att bli kunnig kan således beskrivas som att bli förtrogen med en specifik verksamhet och dess redskap, regler och rutiner. Matematik ingår som redskap i många skilda verksamheter men i skolan utgör matematik en specifik verksamhet (Kinard & Kozulin, 2010). Vygotskij betonar att elever inte utvecklar förståelse för vetenskapliga begrepp på samma sätt som det tillägnar sig vardagliga begrepp (Schmittau, 2004, 2005; Zuckerman, 2005). Innebörden i vardagliga begrepp utvecklas enligt Vygotskij genom deltagande i olika vardagliga sammanhang där begreppen används, medan innebörden i vetenskapliga begrepp inte är lika enkelt tillgängligt om inte eleverna får tillgång till specifika teoretiska verksamheter (Vygotskij, 1963). Detta förutsätter att eleverna får möta uppgifter eller problem som de endast kan lösa genom att använda de vetenskapliga begreppen och symbolerna som redskap. Om eleverna får delta i teoretiska verksamheter kan teoretiska innebörder göras tillgängliga för dem.

Med en sådan utgångspunkt är det möjligt att introducera elever till algebra redan i årskurs 1 (eller tidigare). Det kan till exempel handla om att skapa uppgifter som är så utformade att eleverna upplever ett behov av att använda (bemästra) algebraiska begrepp och symboler som, till exempel a , b , $>$, $<$, $=$ (Davydov, 2008; Schmittau, 2005). Eleverna inbjuds till exempel från början till ett utforskande av vad likhet innebär, vad som kan representera likhet och hur likheter kan åstadkommas (Davydov, 2008).

Davydovs argument är att inom en aritmetisk tradition ges eleverna endast tillgång till empirisk abstraktion, vilket innebär att eleverna genom undersökningar och jämförelser erfar ett fenomen eller ett objekts yttre (synbara/påtagliga) aspekter. Genom att arbeta med empirisk abstraktion (som till exempel i en aritmetisk tradition) fortsätter undervisningen utveckla samma typ av konkreta tänkande, kopplat till vardagsbegrepp, som barnen börjat utveckla i lek och andra aktiviteter. Teoretisk abstraktion innebär däremot en strukturell jämförelse som bottnar i en analys av begreppets innehållsliga uppbyggnad och funktion både historiskt och kulturellt.

[T]he notion of "roundness" can be empirically abstracted from a dish, a wheel, and so forth. However, this empirical notion of circularity does not reveal the real objective content, which is the locus of points at a constant distance from a fixed point. (Sriraman, 2008:95)

I stället för att laborera med aritmetiska uppgifter med syfte att utveckla ett pre-algebraisk tänkande behöver eleverna utveckla ett pre-numeriskt tänkande av algebraisk karaktär (Schmittau & Morris, 2004).

Davydovs matematiska program är inte enbart en fråga om abstrakt eller konkret utan även kopplat till den vygotskianska idén om Learning Activity – lärandeverksamhet (Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2010). I en lärandeverksamhet kan eleverna potentiellt utveckla ett behov och ett motiv för lärande och därmed ett engagerat deltagande i till exempel en matematisk problemlösande aktivitet. Detta betyder dock inte att all undervisning kan beskrivas i termer av lärandeverksamhet. I en lärandeverksamhet sker inte enbart ett återskapande av kunskaper och förmågor som utvecklats i samhället över tid utan eleverna återskapar även

"historically formed capacities (reflection, analysis, and thought experiment) that are the basis of theoretical consciousness and thinking". (Davydov, 2008: 117)⁷

Detta innebär att det lärande som sker genom deltagande i en lärandeverksamhet bidrar till elevernas kognitiva utveckling och i och med det även deras personlighetsutveckling. För att möjliggöra för att eleverna i undervisningen ska kunna gå in i en lärandeverksamhet krävs att de uppgifter eleverna arbetar med utformas på ett

7. Learning Activity som har sina rötter i Vygotskij-traditionen har olika uttolkningar. I Davydovs uttolkning betonas vikten av elevernas teoretiska utveckling relaterat till samhälleligt utvecklade kunskaper. I andra uttolkningar betonas att man inte kan målsätta elevernas lärande med utgångspunkt i av samhället redan utvecklade kunskaper utan att man istället måste vara öppen för och värdesätta också oväntade mål som uppstår i relation till elevernas behov och motiv (se till exempel Matusov, 2009).

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

sådant sätt att de möjliggör ett reellt utforskande. Det är dock inte vilket utforskande arbete som helst utan varje uppgift ska vara utformad så att eleverna måste använda nya ännu utforskade teoretiska begrepp, modeller och symboler för att de ska kunna ge olika förslag till lösningar på problemet. Lösningar som sedan kan prövas och utvecklas (Kinard & Kozulin, 2010).

Tre nyckeluppgifter – tärningar, guldsand, dyrbara oljor och $A=B+C$

Att utforma uppgifterna för de första introducerande lektionerna var det som var svårast. Det var i relation till planeringen av dessa uppgifter som de teoretiska utgångspunkterna diskuterades mest intensivt. Gruppen hade från början beslutat att starta med uppgifter kring mätning av till exempel längd eller volym så som både Davydov (2008) och Schmittau (2005) har beskrivit. Exempel på sådana uppgifter försätter eleverna i en situation där de till exempel får observera längderna A och B där $A > B$. I arbetet får eleverna därefter utforska skillnaden mellan A och B för att komma fram till skillnaden C. I det algebraiska arbetet får eleverna sedan pröva att symbolisera detta med ekvationerna $A = B+C$ eller $B=A-C$ eller $C=A-B$ (Schmittau, 2005).

Denna typ av uppgift var forskargruppen enig om skulle ingå i undervisningsexperimentet men frågan som uppstod handlade om hur de allra första lektionerna skulle utformas. Under ett av de tidigaste planeringsmötena berättade Mona Hverven om hur hon i sin undervisning velat introducera likhetstecknet ($=$) via symbolerna ”större än” ($>$) och ”mindre än” ($<$) och då låtit eleverna arbeta med tärningar.

Ackie: Marianne, tänkte du att man skulle börja då med större än och mindre än?

Marianne: Så som vi lite grann resonerade sist vi träffades, och då sa Mona, att absolut inte lyfta det här likhetstecknet, utan se vad som händer, för att ... erfarenheten är ju att det alltid är någon som säger 'Ja men, dom där är ju helt lika', 'Ja men, vilket tecken ska vi ha då?'

Mona: Så, det var inte 'absolut' men det här att faktiskt våga vänta in eleverna, för dom kan så himla mycket. Och ofta är man ju snabb och det kan vara liksom, vänta in och se.

Ackie: Nu fattar jag inte riktigt, vad är det man är för snabb på?

Mona: Ja till exempel likhetstecknet så talar man om att det ska vara lika på båda sidor och så är det klart. Alltså, nu drar jag det så ... Medan, om man kan jämföra det med tecken som 'inte är lika med' (\neq) och sen låta dom upptäcka, 'Jamen, vad ska vi nu använda för symbol när det är lika?' 'Hur ser det tecknet ut?'/.../. (Planeringsmöte den 27 augusti 2012)

Sammanfattningsvis organiserades undervisningsexperimentet kring tre olika större uppgifter, så kallade nyckeluppgifter (Eriksson & Lindberg, 2007; Lindberg, 2010). Uppgifter som utformas utifrån några centrala principer och som sedan kan utvecklas vidare utifrån de diskussioner och behov som uppstår i elevgruppen. Den första uppgiften – tärningsuppgiften – hade som syfte att skapa ett behov av ett tecken för att uttrycka likhet. Den andra uppgiften inspirerad av Landet Längesen (Neuman, 1986, 1993) syftade till att eleverna skulle pröva att lösa matematiska problem i en situation där det så att säga ännu inte finns någon matematik. Den tredje uppgiften, som utformades utifrån Davydovs matematiska program, syftade till att introducera eleverna till teoretisk abstraktion där de skulle kunna pröva likheter i algebraisk mening.

Två lika – vilket tecken kan beteckna likhet?

I den första nyckeluppgiften som slutligen utformades introducerade läraren symbolen < i samband med övningar där eleverna skulle slå slag med en tärning och använda symbolen.

Marianne: Då presenterade jag, precis som Mona föreslog, jag presenterade mindre än tecknet. Och jag presenterade det som hon föreslog. Att man fyller tecknet med små bollar, så det var ingenting som gapade åt nåt håll utan det var en symbol som såg ut så här. Och 'Här i början är det mindre [färre antal] bollar än där' [pekar på <]. 'Det är mindre än'. Så där höll jag på och med uttrycket. Och sedan visade jag att vi skulle slå tärningar och då hade jag gått igenom tärningen att det fanns en etta och en tvåa och en tre och en fyra, en femma och en sexa. Och jag hade ritat två tärningar på tavlan. Och då tog jag fram någon elev som fick kasta tärningen till mej. Och så fick ju ungen kasta två gånger innan jag markerade. För jag ville ju att det skulle bli mindre än, så klart [småskrattar]. Så att barnet kastade två gånger och då blev det en etta och en trea. Och då ritade jag ettan först och så trean. Och så höll vi på så. Om dom hade kastat trean först så skrev jag ju inte det för då hade det varit "större än" och jag ville ju inte att det var jag som skulle presentera det utan jag ville att de skulle upptäcka ett behov av det. Så det enda de fick var förståelsen för, i alla fall en presentation av, tecknet 'mindre än-tecknet' och sen fick dom börja. (Uppföljningssamtal 28 januari 2013)

Tanken med uppgiftens utformning var att förr eller senare skulle någon av eleverna slå två lika och då kunde en diskussion om vilken symbol de kunde använda uppstå.

Inger: Och då jobbade dom två och två?

Marianne: Två och två. Och dom kastade och var jättenöjda och till slut var det nån som sa att det blev två som var lika. Och då sa jag 'Stopp alla barn!' 'Nu är det nån som har fått två ettor här ... är det nån ... kan vi ha det här tecknet då, mindre än?'. 'Är ett mindre än ett?' 'Nej, det var det ju inte!' 'Men, vad ska vi ha för tecken då?' 'Känner ni till nåt tecken som man skulle kunna använda?' Och ingen kunde det. 'Nähä, man vad gör vi då?' 'Då slår vi om.' (Uppföljningssamtal 28 januari 2013)

Alla i forskargruppen var övertygade om att eleverna rimligen känner till likhetstecknet både från förskoleklass och från andra sammanhang. Motivet till uppgiften var att gruppen ville att eleverna själva skulle komma på att man kunde använda likhetstecknet för att beteckna två lika. När eleverna efter introduktionen arbetade två och två med uppgiften och slog lika var det dock inte likhetstecknet som var deras lösning.

Marianne: ... då blev samtalet om jo, men nu blev det ju fem på den ena och fem på den andra. Har vi nåt annat tecken för det. Och dom tänkte ju som fasen. Det var ingen som kom med likhetstecknet. Men då var det nån som sa: 'Jo, men då sätter man ihop dom'. Alltså ritar en sån figur [< >]

Inger: Alltså, de satte ihop en 'större än' med en 'mindre än'.

Marianne: Ja, alltså de satte ihop ett 'mindre än' och så vände de den. Fast 'större än' kan de inte uttrycka. Men, de tänkte, alltså om man ritar den figuren [<>] så kanske det betyder att det är lika på varje sida. För att det är ju egentligen lika. För det ser ut så där.

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

En annan lärare: Det kunde ju vart ett sånt tecken
 Flera i gruppen: Ja!
 Marianne: Ja! Och då säger jag: 'Men gud så fiffigt'. 'Det kunde ha vart ett sånt tecken.', sa jag. 'Men lika med, det finns faktiskt ett sånt tecken och det ser inte riktigt ut så där'. 'Men är det nån som vet'. Men det var det ingen som visste. (Planeringsmöte den 10 september 2012)

I den första gruppen (14 av 28 elever) var det ingen som hade ett tecken för likhet. I den andra gruppen däremot var det två pojkar som föreslog att man kunde använda ett likhetstecken.

Och så var det nästa grupp, och då var det två barn som kände till att 'där emellan ska det vara ett likhetstecken' – 'är lika med-tecken'. 'Hur ser det ut?' sa jag och då gick barnet fram och ritade det på tavlan. Och då frågade jag [klassen] 'Är det nån som känner igen det?' och ja det var väl nån då som med viss tvekan. /.../ Och i och med att de här två barnen sen fick presentera det [tecknet] så var det ingen tvekan om ... för resten av klassen. /.../ För jag sa 'Kommer ni ihåg när ni slog det här och ni inte kom på nåt tecken?' 'Nu är det två som kan det här tecknet, som har ett tecken som ser ut så här.' Och då var det flera som kände igen det där tecknet. Men dom ägde det liksom inte. (Uppföljningssamtal den 29 januari 2013)

Uppgiften med tärningarna utvecklades vidare för att låta eleverna utforska symbolerna större och mindre än och likhetstecknet. Bland annat utvecklades uppgiften så att eleverna skulle uppleva ett behov av symbolen för "större än". I de följande uppgifterna fick eleverna också möjlighet att använda symbolerna för addition och subtraktion eftersom en av eleverna hade lyft att man kan använda "plustecknet" när man slår två slag.

Vid den första uppgiften, när eleverna slog med tärningar, kunde de lösa uppgiften med hjälp av tecknet för 'mindre än'. Genom att först slå två slag kunde de bestämma vilket slag (vilket tal) som skulle skrivas i vilken "tärningsruta" för att sedan placera tecknet för 'mindre än' emellan så att det blev "rätt". När de båda slagen blev lika var elevernas första förslag att man slår om. Då kunde man se till att uppgiften blev rätt löst. När läraren inte godkände att man skulle slå om utan istället frågade om de kände till något annat tecken uppstod en situation där eleverna inbjöds till att försöka lösa problemet. Eleverna gav uttryck för att de ville ha ett tecken som visade att det var lika. I båda grupperna kom förslaget att man kunde skriva 'mindre än' och sedan vända på det tecknet för att visa att det var lika på båda sidor. Det intressanta är att eleverna återupptäcker betydelsen av likhetstecknet utan att ha den konventionella yttre formen för hur man kan teckna likheter. Ställda inför problemet att det behövdes en annan symbol för att kunna uttrycka likhet använde eleverna den symbol de hade blivit presenterade och skapade en ny symbol som de uppfattade uttryckte likhet.

Lika eller olika – hur kan man bestämma om det är rättvist eller inte?

För utformningen av den andra nyckeluppgiften hämtade gruppen inspiration från Dagmar Neumans arbete: *Landet Längesen – matematik för 2000-talet*. Syftet i Neumans arbete är att introducera eleverna till ett aritmetiskt tänkande (1993). I *Landet*

Längesen finns ingen matematik och inga siffror. Kungen ställs upprepade gånger inför ett problem med att till exempel kunna fördela guldsand eller fina oljor till sina tjänare så att de vet att de har fått lika mycket. I relation till dessa problem måste eleverna utforska om guldsanden i två mycket olika bägare är lika mycket eller om någon av tjänarna har fått mera än den andra. Neumans arbete, men också Davydovs arbete, betonade vikten av att utforma uppgifter som skapar förutsättningar för att eleverna, så att säga, ska kunna återupptäcka principer och strukturer. I uppgiften som vi lånade från Neumans arbete handlade det om att försätta eleverna i en historiskt tänkbar verksamhet. Marianne beskriver hur Neumans idéer användes i undervisningen på följande sätt:

Marianne: Hur kan det vara att leva i ett land som inte har matematik? Den frågan var svår att förstå för eleverna. Jag fick då samtala om konkreta händelser. Hur gör man om man vill handla något? Hur får man lön för sitt arbete? Under samtalet uttryckte eleverna att 'det skulle vara svårt'. Med det här samtalet ville jag att eleverna skulle reflektera över matematiken och nyttan av den.

'Första problemet uppstod när två tjänare som utfört ett arbete till kungen fått lön i form av guldsand i olika typer av flaskor. Tjänarna tyckte att de blivit orättvist behandlade'.

En av flickorna vände sig till mig och sa 'det förstår jag!'

Elevernas uppdrag blev då att diskutera hur de skulle kontrollera om kungens skattmästare varit orättvis. Eleverna kom med olika förslag på hur de skulle tömma flaskorna och mäta med något redskap. 'Men de kan ju inte räkna i Landet längesen' sa jag. Gruppen befann sig i fritids kök och på diskbänken stod det en liten mugg. 'Vi kan använda den föreslog någon'. I köks-skåpet som stod på glänt fanns flera likadana muggar. 'Hur gör vi nu undrade jag?' 'Vi fyller muggarna med guldsanden föreslog eleverna'. Sen ville eleverna räkna muggarna. 'Men det går inte' sa jag 'Det finns inga siffror i Landet längesen'. Då föreslog en av eleverna att vi kunde jämföra en mugg mot en annan. Jag ritade flaskorna och muggarna på tavlan och frågade om vi kunde sätta ett matematiskt tecken mellan flaskorna och muggarna. I detta exempel var eleverna helt överens om att det skulle vara likhetstecknet. (Mariannes dokumentation, 30 januari 2013)

Marianne och eleverna återvände till Landet Längesen två lektionspass till. Vid det andra tillfället hade tjänarna också fått lön i form av guldsand.

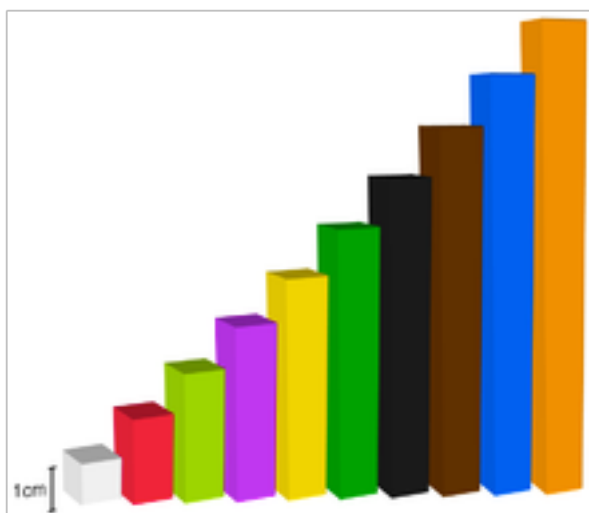
Algebraiska uttryck – hur kan man göra likheter och hur kan man benämna dem?

Senare under höstterminen introduceras algebraiska bokstavsuttryck med hjälp av cuisinairestavar, detta utgjorde den tredje nyckeluppgiften. Grunden för planeringen utgjordes av de uppgifter med sträckor som ingår i Davydovs matematiska program. I inledningen av planeringsarbete hade Mona Hverven skickat en länk till en film från 1961 där sexåringar arbetade med vad lärarna uppfattade som avancerade matematiska uppgifter med hjälp av cuisinairestavar⁸. De båda specialpedagogerna var också

8. <http://www.youtube.com/watch?v=aeoMcT5WYa8> (hämtat den 13 augusti 2012)

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

mycket entusiastiska över den potential som ligger i detta material, också rektorn hade positiva erfarenheter av cuisinairestavar⁹. Mot den bakgrunden bestämde sig forskargruppen för att när det var dags att börja arbeta med algebraiska uttryck för att vidare utforska innebörden av likheter och likhetstecknet så kunde detta ske med hjälp av cuisinairestavar. Marianne säger att eleverna fick cuisinairestavarna som ett jämförelsematerial utan att tillskriva de olika stavarna egenskaper i termer av antal.



Figur 1. Cuisinairestavar <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cuisenaire-Rods-2.png> (hämtat 2.2 2013)

Marianne: Eleverna fick bekanta sig med stavarna och bygga trappor och olika typer av mattor.

./.../ ... i alla fall så vet jag att Mona hade en idé där för att det inte ska bli så skollikt presenterat så tror jag att ... Jag började med att de skulle ta en cuisinairestav. 'Ta inte för kort', sa jag kanske. 'Den behöver inte vara pytteliten' och 'sen ska ni försöka hitta två andra så att dom blir lika långa'. 'Så att det blir lika mellan dom här'. 'Den och dom två andra' [håller upp tänkta stavar]. Och sen fick dom lägga många sådana representationer och då så sa jag 'Men vad ska vi kalla dom, vad kan man ge dom för namn?'. Jag undrar om det var den vägen? Eller om jag presenterade $A=B+C$? ... Så! tror jag att jag gjorde. Så när dom hade gjort dom här jämförelserna så skrev jag $A=B+C$. Och då sa jag 'om vi skulle ge det ni har lagt framför er namn, vad är det då som är A?'. ./.../ Och sen gick jag runt med kameran och bad dom presentera sina ... 'Vilken är A utav dina?' 'Det där är A och det där är B och det där är C'. Och så fick dom läsa in i kameran sina uttryck. Jag tror det var så jag började. ./.../ Och då sa jag 'Måste man kalla dom ...'. Ja just det, det här med bokstäver A och B och C varför skulle vi döpa dom till det. Ja det var ju alfabetet och dom kom i tur och ordning. Det står också i den där [hänvisar till en skrift] att barn gärna vill att det ska vara ... 'Men kan man bara, kan man inte ta vad som helst?' Hur

9. Cuisinairestavar beskrivs som "ett relationsmateriel, baserat på de specifika attributen färg och längd. Enheten är 1 x 1 cm. Det består av stavar i tio olika längder och färger där varje längd har sin specifika färg. Detta materiel har i decennier använts runt om i världen för att illustrera grundläggande matematiska begrepp. Stavarna är inte graderade och de kan därför representera tal av diverse slag. De kan bl a användas för att illustrera och träna principerna för de fyra räknesätten, principerna för mätning av olika slag samt bråk. Den minsta [kortaste] staven är 1 cm lång och den största [längsta] är 10 cm lång." Informationen är hämtad från <http://www.sli.se> 8.4. 2013.

vi nu förde dom här resonemangen. Och så döpte vi om dom, gärna deras eget förnamn. Så Wilfred, han ville ju ha W ... [småskratt] Och så läste dom uttrycken och så försökte jag spela in hur dom läste uttrycken. (uppföljningssamtal 28 januari 2013)

Elevintervjuer

Självfallet är det svårt att ge en tydlig bild av hur elevernas framväxande förmåga att bemästra likhetstecknet i en algebraisk mening utvecklats under pilotprojektet. De exempel vi presenterar i det följande är hämtade från de videobandade intervjuer som gjordes med 16 av de 28 eleverna i Mariannes klass. Intervjuerna genomfördes den 27 november 2012 efter ca tre månaders undervisning (omfattande ca 2 lektionspass á 30 minuter i veckan). Intervjuerna genomfördes i grupper om fyra elever. Tillgängligt för eleverna fanns olika material: små runda brickor, plastade kort med olika tecken på ($>$, $<$, $+$, $-$, tärningssymboler 1–6, och sifferkort 0–9 och cuisinairestavar). Vid en första analys av intervjuerna kan vi se att eleverna uppvisade en stor säkerhet i att hantera symbolen för likhet medvetet och entydigt. Ingen av de intervjuade eleverna talar om likhetstecknet i termer av att något blir. Flertalet av eleverna i klassen uppvisade också en förmåga att hantera likhetstecknet i samband med olika algebraiska uttryck.

En av frågorna i intervjun utgick från ett kort som presenterade uttrycket $A=B+C$. I anslutning till uttrycket ställdes följande typ av frågor: ”Jag har en annan konstig sak som jag inte riktigt vet hur jag ska förstå och den ser ut så här.” ”Kan man skriva så här?” Genom att analysera hur eleverna tar sig an frågan kan vi urskilja några kvalitativa aspekter av elevernas agerande och resonemang som kan ses som indikationer på en framväxande algebraisk resonemangsförmåga.

Att representera $A=B+C$ med cuisinairestavar

Genast när eleverna i de fyra grupperna får se kortet med uttrycket $A=B+C$ svarar de övertygat att man visst kan skriva sådana uttryck.

Fia: Jaaa [med emfas] det där är ... men då måste vi visa med dom här [lutar sig fram och klappar på påsen med cuisinairestavar som ligger på bordet].

[Inger håller ut stavarna på bordet och de fyra eleverna i gruppen börjar ta stavar och lägga framför sig på bordet. En av eleverna, Fia, håller en stav i handen och talar samtidigt för sig själv 'En orange är lika med' ...]

Fias yttrande indikerar redan i valet av stavarna att frågan handlar om representera uttrycket. De andra eleverna väljer var och en för sig stavar av olika längder och ”lägger” uttrycket $A=B+C$. De flesta elever väljer med säkerhet en lite längre stav [A] och två kortare men olika långa stavar [$B+C$] som tillsammans är lika långa som den längre staven. Eleverna lägger stavarna så att de bildar två parallella lika långa stavar.

Elev: En svart är lika med en gul och röd /.../ först kan jag kalla den svarta för A, den gula för B och sen kan jag kalla den gula C.

När eleverna löser uppgiften framgår det tydligt att eleverna kan representera $A=B+C$ med cuisinairestavar med olikartade yttre karakteristika. Olika elever väljer att re-

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

presentera uttrycket $A=B+C$ där A kan representeras av olika stavar och där B och C väljs i relation till den stav de först valt som A. Stavarnas specifika yttre karakteristika såsom färg och längd är alltså inte avgörande för elevernas val utan det är vad en stav är "lika med" som de fokuserar, att en stav (A) är lika med två olika långa stavar ($B+C$). Ingen väljer den kortaste staven som A.

Sara: Då kanske jag kallar den här för A [tar en orange stav, håller upp och lägger på bordet framför sig]

Inger: Okay

Sara: Och sen den där för B [håller upp en blå stav med höger handen] och den där för C [tar med vänster hand en vit stav].

Inger: Okay

Sara: Och då är dom ju lika. [Placerar de båda stavarnas ändar dikt ihop och skjuter fram dem så att de ligger parallellt med den orange staven].

Det blir inte alltid rätt. En elev väljer till exempel två lika långa stavar som tillsammans är lika lång som den längre staven. En annan elev lägger en lösning som inte skapar likhet, det vill säga de två kortare stavarna är tillsammans längre än den första staven. Båda eleverna "läser upp" den lösning de lagt med hjälp av stavarna och teckensymboler utan att upptäcka att det inte stämmer i relation till uttrycket $A=B+C$.

Att uttrycka likhet med matematiska symboler

Eleverna får en uppföljande fråga om de, förutom genom jämförelse, kan lägga, visa eller skriva uttrycket $A=B+C$ med hjälp av symbolkortet för addition och likhetstecken.

Inger: Kan du lägga ut (uttrycket) med sådana kort emellan? Här finns både plus och minus och allt möjligt ...

Fia: Jaa [Letar bland korten med olika matematiska tecken + = > < -]

[Lägger orange stav, ett kort med likhetstecken samt en mörkgrön stav]

Fia: A är lika med B ... Jag behöver ett plustecken [letar bland korten] ... men dumma, nu har jag inget. Jo där okay! [Kompletterar uttrycket med plustecken samt liten rosa stav]. Okay

Inger: Kan du Fia läsa din nu då?

Fia: Okay ... $A=B+C$ [Pekar samtidigt som hon läser uttrycket i tur och ordning på lång stav likhetstecken, kortare stav, plustecknet samt den minsta staven]

Eleverna placerar ut symbolkortet i relation till stavarna och läser ut den lösning de har lagt.

Att kontrollera och korrigera likheter

Att kombinationen av algebraiska uttryck så som $A=B+C$ och cuisinarestavar kan ge möjlighet till kontroll och korrigering har funnits som en dimension redan i tidigare analys ovan. I detta avsnitt pekar vi mer explicit på två aspekter av möjligheter till kontroll av likhet som framträder i elevernas agerande och resonemang. Den första aspekten är att i efterhand kunna kontrollera att det de har lagt med hjälp av stavar

och symboler stämmer, att den likhet de lagt stämmer ($A=B+C$). Den andra aspekten är att kunna korrigerera sig själv när det inte stämmer.

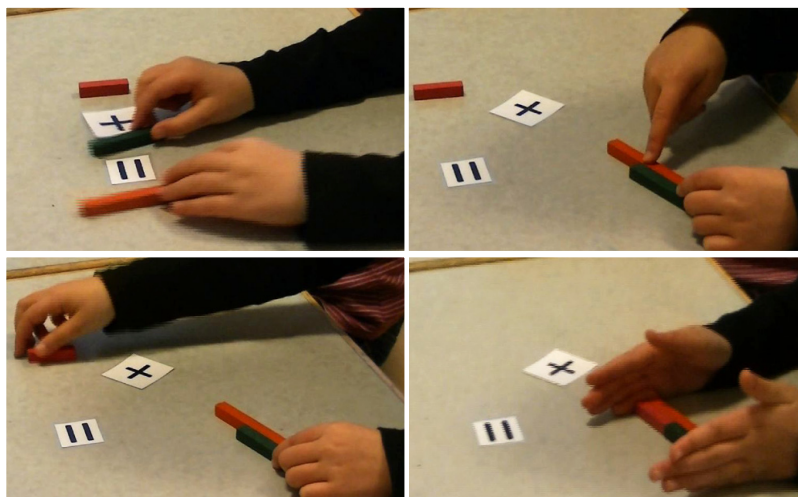
Fia har läst uttrycket $A=B+C$ och samtidigt pekat på uttrycket i form av stavar och tecken framför sig. När hon är klar så tar hon tag i stavarna:

Fia: Och så [tar stav "A" med vänster hand och stav "B" med höger hand (bild 1 nedan), placerar dem parallellt intill varandra] Och det stämmer ju.

Inger: För du kan kontrollera det.

Fia: Det här är ju A [pekar på den orange staven (bild 2)]. Och det här är ju B [pekar]. Och det här är C [tar "C" (bild 3) och placerar dikt mot änden på "B" parallellt med "A"]. Och dom är ju lika långa nu [Sätter därefter händerna på var sin sida av stavarnas ändar – dvs visar att A är lika lång som B+C (bild4)].

En signifikant aspekt i sekvensen är att Fia, på ett strukturerat sätt, visar att hon *efterhand* kan kontrollera att lösningen stämmer.



Figur 2. Bild 1–4. Fia visar hur hon kan kontrollera sin lösning.

Vid några tillfällen lade eleverna uttrycken med cuisinairstavar och likhetstecknen respektive additionstecknet "fel". Men det visade sig i flera fall att de själva kunde korrigerera sina lösningar när de såg hur de lagt uttrycket eller när de läste upp uttrycket.

En situation som inrymmer flera självkorrigeringar uppstod när eleverna fick frågan om man kunde lägga ett uttryck som $M+N=P$. Eleverna hade strax innan lagt uttrycket $A=B+C$ där likhetstecknet låg till vänster i uttrycket medan det i det nya uttrycket låg till höger.

Aron börjar med att matcha likhet mellan en brun stav mot en gul och en kort mörkgrön stav. När Aron ska lägga uttrycket $M+N=P$ med stavar och symboler lägger han först enligt följande mönster: brun stav = ljusgrön stav + gul stav. Han lägger alltså först stavarna efter samma mönster som i det tidigare uttrycket ($A=B+C$). Bredvid Aron sitter Sara som lagt sina stavar på följande sätt vit + röd = ljusgrön. Inger frågar Sara vad hon lagt. Samtidigt som Sara svarar och Inger frågar vidare ändrar Aron sin

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

lösning. Han skiftar snabbt plats på likhetstecken och additionstecknet – men ändrar inte placeringen av stavarna så lösningen blir nu: brun stav + ljusgrön = gul stav (se bilden nedan).

Inger: [Till Aron] Hur har du lagt? [Aron har fortfarande uppställningen brun + ljusgrön = gul]

Aron: [Pekar på stavarna, tecken och säger]. Ää, M är lika med P plus N är lika med. [På bordet ligger: brun stav + ljusgrön = gul stav. Aron pekar på likhetstecknet i lösningen båda gångerna han säger likamed]. Vänta [Nu skiftar Aron plats på den bruna och den gula staven så att lösningen nu blir gul stav + ljusgrön stav = brun stav] Nu [flyttade?] jag stavarna.

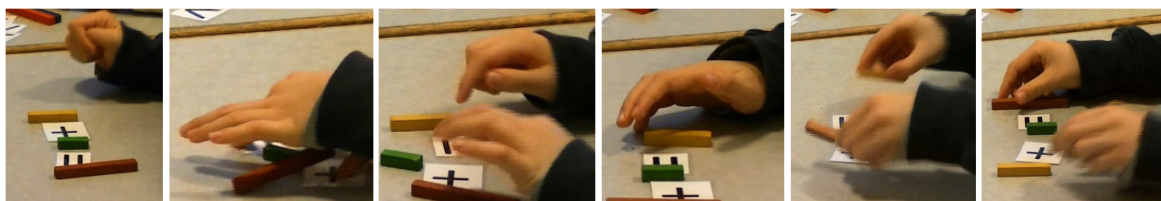
Inger: Okay! En gång till Aron får vi se ...

Aron: M plus N är lika med P [gul + ljusgrön = brun]

Inger: Stämmer det?

Aron: Jaaa

Inger: Okay

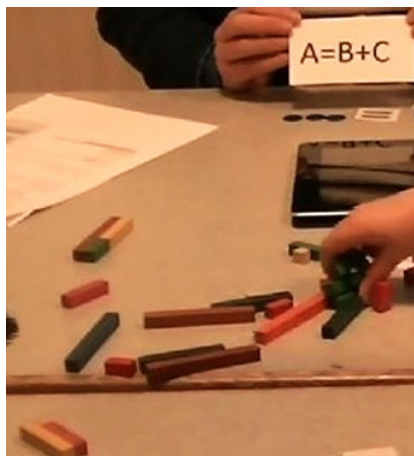


Figur 3. Bild 1–6. Aron korrigerar sin lösning när han läser upp den och ser att den inte stämmer med det givna uttrycket

Att pröva och utveckla likheter utöver det givna uttrycket

En aspekt av likhet synliggörs när en elev bedömer en annan elevs förslag till lösning som problematisk. I stället för att föreslå hur lösningen skulle kunna korrigeras resonerar eleven om hur det uttryck som efterfrågas skulle kunna byggas ut för att likhet ska åstadkommas.

[Nils, Pelle, Stina och Fia ska visa hur de kan använda cuisinairstavarna för att lägga $A=B+C$. Fia tar först en lång stav och lägger sen två stavar parallellt med den långa – kollar om/att det blir lika – men verkar inte nöjd. De andra eleverna Nils, Pelle och Stina har under tiden lagt sina kombinationer av stavar.]



Figur 4. Presentation av uttryck och tillgängligt material. Bilden visar även två lösningsförslag som eleverna lagt.

Fia: Jag tänker ta någon som ingen annan har tagit. [Plockar flera stavar än de tre stavar som behövs för uppgiften och börjar lägga stavar.]

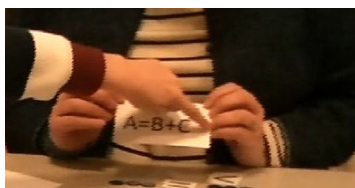
Nils: Så där kan du ju inte göra, det är bara /.../

Fia: Jaha då måste jag väl göra så här.

Inger: Kan du berätta varför hon inte kan göra så?

Nils: Därför då måste hon ha en till [bokstav] där [pekar till höger om 'C' på kortet som visar $A=B+C$]. /.../

Fia: Jag vet! Ja nu vet jag.



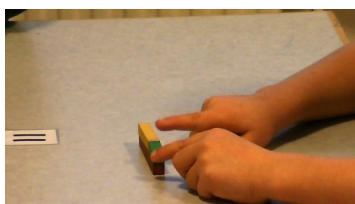
Figur 5. Nils pekar och förklarar hur det givna uttrycket kan behöva byggas ut för att Fias förslag ska stämma.

Sammantaget pekar sekvensen på att Fia initialt verkar relativt medveten om hur uttrycket kan lösas: hon började med ”en stav är lika med två stavar”, kommenterar först därefter att hon tänker göra något som ingen annan gjort, genom att använda flera stavar än vad som anges i uttrycket. Nils å sin sida identifierar att Fias kombination av stavar inte stämmer med uttrycket, men han tänker i sin tur vidare kring frågan om att skapa likhet genom att förklara att det algebraiska uttrycket skulle kunna utvidgas med ytterligare ”en till” [bokstav] för att Fias förslag ska stämma, bli lika. Nils agerande och resonemang visar att han är engagerad i problemet med vad som krävs för att skapa likhet.

Att uttrycka likhet med siffror och bokstäver

Vidare i intervjuerna ser vi några lösningar där eleverna beskriver att uttrycket eller likhetsrelationen $A=B+C$ kan uttryckas med andra bokstäver än just A, B och C. Ett exempel på detta ger Igor:

Igor: Man kan använda andra bokstäver. Som den är X och den är Y och den är I. [Samtidigt som Igor kommenterar detta pekar han i tur och ordning på den långa staven X respektive de två kortare stavarna som han nu benämner som Y och I. De båda kortare stavarna lägger han ovanpå 'X' och som tillsammans är lika långa som X].



Figur 6. Igor visar medan han säger hur hans lösning kan benämnas med olika bokstäver.

Igor tydliggör att relationen $A=B+C$ i lösningen med en brun stav, en gul och en ljusgrön stav (se bilden ovan) lika gärna skulle kunna uttryckas som $X=Y+I$.

Under intervjun möter eleverna för första gången frågan om $A=B+C$ kan beskrivas med exempelvis siffror (sifferkortet 0–9 ligger på bordet) eller med tärningssymboler.

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

ler. Eleverna börjar också vid denna fråga genast att lägga uttrycket med olika siffror och i enstaka fall också med tärningsymbolerna.

Inger: Vad har du här

Igor: läser $10=6+4$ [lägger en 1 och en 0 för att representera 10]

Inger: och vad är A

Igor: där [pekar på 10]

Inger: är lika med

Igor: [pekar på talen] B+ C

I elevernas lösningar och resonemang kan vi urskilja en framväxande förtrogenhet med att uttrycka likheter på olika sätt och i olika representationer. Eleverna framstår som bekväma med att pröva och representera olika algebraiska uttryck. Även om eleverna inte arbetat med siffror så har de inte några egentliga problem att också exemplifiera olika algebraiska uttryck med siffror. Flera av eleverna kan också argumentera för hur de vet att deras lösningar är korrekta och ibland om det blir något fel så gör de självkorrigeringar.

Att uttrycka likheter på nya sätt

En aspekt av elevernas kunskande som kommer till uttryck under intervjun är att de själva kan skapa nya uttryck utöver de som presenteras på korten. I en av gruppintervjuerna fick eleverna cuisinairstavarna innan de fick se uttrycket ($A=B+C$). Sun har valt stavar som hon håller i handen och när Inger vänder sig mot Sun säger hon:

Sun: Vad heter det att, A plus A är lika med B. [Håller stavar i handen – visar sig senare vara en röd och två vita]

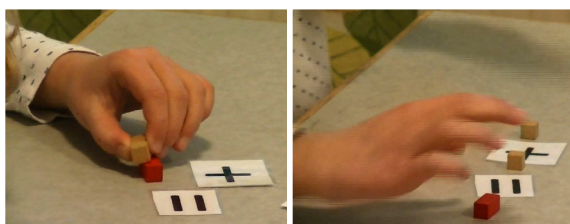
Inger: Kan du lägga det också då om vi har ett plustecken.

Wilfred: [sitter bredvid räcker plustecken till Inger] Här kommer plustecken!

Inger: [ger plustecknet till Sun] Kan du skriva det då?

Sun: [Lägger vit stav och plustecken och vit stav och likhetstecken samt en röd stav samtidigt med att hon läser uttrycket] A plus A är lika med B! Så!

Inger: Åå



Figur 7. Bild 1 och 2. Suns lösningsförslag

Som redan framgått visar denna tentativa analys av de filmade gruppintervjuerna att eleverna iakttar, lyssnar på och kommenterar de olika lösningar som de andra i gruppen gör och resonerar kring. I en del fall följer de med i någon annans arbete och kommenterar, till exempel vad de uppfattar som fel. Ibland blir eleverna inspirerade av någon annans lösning och lägger egna likadana. I de flesta fall lägger eleverna dock

egna lösningar utan att titta på vad andra gör. Eleverna i intervjusituationen framstår som självständiga i sitt prövande och resonering. Vidare framstår det av elevernas olika lösningar under intervjuerna att likheter kan uttryckas på många olika sätt, representerat med olika material.

Diskussion

Projektet som helhet har inneburit stora organisatoriska utmaningar för att kunna pröva och vidareutveckla de uppgifter gruppen planerat för undervisningsexperimentet i Mariannes klass. Även om Marianne är en rutinerad lärare var dessa nya uppgifter inte självklart enkla att genomföra i en klass med nästan 30 elever i åldern 6–7 år. Uppgifterna i sig krävde en kommunikationsintensiv undervisning. Målet var att så många av elevernas funderingar, försök och resonemang som möjligt skulle kunna tas tillvara i ett kollektivt samtal och i kollektiva aktiviteter samtidigt som arbetet skulle dokumenteras. I relation till dessa utmaningar valde Marianne att dela upp klassen i två eller tre grupper vilket ledde till att antalet lektioner både blev förhållandevis korta, ca 30 minuter per grupp, och rätt få, ca två per vecka för respektive grupp under höstterminen 2012. Det övergripande målet var att utforma uppgifter i vilka likhetstecknet introduceras i ett algebraiskt sammanhang. Davydovs tankegångar och program för matematikundervisning och senare utveckling bildade en inspiration och teoretisk grund i projektet. Hur kan vi då förstå projektet i relation till sådana teoretiska grunder?

I följande avsnitt diskuteras mycket tentativt några frågor kring på vilka sätt uppgifterna, undervisningen och elevernas resonemang kan förstås i förhållande till Davydovs tankegångar om teoretisk abstraktion och teoretiska begrepp. Även Schmittau och Morris (2004) argumentation om att den tidiga undervisningen ska bidra till att utveckla ett pre-numeriskt tänkande av algebraisk karaktär snarare än att eleverna laborerar med aritmetiska uppgifter som syftar till ett pre-algebraiskt tänkande uttrycker det vi ville åstadkomma. Vidare berörs frågan om utvecklande undervisning och lärandeverksamhet. Innan vi går vidare är det givetvis väsentligt att notera att vår diskussion endast syftar till att peka ut områden som är intressanta för fortsatt utveckling, studier och diskussion.

En väsentlig utgångspunkt i principen om teoretisk abstraktion är att teoretiska begrepp och relationerna mellan sådana begrepp ger redskap för att hantera vad som är kärnan i ett kunnande (begrepp/fenomen) bortom olikartade yttre karakteristika. När eleverna i intervjuerna ställs inför att visa och resonera om uppgiften $A=B+C$ i förhållande till cuisinairestavar framgår det tydligt att de kan visa likheter med stavar med sinsemellan olikartade yttre karakteristika som färg och längd – det centrala är likheten $A=B+C$ det vill säga att en stav representerar att A är lika med två andra stavar ($B + C$) oavsett färg och längd men givet att de tillsammans motsvarar A -staven. Det framgår även att några elever utan svårighet resonerar om och visar att de förstår att man även kan byta ut bokstäverna i uttrycket $A=B+C$ mot andra bokstäver t ex $X=Y+I$. Således, när eleverna ställs inför att visa och resonera om det algebraiska uttrycket $A=B+C$ med cuisinairestavar kan vi se att en stor andel av dessa elever kan

föra resonemang där likhet och likhetstecken är centrala.

Schmittau och Morris (2004) argumenterar, som redan nämnts, för vikten av en tidig undervisning som kan bidra till att utveckla ett pre-numeriskt tänkande av algebraisk karaktär. De uppgifter som konstruerades under pilotprojektet byggde, som framgått av redovisningen, på att eleverna ställdes inför uppgifter med redskap av en pre-numerisk karaktär såsom tärningar, cuisinairestavar och olika symboler. Eller som i uppgiften som hämtade sin inspiration från Neumans Landet Längesen där eleverna försattes i en situation där de var helt utan alla de redskap som är så självklara i vår kultur. Att inte ha tillgång till siffror, mätredskap, pengar och ändå försöka bestämma vad som kan vara lika eller olika skapade också en medvetenhet om vad det är som vi kanske tar för givet.

Likhetstecknet i algebraisk mening uttrycker likhet inte en process

I ett flertal studier konstateras att många elever har svårigheter att förstå likhetstecknet som en symbol för likheter på ett sätt som kan ses som adekvat för ett algebraiskt tänkande (Kinard & Kozulin, 2010; Powell, 2012). Genom att studera elevers uppfattningar av likhetstecknet framkommer att många elever främst ser likhetstecknet som en symbol för en process – att något blir eller att det är ett tecken som indikerar att det följer ett svar efter. Denna typ av uppfattning beskrivs som dynamiskt operationellt. Ett annat sätt är att se likhetstecknet som en symbol för att det som står på vardera sida om tecknet är ekvivalenta. Detta brukar beskrivas som att likhetstecknet uppfattas statistiskt strukturellt (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997). I den ämnesdidaktiska forskningen förs diskussioner om att elever som tidigt främst uppfattar likhetstecknet dynamiskt (som i ett aritmetiskt sammanhang kan ses som funktionellt) får svårigheter att längre fram förstå likheter i algebraisk mening (statiskt). I denna artikel tar vi inte ställning i den diskussionen, istället har vi i vår analys försökt urskilja hur elever uppfattar likhetstecknet då de introducerats till likhetstecknet i en algebraisk mening.

Inledningsvis hade lärarna en föreställning om att eleverna redan från förskoleklassen var bekanta med likhetstecknet som symbol och att den inledande uppgiften med tärningarna främst skulle fungera som en igångsättning och ett sätt att öka medvetenheten om symbolen som sådan. När Marianne rapporterade att det endast var två av de 28 eleverna som kom att tänka på likhetstecknet när de konstaterade att de behövde ett tecken för att symbolisera likhet blev lärarna överraskade. De var också förvånade över att det endast var ett fåtal elever som sa att de kände igen tecknet när det presenterades vid ett uppföljande samtal i helklass. Det finns förstås flera skäl till att eleverna inte, så att säga, hade tillgång till likhetstecknet trots att de med säkerhet ”sett” och ”använt” det tidigare. Ett skäl hänger rimligen samman med att eleverna i uppgiften var uppmanade att använda tecknet för ”mindre än”. Att då välja ett annat tecken från ett annat sammanhang kräver att de skulle kunna ”se” tärningsuppgiften som ett exempel på de uppgifter de jobbat med i förskoleklassen. Sådan transfer vet vi är komplicerad (Säljö, 2000). Ett annat skäl kan kopplas samman med att elever i tidig skolålder vanligen möter likhetstecknet i relation till olika enkla

aritmetiska uppgifter av typen $2+3=_$. Wernberg (2009) säger att det är problematiskt *[O]m eleverna i en undervisningssituation hela tiden möter exempel som varierar både i lösning och hur man tecknar ekvationen, [då] öppnas det inte för dimension av variation av likhetstecknets betydelse. /.../ eleven ges inte möjlighet att urskilja att höger och vänster led är ekvivalent eftersom ingen variabel hålls konstant, allt varierar. Elevens uppmärksamhet är då troligtvis på vilket värde X har. (Wernberg, 2009: 33)*

Wernberg (2009) utgår i sitt resonemang ifrån ett variationsteoretiskt perspektiv. I det perspektivet antas att eleverna främst urskiljer sådana aspekter som varierar. Det som inte varierar antas därmed vara svårare att få syn på. Med hjälp av ett variationsteoretiskt tänkande kan introducerande aritmetiska uppgifter konstrueras med större medvetenhet om att försöka få innebörden av likhetstecknet att framträda. Wernberg exemplifierar detta med följande exempel:

$$2x = 4$$

$$3x - 4 = x$$

$$4 + x = 3x$$

Först kanske det ser ut som ekvationerna är olika, men det är samma värde på x i alla tre ekvationerna, det är endast uttryckt på olika sätt. /.../Den mest tydliga skillnaden är mellan andra och tredje ekvationen. En aspekt som här kan urskiljas är likhetstecknet, att höger och vänster led är ekvivalent. (Wernberg, 2009: 32-33)

Kopplat till diskussionen om empirisk respektive teoretisk abstraktion kan frågan ytterligare nyanseras. Om det är talen i uppgifter (till exempel $2+3=_$ eller $2+_ =5$) som varierar och likhetstecknet är givet (oavsett om det är förtryckt eller om eleverna skriver det) kan det finnas en risk för att eleverna ser till de "yttre" lätt iakttagbara karakteristika som föreligger i uppgiften – nämligen att de uppfattar att det är en siffra som efterfrågas och att syftet är att finna "rätt" siffra. I de uppgifter vi arbetat med har vi dels valt att kontrastera likhetstecknet med tecknen för "mindre än" och "större än" och dels valt nyckeluppgifter som alla har syftat till att lägga fokus på skapandet av likheter respektive olikheter och hur dessa kan symboliseras med hjälp av vedertagna matematiska symboler. I stället för att fokusera olika siffror eller tal och lösningar har uppgifterna utformats för att skapa förutsättningar för pre-numerisk uppfattning om likheter av algebraisk karaktär (Schmittau & Morris, 2004).

Nyckeluppgifter som redskap för lärandeaktiviteter

Idén om lärandeverksamhet (Davydov, 2008; Kinard & Kozulin, 2010) grundas i ett antagande om att elever potentiellt kan utveckla behov och motiv för lärande genom ett engagerat deltagande i exempelvis en matematisk problemlösande aktivitet. Davydovs och även Neumans tankegångar innebär vidare, bland annat, att uppgifter behöver utformas för att ge förutsättningar för att eleverna kan återupptäcka historiskt och kulturellt utvecklade matematiska principer och strukturer.

I projektet utformades en uppgift "Landet längesen" som försatte eleverna i ett

sammanhang som var helt utan alla de matematiska redskap som är självklara i vår kultur. Uppgiften och undervisningen innebar vidare att eleverna ställdes inför levandegjorda problemsituationer, exempelvis att kungens tjänare kände sig orättvist behandlade eftersom de inte fick lika lön och elever uttryckte att 'de kunde förstå' det vill säga föreställa sig situationen. Eleverna hade en möjlighet att "gå in i" en social situation eller verksamhet med reella behov av att bestämma vad som kan vara lika eller olika (rättvist eller orättvist) *men* utan att ha tillgång till siffror, mätredskap eller pengar. I den gemensamma problemlösningen kom de fram med olika förslag på hur man skulle kunna mäta och jämföra och kom även överens om att likhetstecknet eller tecken för större än eller mindre än kunde användas för att beskriva resultatet.

Eleverna blev påtagligt engagerade i att tänka och resonera kring hur de kunde lösa de problem som invånarna i Landet Längesen ställdes inför och såg även behov av matematiska symboler som likhetstecken. Vi ser detta engagemang i den gemensamma problemlösningen som en indikation på potentialerna i nyckeluppgifterna som innebär att elever upplever behov av kunskaper och redskap som utvecklats kulturellt och historiskt. Ett behov som riktar uppmärksamheten mot det kunskapsinnehåll som lärarna var intresserade av att eleverna skulle utveckla (Kinard & Kozulin, 2010).

En annan aspekt av nyckeluppgifterna är att eleverna ställdes inför situationer som inrymmer aspekter av problemlösning. Att eleverna blir engagerade i prövande och resonerande om lösningen av problem pekar mot möjligheterna i att utforma nyckeluppgifter som kan erbjuda möjligheter till både gemensam och individuell problemlösning.

Arbetet med problemlösning kan även sättas in i ett vidare perspektiv utifrån Davydov. Att undervisningen möjliggör tankeexperiment, reflektioner och analys är aspekter som potentiellt kan bidra till utveckling av teoretiskt tänkande eller medvetenhet (Davydov, 2008:117). Vi ser att elevernas arbete med problemlösning; i "skapandet" av likhetstecken; i resonemang kring att jämföra och mäta så det blir lika; i prövande och resonerande i relation till algebraiska uttryck, indikerar begynnande utveckling av teoretiskt tänkande eller medvetenhet som är intressant att arbeta vidare med både i utformning av nyckeluppgifter och undervisning. Utifrån sådana nyckeluppgifter skapas också förutsättningar till fördjupade och systematiska studier av elevers lärande och kunskapernas innehåll.

Avslutningsvis vill vi lyfta fram Mariannes tankar och erfarenheter kring värdet av att arbeta fördjupat med problemlösning tillsammans med eleverna på detta sätt.

... vi har aldrig närmast oss det här sättet att tänka matematik [ohörbart] sen när vi kommer till problemlösning så är det svårt att lösa problem. Så att lärare över lag tycker att dom avsnitten är jättejobbiga för ungarna sitter hela tiden så här [markerar], för dom har ingen vana i att sitta och klura. /.../ Men alltså det är så himla och det är så intressant å se ... barn gillar ju sånt som är lite gåtfullt men vi står inte ut med det som lärare. För att det går för långsamt och det är för många händer i luften, lite så där. (Uppföljningssamtal 28 januari 2013)

Referenser

- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Nämnaren Tema. NCM, Göteborgs universitet.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: a theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers, Inc.
- Eriksson, I. & Lindberg, V. (2007). *Matematikundervisningens innehåll. Avrapportering av ett kollaborativt forskningsprojekt om att utveckla redskap och innehåll i arbetet med att realisera "strävansmålen" i matematik*. Lärarhögskolan i Stockholm och Stockholms stad.
- Lindberg, V. (2010). Skolans kunskapsinnehåll i ljuset av elevers uppgifter – exemplet matematik. Ingår i I. Eriksson, V. Lindberg & E. Österlind (red.) *Uppdrag undervisning – kunskap och lärande!*. Lund: Studentlitteratur. s. 109–124.
- Kinard, J. T. Sr. & Kozulin, A. (2010). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande*. Lund: Studentlitteratur.
- Matusov, E. (2009). *Journey into dialogic pedagogy*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.
- Neuman, D. (1986). *Räknefärdighetens rötter*. Skolöverstyrelsen. Stockholm: Utbildningsförlag.
- Neuman, D. (1993). *Landet Längesen: matte för 2000-talet*. Stockholm: Utbildningsförlag.
- Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *Elem. Sch. J.* 112(4) s. 627–648.
- Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, 46 s. 59–85.
- Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education* XIX(1) s. 19–43.
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *ZDM* 37(1) s. 16–22.
- Schmittau, J. & Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator* 8(1) s. 60–87.
- Sriraman, B. (2008). *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics*. Charlotte, N.C.: IAP-Information Age Pub.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Norstedts.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Doktorsavhandling inom den Nationella forskarskolan i pedagogiskt arbete. Umeå universitet.
- Vygotskij, L. (1963/1934). Learning and development at school age. Ingår i B. Simon & J. Simon (red) *Educational psychology in the U.S.S.R.* London: Rutledge & Kegan Paul. s. 21–34.
- Zuckerman, G. (2005). *Learning task as a growth point of the search activity*. Moscow: Academia.

Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour

Författarpresentation



Inger Eriksson är professor i pedagogik med inriktning mot lärande och läroplans-teori vid Stockholms univer-sitet.



Marianne Adolfsson Boman är låg och mellansta-dielärare på Skärsätra skola Lidingö.



Anders Jansson är univer-sitetslektor i mediepedagogik vid Stockholms universitet.



Mona Hverven är univer-sitetsadjunkt i matematik-ämnets didaktik vid Stock-holms universitet.



Torbjörn Tambour är univer-sitetslektor i matematik och matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet.

Hur kan den tysta lärarkunskapen utnyttjas för bättre undervisning om styckeindelning i engelska?

M Tvååra

Artikeln beskriver en learning study om styckeindelning av text i ämnet engelska, på gymnasienivå. Genom intervjuer kartlades möjliga kritiska aspekter av förmågan till styckeindelning, varpå ett lärarlag planerade en forskningslektion utifrån dessa. Lektionen filmades, analyserades och reviderades, vilket upprepades två gånger. Avsikten med studien var att undersöka vad eleverna hade för uppfattning om vad styckeindelning var bra för, vad de behövde lära sig för att bli bra på det, och hur en undervisning som möjliggjorde detta lärande kunde se ut. En förutsättning för att utveckla förmågan förefaller vara att förstå styckeindelning i sig, såväl som relationen mellan styckenas inre struktur, placering och textens hela ämnesinnehåll, som underlättande för läsarens förståelse av budskapet. Att de olika övningarna under lektionen utgick ifrån ett tydligt problem som var gemensamt och kunde diskuteras/lösas av elever tillsammans med läraren underlättade för eleverna att erfara de kritiska aspekterna. Även synliggörandet av ett meningsfullt syfte med lektionen verkade främja elevernas lärande.

AVSIKTEN MED DEN HÄR ARTIKELN är dels att fördjupa kunskapen om det ämnesinnehåll i engelska som utgörs av förmågan att styckeindela en text, och dels att genom att låta läsaren följa med på en sammanfattad resa genom denna learning study exemplifiera hur ett lärarlag kan arbeta med de fördjupade insikter om undervisningens innehåll som framkommer vid gemensam och noggrann analys av effekten av undervisningen hos eleverna. En noggrann analys kräver preciserade verktyg, och ett sådant har vi funnit i det teoretiska ramverk som ligger till grund för de flesta learning studies. I användandet av precisa kategorier och avgränsningar för beskrivningen



av analysarbetet finns en risk att det levande, ständigt föränderliga samspelet mellan lärare och elever i klassrummet inte framgår. Undervisning är ett hantverk, och i likhet med de flesta hantverkspraktiker infinner sig hos

Malin Tvååra arbetar som gymnasielärare (sv/sh) vid IT-gymnasiet i Uppsala och deltar i forskarskolan i learning study.

Tväråna

yrkeskåren med tiden ett tyst kunnande, en intuitiv praxis och för givet tagna förut-sättningar som varken formuleras för att ifrågasättas eller verifieras. Att närstudera den egna verksamheten i en learning study är att försöka explicitgöra denna praxis i syfte att kunna undersöka och vidareutveckla den. De samtal som förts kring de iakttagelser lärarlaget gjort vid analys av filmer från forskningslektionerna behandlar i betydligt större utsträckning än vad som framgår av denna sammanfattande be-skrivning relationer mellan lärare och elever, enskilda individers sätt att fungera och gruppdynamiska processer i klassrummet. I denna artikel är fokus lagt på att tydlig-göra de ämnesdidaktiska resultaten angående just förmågan till styckeindelning vid textskrivande på engelska.

Att inte kunna lära ut det självklara

Vårterminen 2012 genomförde jag tillsammans med en grupp gymnasielärare i engelska en learning study om styckeindelning av text i ämnet engelska. Den learning study som beskrivs här genomfördes av en grupp bestående av fyra gymnasielärare i engelska samt av mig, som är forskarstuderande vid forskarskolan i learning study och gymnasielärare i svenska. Studien genomfördes på en medelstor mellansvensk gymnasieskola, i årskurs ett och två, på naturvetenskapliga och samhällsvetenskapliga program. De deltagande lärarna hade mellan tio och ett års erfarenhet av undervisning, och de mest erfarna av lärarna hade dessutom stor erfarenhet av specialpedagogik och pedagogisk utveckling. För att enas om ett relevant ämnesområde att undersöka närmare utgick lärarlaget från frågan: Vad är det som våra elever har stora problem med i vårt ämne och som vi inte vet hur vi ska förmedla till dem? Vilket kunnande är det som vi som ämnesexperter kan väl, men som vi trots det år efter år misslyckas med att lära våra elever?

Ett område framstod snart tydligt, nämligen förmågan att använda sig av styckeindelning för att effektivt strukturera sina texter. För lärargruppen framstod det som märkligt men välbekant att vi alla hade stora problem med att få våra elever att skriva väldisponerade texter, samtidigt som detta kunnande var något som vi själva besatt. Genom en learning study kring förmågan att använda sig av styckeindelning vid textförfattande ville vi således undersöka hur kunnandet att använda en effektiv styckeindelning vid textskrivande var beskaffat hos elever i årskurs ett och två på gymnasiet. Det vi frågade oss var: Vad innebär det egentligen att behärska styckeindelning som ett verktyg för textskrivande? Vi kände igen en välskriven, väl styckeindlad text när vi såg en, och vi kunde själva producera en, men visste vi egentligen vad eleverna hade för uppfattning om vad styckeindelning var bra för, och visste vi vad de behövde lära sig för att bli bra på det, och hur vi i så fall kunde lära ut just det?

Learning Study – ett sätt att kollegialt undersöka ämnesinnehållet genom undervisningspraktiken

Learning study har utvecklats ur japanska tillvägagångssätt för att kontinuerligt studera och utveckla undervisning. Learning study utgår ifrån en explicit teori om lärande och denna används av lärarna för planering av undervisningen och för den efter-

följande analysen av elevernas förståelse för lärandeobjektet (Pang & Marton, 2003). Den teori om lärande som användes i denna learning study var variationsteorin, utvecklad i slutet av 1990-talet (Marton & Booth, 1997). Variationsteorin utgår ifrån att lärande är ett resultat av att den lärande fått möjlighet att urskilja kritiska aspekter av det som ska läras (lärandeobjektet) som han eller hon inte kunde urskilja innan. En sådan möjlighet ges när de kritiska aspekterna av lärandeobjektet fokuseras genom en strukturerad variation av värdet hos dessa aspekter. Den här variationen beskrivs närmare längre fram i artikeln.

Studien går till så att ett lärarlag gemensamt väljer ett lärandeobjekt för elever på en viss utbildningsnivå. I allmänhet brukar man välja ett lärandeobjekt på det sätt som beskrivs ovan – utifrån frågan om vad lärarlaget har svårt att lära eleverna. En viktig del i studien är lärarlagets analys av de egna uppfattningarna om vad det utvalda kunnandet egentligen består av. Eftersom mycket expertiskunnande är så kallad tyst kunskap, det vill säga kunnande som inte är explicit formulerat som sådant, kan det vara svårt även för mycket erfarna lärare att sätta ord på vad kunskapen egentligen består i. Det är inte heller ovanligt att lärarna blir varse att de inte alls är så överens om vad lärandeobjektet består i som de tidigare trott. En möjlighet, som utnyttjades i den learning study som här beskrivs, är att ta utgångspunkt i ämnesdidaktisk litteratur, samt i lärarnas egna tidigare undervisningserfarenheter, för att närma sig ett gemensamt avgränsande av lärandeobjektet. Valet av lärandeobjekt omfattar alltså i sig en analys för lärarlaget. Därefter bör lärarna även ha identifierat vilka aspekter av lärandeobjektet de tror är kritiska för elevernas förståelse av detsamma, i meningen avgörande att ha erfarit för att kunna nå fram till en uppfattning av lärandeobjektet som motsvarar den lärarna avsett. Ett sätt att göra detta, som användes i denna learning study, är att göra en analys av intervjuer med elever kring lärandeobjektet. Den intervjustudie som utfördes kring styckeindelning beskrivs nedan.

Utifrån fördjupade kunskaper om lärandeobjektet, och om elevernas förståelse för detta, planerar lärarlaget sedan gemensamt en första forskningslektion med hjälp av en eller flera lärandeteorier, som variationsteorin (Lo, 2012). Någon av lärarna i gruppen genomför lektionen, och denna observeras – direkt eller genom filmning – av de övriga lärarna. Efter att ha analyserat lektionen revideras denna och en ny forskningslektion planeras och genomförs med en ny grupp elever. Läraren kan vara detsamma eller en annan lärare ur gruppen. Revidering och nytt genomförande av forskningslektioner fortsätter så länge lärargruppen vill. I den här beskrivna studien valdes det vanliga antalet av tre forskningslektioner. Det var alltså bara tre av de fem medverkande lärarna i laget som höll i någon forskningslektion, men alla de deltagande lärarna planerade och reviderade lektionerna gemensamt. Genom att systematiskt undersöka en verksamhet fungerar learning study som modell för praktikutvecklande praxisnära forskning, och genom att tydligt redogöra för de teoretiska antaganden som legat till grund för undervisningens planering och analysen av dess utfall underbyggs de slutsatser om ämnesinnehållets beskaffenhet som dragits i studien.

Elevernas aktuella kunnande – undervisningsdesignens utgångspunkt

Efter att lärargruppen enats om ett lärandeobjekt – förmågan att använda sig av styckeindelning vid textskrivande – genomfördes en förundersökning i form av enskilda, semistrukturerade intervjuer med fem elever kring hur de uppfattade styckeindelning. Eleverna fick titta på en elevuppsats som ursprungligen skrivits med god styckeindelning, men där styckena tagits bort så att texten utgjorde en hel massa, omfattande ungefär en A4. De ombads sedan lämna synpunkter på hur uppsatsen skrivits, och hur den skulle kunna förbättras. Därefter fick de jämföra med samma text, med den ursprungliga styckeindelningen intakt, och frågor kring syftet med styckeindelning, och varför indelningen såg ut som den gjorde, ställdes. Varje intervju tog mellan tjugo och trettio minuter, och gjordes i enrum av mig. Intervjuerna spelades in med hjälp av filmkamera och transkriberades, varefter materialet analyserades fenomenografiskt (Marton, 1981).

I en fenomenografisk analys beskrivs de olika sätt på vilka ett fenomen kan erfaras, genom att man kategoriserar uttalanden om fenomenet efter vad intervjupersonerna talar om när de uttalar sig om fenomenet och efter hur de talar när de uttalar sig. *Vad* man talar om (uttalandenas *referentiella* aspekter) och *hur* man talar om det (uttalandenas *strukturella* aspekter) ger en bild av det sätt på vilket fenomenet erfars. Syftet med intervjuerna var att kartlägga den förförståelse av fenomenet styckeindelning av text som fanns hos den undersökta målgruppen. Elevernas uttalanden kategoriserades enligt de sätt på vilka de refererade till styckeindelning. Därefter analyserades den inre strukturen inom dessa kategorier av uttalanden, i syfte att kartlägga *olika möjliga sätt att tala om styckeindelning*. Analysen säger alltså inget om varje enskild respondents uppfattning av vad styckeindelning är. Varje elev gav också prov på flera olika sätt att beskriva styckeindelning, bland annat utifrån vilka frågor och följdfrågor som ställdes. Detta sätt att kartlägga det möjliga utfallsrummet av erfaren den av ett fenomen diskuteras bland annat av Marton och Pong (2005). Utfallsrummet av kategorier av erfaren den av styckeindelning från förundersökningen redovisas i tabell 1 på sid 54.

Inför planeringen av den första forskningslektionen träffades lärargruppen för att själva diskutera och analysera de egna erfarenheterna av styckeindelning, med utgångspunkt i förundersökningens resultatet och lärarnas egna ämneskunskaper. Den uppfattning av styckeindelning som lärargruppen hade som mål med undervisningen, att eleverna skulle besitta, kallas för det *avsedda* lärandeobjektet. Det motsvaras bäst av det sätt att uppfatta styckeindelning som återges av uttalandena i kategori D, i tabell 1 (sid 54). Att uppfatta styckeindelning på det sätt som beskrivs i kategori D innebär att se styckeindelning som något som utgår ifrån textens innehåll, som strukturerar olika delar av textinnehållet i förhållande till varandra, och som görs i syfte att skapa en text som på ett effektivt sätt kommunicerar sitt budskap till en läsare. Det här sättet att se på vad styckeindelning är överensstämde i hög utsträckning med lärarnas uppfattning. För att beskriva de egna uppfattningarna om styckeindelning använde lärarlaget terminologi från en i engelskundervisning vanligt förekommande typ av uppsatsskrivande där en uppsats struktureras i fem stycken, *five-paragraph es-*

Kategori av uttalanden	Referentiell struktur hos uttalandena	Strukturell struktur hos uttalandena
A styckeindelning som underlättande för skrivandet	Det är lättare att skriva korta stycken <i>”jag tycker det är enklare att läsa, och rättstava efteråt”</i>	Författarperspektiv
B styckeindelning som underlättande för läsandet	Det är lättare att läsa korta stycken <i>”styckena är ju till för att göra det liksom <u>lättare</u>, för när jag ser detta är det som en liksom det är väldans ostrukturerat alltså”</i>	Läsarperspektiv
C styckeindelning som framhävande av textens budskap vid planering och skrivande av texten	Underlättar planerandet av texten för skribenten Nytt stycke – nytt ämne <i>”när man typ byter ämne”</i> Styckeindelning kopplat till planerandet av texten <i>”typ som ett upplägg: hur ska det börja, jag gjorde som en liten mind-map, ungefär, med först huvudämnet[...].”</i> Styckeindelning som magkänsla <i>”det är lite av en vanesak och så måste man liksom göra lite rader och stycken när det <u>känns</u> bra typ som ett upplägg: hur ska det börja, jag gjorde som en liten mind-map, ungefär, med först huvudämnet”</i>	Ämnesinnehåll, textstruktur, författarperspektiv
D styckeindelning som framhävande av textens budskap vid läsande av texten	Underlättar förståelsen av texten för läsaren Ett stycke – ett resonemang/ en poäng <i>”när man känner att man har gjort liksom en <u>poäng</u> och sen så gör man den till ett <u>stycke</u>”</i> Fokus på de inledande orden <i>”Det är ord som liksom ‘the invitation’ det kan nästan vara som sin egna <u>titel</u> nästan. Inte för att det är en <u>titel</u> fast det <u>känns</u> så och <u>det drar in</u> en”</i> Skillnaden mellan radbrytning och styckeindelning <i>”inte så att det är mellanrum utan bara så att det liksom bryter och går ner så direkt”</i>	Ämnesinnehåll, textstruktur, mottagarperspektiv

Tabell 1: Utfallsrummet för erfarenheten av styckeindelning i förundersökningen.

say. En sådan innehåller ett inledande stycke, en introduktion, tre ämnesfördjupande stycken, eller brödtextstycken, och ett avslutande och sammanfattande stycke, sammanfattningen. Uppsattsformen betraktas som grundläggande i skrivundervisning men diskuteras även utifrån om den eventuellt verkar begränsande för elever i vidare utveckling av skrivandet (Nunnally, 1991).

Tvååra

Kritiska aspekter – vad eleverna måste urskilja för att kunna styckeindela

Frågan var nu på vilket sätt en undervisning som möjliggjorde för eleverna att erfara, och därmed urskilja, styckeindelning på ett sätt som motsvaras av strukturen hos uttalandena i kategori D snarare än de i kategori A–C, kunde iscensättas? De strukturella aspekter som skilde lärandeobjektet som det erfars i kategori D, från de övriga kategorierna, kallas i variationsteorin för lärandeobjektets kritiska aspekter, då dessa är kritiska för den undersökta elevgruppen. I detta fall verkade det, enligt förstudien och lärarlagets inledande diskussioner, kunna röra sig om att (I) urskilja relationen mellan styckenas inre struktur (det vill säga om ett stycke till sin utformning var en introduktion, ett ämnesfördjupande brödtextstycke, eller en sammanfattning) och textens hela ämnesinnehåll. En annan kritisk aspekt (II) var relationen mellan textens ämnesinnehåll och de olika styckenas förekomst och placering i texten. Bägge dessa kritiska aspekter utmärker uttalandena i kategori C och D i tabell 1, men saknas i kategorierna A och B. En sista kritisk aspekt som identifierades inför designen av den första forskningslektionen var samspelet mellan författar- och mottagarperspektivet. Som synes var det för eleverna möjligt att missa den för kommunikation (som textskrivande) så grundläggande utgångspunkten att (III) kommunikationens form bör underlätta mottagarens förståelse av budskapet. Många elever beskrev syftet med textens uppbyggnad främst utifrån textförfattarens perspektiv, oavsett om de i övrigt gav uttryck för en enklare förståelse av textuppbyggnad (som i kategori A), eller en mer komplex sådan (som i kategori C).

Forskningslektionens design – hur får vi eleverna att se de kritiska aspekterna?

Vid designandet av den första forskningslektionen utgick lärarlaget från det sätt på vilket de vanligen undervisade om styckeindelning, samt från tankar kring uppsatser och styckestruktur hos Bo Lundahl (2009). Designen utgick dessutom från Marton och Booths variationsmönster, och innehöll flera försök till variation av de identifierade kritiska aspekterna. Marton och Booth (1997) beskriver i variationsteorin hur urskiljandet av något kräver att det kontrasteras mot resten av världen. Genom att variera enbart en viss aspekt av lärandeobjektet som vi som lärare önskar att eleverna ska urskilja, möjliggör vi för dem att separera ut detta från övriga aspekter av lärandeobjektet. Detta slags variationsmönster återfinns i tabell 2 som *kontrastering*. Vill vi att eleverna ska få syn på aspekten färg kan vi exempelvis variera ett föremåls färg men inte dess form eller funktion (vi kontrasterar en röd mugg med en blå, en grön osv.). När aspekten urskilts med kontrastering kan ett omvänt variationsmönster, där den fokuserade aspekten hålls invariant medan resten varieras, möjliggöra en *generalisering* för eleven. Aspektens effekt för olika förhållanden separeras då från andra aspekter (vi kan exempelvis visa hur den röda muggen har en likhet med en röd blomma och en röd tomatsås, trots de i övrigt ganska stora skillnaderna mellan dessa föremål). Marton och Booth framhåller vid sidan av dessa två variationsmönster *fusionen*, där flera olika aspekter av lärandeobjektet varieras samtidigt för att aspektens relation till övriga aspekter av objektet, liksom till dess helhet, ska kunna erfaras av eleven. De tre variationsmönstren sammanfattas i tabell 2 på sid 56:

Variationsmönster	Fokuserad aspekt	Icke fokuserad aspekt
Kontrast	Variant	Invariant
Generalisering	Invariant	Variant
Fusion	Variant	Variant

Tabell 2: Variationsmönster av strukturella aspekter hos erfarenheten av ett lärandeobjekt.

För att utvärdera i vilken utsträckning vi lyckats genomföra en undervisning som möjliggjorde för eleverna att erfa lärandeobjektet på det sätt som vi *avsett*, filmade och analyserade vi det som *iscensattes*, det vill säga det lärandeobjekt som framstod genom undervisningen. För att mäta om undervisningen haft resultat, genomfördes ett för- och eftertest i syfte att mäta elevernas *levda* lärandeobjekt, det vill säga den uppfattning av styckeindelning som eleverna tog med sig efter lektionen. Efter att ha analyserat filmen från lektionen utifrån det sätt på vilket vi kunde höra och iaktta att eleverna föreföll ha uppfattat innebörden av styckeindelning, kunde lärargruppen enas om såväl lyckade som mindre lyckade inslag i lektionen.

Analys av den första forskningslektionen

Ett lyckat inslag i första lektionen var en uppgift där eleverna fick jämföra tre olika styckeindelningar av samma elevuppsats. Eleverna fick ut de tre olika texterna på papper och fick i uppgift att försöka avgöra vilken av de tre texterna som var bäst, samt berätta varför. Den kritiska aspekt som fokuserades var aspekt (II), styckeindelningen i relation till textens ämnesinnehåll. Denna kontrasterades genom de tre olika textvarianterna, medan textinnehållet i övrigt hölls invariant. Eleverna kunde snabbt se att viss slags indelning bidrog till effektivare kommunikation av innehållet än annan.

Det andra lyckade inslaget var den avslutande övningen i första lektionen, där eleverna fick ut en klassisk *five-paragraph essay* på papper. Alla eleverna fick samma text, men för en femtedel av dem var det inledande stycket, introduktionen, överstruket med svart. För en femtedel var första brödtextstycket överstruken, för en femtedel andra brödtextstycket, och detsamma gällde för tredje brödtextstycket och sammanfattningen. Eleverna fick i uppgift att utifrån informationen i de övriga stycken själva skriva det saknade stycket till sin text. Genom att såväl textens ämnesinnehåll som styckeindelningen i stort hölls invarianta medan utformandet av stycket som eleverna själva skrev varierades fokuserades kritisk aspekt (I), relationen mellan styckenas inre struktur och textens hela ämnesinnehåll. Under dessa övningar gjorde eleverna uttalanden som föreföll överensstämma med lärargruppens avsedda lärandeobjekt, och

Tväråna

de deltog även på ett mer självklart och intresserat sätt än i övrigt under lektionen.

Mindre verksamma försök till variation som gjordes under den första forskningslektionen var en inledande diskussion av ett ”dåligt exempel” som visades upp på powerpoint av läraren. Exemplet bestod av en äldre, avidentifierad elevuppsats som inte alls var styckeindelad, och tanken var att eleverna genom att se och diskutera bristande kvaliteter hos exemplet skulle urskilja just styckeindelning som en avgörande aspekt för god textkvalitet. Olyckligtvis var textexemplet illa valt, eftersom det hade en rad andra brister än enbart avsaknad av styckeindelning, och den fråga som ställdes till eleverna var alltför öppen, och inbjöd till diskussion av allehanda brister hos texten. Ingen särskild aspekt av texten fokuserades därmed. Dessutom läste läraren högt upp hela texten för eleverna, eftersom den utgjorde en ganska oöverskådlig textmassa på powerpoint-bilden, vilket var ett tydligt oengagerande inslag.

Nästa moment på lektionen var att läraren tydligt för eleverna motiverade det kunskapsmoment som dagens lektion skulle behandla, nämligen styckeindelning. Avsikten var att i enlighet med idén om bedömning för lärande (Lundahl, 2012) tydliggöra syftet med undervisningen för eleverna, och den aspekt vi avsåg att fokusera var mottagarperspektivet. Detta gjordes dock genom att läraren beskrev hur ett tydligt författarperspektiv vid textskrivande ledde till bättre resultat vid skrivande av det nationella provet i engelska, som snart skulle komma, och med ett citerat exempel från ämnesplanen, på powerpoint-presentationen, underströk hur viktigt mottagarperspektivet var i Skolverkets beskrivning av innehållet i ämnet engelska. Vid analys av filmen framstod dessa moment som oengagerande transportsträckor. Eleverna gav inte tecken på att ha fått sitt intresse väckt eller ha motiverats av lektionsinslagen. Nedan, under beskrivningarna av den andra och den sista forskningslektionen, visas hur vi med små men avgörande förändringar av dessa moment i den sista forskningslektionen lyckades väcka elevernas intresse och motivation.

Ytterligare exempel på variationsmönster som fanns i den första forskningslektionen, men som inte fungerade bra, och som därför reducerades så mycket som möjligt, var dels ett flertal olika exempel på samma slags styckeindelningsstruktur (five-paragraph essay), dels närläsning av den inre styckestrukturen i en av texterna. I det första fallet rörde det sig om fyra olika five-paragraph essays som under olika delar av lektionen användes som exempel. Genom att indelningsstrukturen hölls invariant men textinnehållet varierades kunde man tänkt sig att indelningens relation till innehållet (kritisk aspekt II) skulle framgå, men som helhet var det för utspritt över hela lektionen för att fungera bra, och medförde istället att onödigt mycket tid för eleverna gick åt till att sätta sig in i varje nytt textexempel. Till sista forskningslektionen reducerades därför antalet textexempel till två.

Det andra momentet som förändrades kraftigt var en lång lärarledd närstudie av den inre strukturen i olika stycken i en five-paragraph essay. Uppsatsen visades först i sin helhet på powerpoint inför klassen, därefter visades ett stycke i taget, och läraren diskuterade för varje stycke med klassen vilken eller vilka av meningarna i stycket som var extra viktiga för att lyfta fram textens ämnesinnehåll. Dessa meningar, som benämndes *topic sentences*, eller ämnesmeningar, markerades med annan färg i tex-

ten på powerpointen. Avsikten med den gemensamma närläsningen var att fokusera kritisk aspekt (I), relationen mellan styckenas inre struktur och textens hela ämnesinnehåll, genom att styckestrukturen varierades (olika slags stycken, och olika *topic sentences*) medan textinnehållet förstås var invariant. Dock gjorde valet av redskap för presentation av styckena, powerpoint-presentationen, att bara ett stycke i taget syntes för eleverna, varför det blev svårt att se ämnesmeningarnas funktion i förhållande till hela texten. Dessutom visade detta moment tydligt att det inte är tillräckligt att visa upp en variation för att eleverna ska *erfara* denna. Det långdragna momentet med närläsning av en text på projektorduk i ett nedsläckt klassrum där läraren i långa stycken föreläste, ledde helt enkelt till att eleverna lutade sig tillbaka, tappade koncentrationen och i vissa fall helt enkelt somnade.

Analys av den andra forskningslektionen

Efter att ha analyserat filmen från den första forskningslektionen gjordes vissa förändringar till den andra forskningslektionen, som genomfördes av en ny lärare i laget, och med en ny elevgrupp, men i mångt och mycket liknade upplägget den första lektionen. I stället för att helt ändra karaktär på de moment vi ville behålla men inte var helt nöjda med, förändrades de bara gradvis. Under diskussionerna i lärarlaget formulerades dock allt tydligare en målsättning som kan sammanfattas i att vi trodde oss ha identifierat något så när riktiga kritiska aspekter att arbeta med för elevgrupperna, men att vi ännu inte hittat nyckeln till att möjliggöra ett erfalande av dessa för eleverna.

Vid analysen av filmen från den andra forskningslektionen fann vi fler tecken på lärande, i form av uttalanden som överensstämde med vårt avsedda lärandeobjekt, hos eleverna, och det som framför allt förändrades var utfallet av det avslutande momentet, där eleverna fick i uppgift att själva skriva det saknade stycket i en text. Övningen genomfördes på samma sätt som i den första forskningslektionen, men med den skillnaden att efter avslutat skrivande (eleverna fick ungefär fem minuter på sig att skriva det nya stycket), ombads fem elever, vilka alla hade tilldelats papper med olika stycken av texten överstrukna, att i tur och ordning läsa upp sina stycken, så att en helt nyskriven uppsats bildades, men med ett ämnesinnehåll som överensstämde med det som fanns i den ursprungliga uppsatsen.

Något som också förändrades tydligt i den andra forskningslektionen var lärarens beskrivning av syftet med lektionen. I lärargruppen hade vi diskuterat det märkliga i att vi själva angav ett motiv för undervisningen som inte alls överensstämde med det motiv som genomsyrade vårt avsedda lärandeobjekt. Motivet som angavs i inledningen på forskningslektion ett var att kunskap om mottagarperspektiv förespråkades i Skolverkets ämnesplaner, och att skrivande med god styckeindelning belönades med bra betyg på nationella provet i engelska. Det framträdande motivet för vårt avsedda lärandeobjekt var dock styckeindelningens och mottagarperspektivets betydelse för effektiv kommunikation (kritisk aspekt III). Det är anmärkningsvärt hur stor skillnad denna förskjutning av fokus för hela verksamheten under lektionen hade både för eleverna och för oss som lärare. Vi undervisade inte för att eleverna skulle nå höga betyg, utan för att de skulle bli goda kommunikatörer.

Analys av den sista forskningslektionen

I den sista forskningslektionen, som genomfördes av ytterligare en annan lärare ur gruppen, för en ny elevgrupp, förändrades det inledande momentet, där en icke indelad elevtext visades upp för eleverna på powerpoint, på ett litet men avgörande sätt. I stället för att läraren läste hela texten för eleverna, ombads en elev att börja läsa texten högt, och att avsluta där hon tyckte att det passade att göra ett nytt stycke, varvid en ny elev övertog läsandet fram till dess han tyckte det var dags att avsluta stycket, och så vidare. Genom denna förändring deltog inte bara de högläsande eleverna, utan alla klassens elever i läsandet av texten, därför att alla elever för sig själva kunde gissa var den läsande eleven skulle välja att avsluta stycket. Textinnehållet hölls invariant, medan den fokuserade aspekten, styckeindelningen (kritisk aspekt II), varierades genom att den indelning som gjordes av de högläsande eleverna kontrasterades mot varje elevs eget tysta val av styckeindelning.

Liksom i den andra forskningslektionen fokuserades mottagarperspektivet i lärarens motivering till undervisningsinnehållet för lektionen. Övningen där eleverna fick jämföra tre olika indelningar av samma text behölls och skapade en kontrastering av olika slags styckeindelning. Det långa momentet med närläsning av en text på powerpoint försvann dock helt ur den sista forskningslektionen, och i stället stannade läraren och eleverna kvar i den av de tre varianterna på styckeindelning av samma text som de enats om fungerade bäst. Med denna text på papper framför sig fick eleverna tillsammans med läraren diskutera hur de olika styckena i texten var uppbyggda och fungerade i relation till textens hela innehåll. Läraren frågade eleverna om vilken mening i varje stycke de tyckte var den viktigaste och varför. Under diskussionen sammanfattade läraren på tavlan det som sades, och skissade på det sättet upp en stödstruktur för en five-paragraph essay, med beteckningar på stycken och nyckelmeningar. Innehållet som diskuterades var i stort sett detsamma som togs upp under närläsning-föreläsningen i den första forskningslektionen, men utgångspunkten var den uppsats som eleverna under den närmast föregående övningen hade fått möjlighet att sätta sig in i ordentligt. Genom detta och genom att läraren samlade in och strukturerade de idéer om styckeindelning och textstruktur som redan fanns hos eleverna, förändrades momentet från abstraherande och lärarcentrerat till konkret och elevcentrerat.

Det avslutande momentet där eleverna skrev det saknade stycket i en uppsats, genomfördes som i den andra forskningslektionen, men med skillnaden att i stället för att bara låta fem elever läsa upp sina nyskrivna stycken, ombads de fem eleverna att gå fram och ställa upp sig framför klassen för att på så sätt med sig själva gestalta de fem styckena i en five-paragraph essay. Denna lilla förändring tydliggjorde meningen med övningen för klassen. Lärarlaget enades om att ett alternativ för ett framtida lektionsupplägg kring samma ämnesinnehåll kunde vara att utgå från just denna övning, för att kunna arbeta vidare med eleverna som aktiva skapare av små minippsatser. Här framträdde för oss att vi främst låtit eleverna arbeta med bedömning av texter trots att vi egentligen önskade utveckla deras förmåga att själva producera texter med hjälp av god styckeindelning. Övningar där eleverna i mindre grupper fått

planera och genom gestaltande demonstrera en disposition av texter med ett på förhand givet innehåll, hade kunnat fokusera mer på användandet av styckeindelning för skrivande, utan att ett långt moment av skrivande av en hel uppsats hade krävts.

Resultat från för- och eftertest

Ett vanligt förekommande sätt att mäta resultaten från en learning study är att genomföra för- och eftertest för att jämföra kunskapsutvecklingen mellan de olika grupperna i olika forskningslektioner. Denna metod användes även här, och då en viktig del av erfarenheterna från studien handlar om just problem med detta sätt att mäta elevers kunnande, diskuteras för- och eftertestens utformning nedan. Det för- och eftertest som genomfördes med var och en av de tre elevgrupperna före och efter den genomförda forskningslektionen bestod i att markera lämpliga indelningar av stycken i en text som ursprungligen var skriven som en five-paragraph essay, men där styckeindelningen tagits bort. Efter den första forskningslektionen var det 29 procent av eleverna i gruppen som hade förbättrat sina resultat, och medelförbättringen var 17 procent av resultatet på förtestet, medan det efter den sista forskningslektionen var 44 procent av eleverna som hade förbättrat sina resultat, med en medelförbättring på 37 procent.

Lärlaget insåg dock efter inledd studie att testet snarare mäter förmågan att bedöma, eller korrigera en existerande text, än förmågan att planera och skriva en egen text. Förutsatt att dessa förmågor på något vis kan antas samvariera säger testresultaten ändå något om huruvida undervisningen var effektiv eller inte. Ett annat problem med testen var att det inte var samma text som eleverna ombads dela upp i stycken i förtestet som i eftertestet. Texten i eftertestet kan generellt sett ha uppfattats som svårare eller lättare att rätt markera styckena i. Eftersom alla tre grupperna fick samma varianter av för- och eftertesten ska det ändå gå bra att jämföra hur stor gruppens förändring i medeltal var. Det var dock bara 17 elever i den första undervisningsgruppen och 16 i den sista, som genomförde bägge testen, vilket är ett litet underlag att dra slutsatser ifrån.

Metoden att använda för- och eftertest för att mäta effekten av förändrad undervisningsdesign i en learning study kräver dels att testet verkligen mäter det avsedda lärandeobjektet – vilket det i detta fall knappast gjorde – dels att testet mäter lärandeobjektet i förhållande till de kategorier av erfarenheter som iakttagits i utfallsrummet för lärandeobjektet under förstudie och analys av forskningslektioner. Det eftertest som gjordes här sade ingenting om hur elevernas *levda lärandeobjekt*, den uppfattning av lärandeobjektet som eleverna tar med sig ut ur klassrummet, förhåller sig till det av lärarna *avsedda lärandeobjektet*. Trots bristerna i för- och eftertesten kunde lärlaget ändå avgöra om en utveckling av förståelsen av styckeindelning skett i klasserna, genom noggrann analys av elevernas yttranden under lektionerna, och lagets bedömning var att elevernas förståelse av styckeindelning utvecklades i betydligt högre grad under den sista forskningslektionen. Bristerna kan inte heller sägas påverka resultatet av lärarnas förståelse för lärandeobjektets innebörd. Studien genomfördes i syfte att fördjupa kunskapen om vad det är att kunna styckeindela när man skriver

Tväråna

en text i engelska, och genom noggrann analys av hur elevernas erfarenheter av styckeindelning kommer till uttryck kunde lärarlaget komma närmare en förståelse av vad det är man behöver lära sig för att kunna styckeindela. Genom allt mer utvecklade elevutsagor om styckeindelning under forskningslektionerna framträdde tydliga resultat av hur förståelsen för lärandeobjektet utvecklades under lektionerna.

Slutsatser

Slutsatser som kan dras av studien beträffande innebörden av förmågan att behärska styckeindelning som ett verktyg för skrivande är följande:

- Att styckeindela en text kan ses som att
 - › förenkla för sig själv när man skriver en text genom att det blir ett kort stycke i taget,
 - › förenkla för läsaren genom att göra det lättare att läsa korta stycken,
 - › strukturera olika delar av textinnehållet till varandra när man planerar en text,
 - › underlätta för läsaren att förstå hur olika delar av textinnehållet förhåller sig till varandra.
- Det sistnämnda synsättet är det som eftersträvas i engelskundervisning på gymnasiet, och för att eleverna i de undersökta grupperna skulle kunna se styckeindelning så krävdes att undervisningen lyfte fram:
 - › hur ett styckes funktion i relation till övriga delar av texten speglas av styckets uppbyggnad (genom till exempel *topic sentences* och referenser till övriga stycken i texten),
 - › hur placeringen av olika stycken i texten samspelar med det ämnesinnehåll som lyfts fram i de olika styckena,
 - › läsarperspektivets betydelse när man skriver en text.

Slutsatser som kan dras av studien beträffande innebörden av vilka förutsättningar som kunde bidra till att eleverna utvecklade förmågan att styckeindela är följande:

- Variation av kritiska aspekter av styckeindelning genom kontrastering och generalisering föreföll underlätta för elevernas utvecklande av förmågan.
- Variationsmönster som åstadkoms genom elevernas aktiva deltagande (till exempel när de själva läste upp en text) föreföll mer verksamma än variationsmönster som bara presenterades av läraren.
- Vi fann att när de olika övningarna under lektionen utgick ifrån ett tydligt problem som eleverna kunde diskutera/lösa tillsammans med läraren (Hur bör texten styckeindelas? Vilken text har den bästa styckeindelningen? Vilken är den viktigaste meningen i stycket och varför? Hur kan det saknade stycket utformas?) så var det lättare för eleverna att erfara den kritiska aspekt som uppgiften fokuserade.
- Även synliggörandet av ett meningsfullt syfte med lektionen (bättre kommunikation snarare än högre betyg) verkade främja elevernas lärande.
- Ovanstående verksamma förutsättningar i undervisningen gick att åstad-

komma med hjälp av förhållandevis små, men genomtänkta förändringar med direkt utgångspunkt i elevernas erfarenhet av styckeindelning.

Att synliggöra det självklara

Det kan förefalla som att ovanstående resultat – beskrivningen av styckeindelning som underlättande för mottagarens läsning, och dess utformande som av betydelse för tolkningen av hela textens innehåll – borde vara självklart för erfarna lärare i engelska. Det är det också, och det är just det som ofta ställer till problem i undervisningen. Sådana kunskaper som för den insatte utövaren av en verksamhet, i det här fallet författande av texter, sitter ”i ryggraden” blir ofta så kallad ”tyst kunskap”, det vill säga ett kunnande som inte kan uttryckas i ord (Johannessen, 1988; Polanyi, 2009). Learning study kan vara ett sätt för lärare att genom systematiska närstudier av den egna praktiken bli medveten om dessa förgivettaganden – kunskaper som är omedvetna för lärarna. Ett exempel på ett sådant förgivettagande är den ömsesidigt påverkande relationen mellan form och innehåll i text som eleverna måste urskilja för att erfara lärandeobjektet på samma sätt som lärarna.

Även resultatet att det är viktigt att i undervisningen lyfta fram det egentliga syftet med verksamheten – att eleverna ska utveckla sin förmåga att kommunicera effektivt – är lätt att avfärda som trivialt. Dock är det inte orimligt att tänka sig att lärare ofta faller för frestelsen att medvetet eller omedvetet hänvisa till just kunskapskrav och kursmål för att motivera eleverna. Dels uppmuntras detta genom en kultur där skolans styrdokument ofta framhålls som väldigt viktiga, och där det understryks att eleverna ska vara insatta i ämnesplaner och medvetna om kunskapskraven, dels finns i vårt samhälle som helhet en föreställning om att belöning i form av exempelvis höga betyg är motiverande för elever. Detta fokuserande av betygen riskerar att skymma sikten för det verkliga motivet för att lära sig styckeindelning: att kommunicera effektivt. För att en uppgift ska fungera som en meningsfull del av en verksamhet behöver den svara mot ett motiv för verksamheten, som utgår från ett reellt behov hos deltagarna (Davydov, 2008). Kanske är behovet av att kommunicera mer grundläggande för eleverna än behovet att prestera för höga betyg? Det förefaller också vara viktigt att undervisningen består av problem som löses gemensamt av lärare och elev, där alla parter bidrar till problemlösandet är viktiga, något som förutsätter att läraren inte har en ”färdig lösning” som eleverna förväntas komma fram till (Matusov, 2000).

Andra erfarenheter som gjordes under studien var de mer generella vinsterna för lärarna med deltagandet i studien:

- Genom att gemensamt diskutera och ifrågasätta den egna undervisningen tydliggjordes att lärarna i hög utsträckning undervisar på liknande sätt. Denna iakttagelse överensstämmer med dem som gjorts av Stigler och Hiebert i *The Teaching Gap* (1999), där författarna menar att de inomkulturella skillnaderna i undervisningsstil är betydligt mindre än de mellankulturella, eftersom undervisningspraktiker lärs in kulturellt genom den egna skolgången.
- Lärarlaget bedömde att deras förmåga att undervisa förbättrades genom de kollegiala samtalen med explicit fokus på undervisningsinnehållet. Lärares

Tvååra

samtal tenderar att röra sig mer kring undervisningens utformning och organisation än kring frågor om hur ämnesinnehållet är beskaffat och hur eleverna uppfattar det, något som kan förändras genom arbete i learning study (Holmqvist, 2011). Bland annat uppskattades det variationsteoretiska bidraget till ett professionellt didaktiskt språk. Laila Gustafsson har visat hur lärare efter arbete i learning study fortsätter att använda ett variationsteoretiskt ramverk för att analysera sitt ämnesinnehåll (2008).

Referenser

- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. New York: Nova Science Publishers.
- Gustafsson, L. (2008). *Att bli bättre lärare Hur undervisningsinnehållets behandling blir till samtalsämne lärare emellan*. Umeå: Umeå Universitet.
- Holmqvist, M. (2011). Teacher's learning in a learning study. *Instructional Science*, 39 (4), s. 497–511.
- Johannessen, K. S. (1988). Tankar om tyst kunskap. *Dialoger* 6:88, s. 13–28.
- Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lundahl, B. (2009). *Engelsk språkdidaktik – texter, kommunikation, språkutveckling*. Lund: Studentlitteratur.
- Lundahl, C. (2012). *Bedömning för lärande*. Norstedts.
- Marton, F. (1981). Phenomenography – describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, 10, s. 177–200.
- Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning And Awareness*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. & Pong, W. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Research & Development*, 24 (4), s. 335–348.
- Matusov, E. (2000). *Intersubjectivity as a way of informing teaching design for a community of learners classroom*. School of Education. Newark, DE: University of Delaware.
- Nunnally, T. E. (1991, Jan). Breaking the Five-Paragraph-Theme Barrier. *The English Journal*, 80 (1), s. 67–71.
- Pang, M. & Marton, F. (2003). Beyond "lesson study": Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Science*, 31, s. 175–194.
- Polanyi, M. (2009). *The Tacit Dimension*. Chicago: University of Chicago Press.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: Free Press.

Att se det som inte syns – om talföljder i årskurs 3 och 4

L Erixson, K Frostfeldt Gustavsson, K Kerekes & B Lundberg

Internationell forskning och undersökningar visar att elever har svårt att lära sig algebra i allmänhet samt att konstruera och beskriva talföljder i synnerhet. Undervisningen, som fokuserar på olika undervisningsmetoder i stället för på det som krävs för att lära, anses vara en av de viktigaste orsakerna till detta.

Studiens syfte är att, utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv, studera det som är kritiskt för elever i årskurs 3 och 4 när de ska lära sig att konstruera och beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. I artikeln beskrivs de identifierade kritiska aspekterna och hur dessa gjordes synliga i undervisningen genom variation. Learning study användes som metod.

Resultatet visar att eleverna utvecklade förmågan att beskriva talföljder när det i undervisningen gavs möjlighet för dem att urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra, urskilja helheten, förstå att det finns ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet och upptäcka att talföljder kan byggas upp på olika sätt. Detta benämns i studien som kritiska aspekter.

Introduktion

Resultaten i svenska skolor har försämrats, inte minst i matematik visar TIMSS 2007 (Skolverket, 2008). Uppgifterna i TIMSS-studierna är uppdelade i fem huvudområden – algebra, geometri, mätningar, statistik och aritmetik. I 2003 års undersökning



Karin Frostfeldt Gustavsson, 1–7-lärare i svenska, engelska och SO på Ribbaskolan i Gränna.



Klara Kerekes, 1–7-lärare i matematik, NO och teknik på Ribbaskolan i Gränna, licentiand inom FontD forskarskolan, Linköpings universitet.



Birgitta Lundberg, 1–7-lärare i svenska, SO, matematik och bild på Ribbaskolan i Gränna.



Lea Erixson, mellanstadielärare på Ribbaskolan i Gränna.

Erixson, Frostfeldt Gustavsson, Kerekes & Lundberg

var de svenska elevernas resultat genomgående sämre inom geometri och algebra än inom de andra områdena (Skolverket, 2005). Analyser av resultatet i TIMSS 2007 visar också att om medelprestationerna i de olika huvudområdena jämförs med varandra är det algebra som drar ner de svenska resultaten.

Enligt Skolverkets (2009) rapport om resultatet på TIMSS Advanced 2008 är undervisningen en viktig orsak till varför svenska elever inte lyckas lika bra i matematik som de gjorde för tio år sedan. Undervisningen i matematikämnet handlar mer om ett slags överförande av färdiga modeller och beräkningsprocedurer som presenteras i läroboken än genomgångar som leder till förståelse och lärande. Eleverna lämnas i allt större utsträckning åt att på egen hand räkna i sina matematikböcker som anger olika exempel på beräkningsprocedurer utan att beskriva i vilket sammanhang de ska användas (Skolverket, 2008). Lärare koncentrerar sig på metoder som de ska tillämpa i en undervisningssituation i stället för att fokusera på det som krävs för att lära (Carlgren & Marton, 2000). För att elever ska lära sig det vi vill att de ska lära sig måste undervisningen mer systematiskt grunda sig på olika sätt att presentera de aspekter som är kritiska för att förstå ett specifikt innehåll (Holmqvist 2006). Kullberg (2010) menar att ett gynnsamt lärande kräver fokus på relationen mellan eleven och det som han/hon ska lära sig.

Vi tyckte att detta samband var intressant och ville utveckla vår matematikundervisning för att ge eleverna möjlighet att förbättra sina kunskaper i ämnet. Genom Skolverkets satsning på matematik sökte vi, två lärare i årskurs 3 och två lärare i årskurs 4, projektpengar och fick möjligheter att utveckla våra idéer. Vi ville ta reda på hur eleverna uppfattar, förstår och tillägnar sig undervisningen i matematik eftersom vi hade uppmärksammat att eleverna inte tillgodogjort sig undervisningen så som vi hade förväntat oss. Matematikprojektet fördjupades till en learning study (Holmqvist, 2006; Kullberg 2010), en modell som har vidareutvecklats från den japanska metoden lesson study (Stigler & Hiebert, 1999).

Stigler & Hiebert (1999) jämförde i sin studie hur lärare i Hong Kong, Japan och USA bedriver matematikundervisning och fann stora skillnader i undervisningen länderna emellan. De beskrev de japanska lärarnas framgångsrika matematikfortbildning i den egna praktiken när de använder sig av lesson study. Metoden innebär en ständigt pågående förbättring av undervisningen. Det som gör den japanska modellen unik är att lärarnas kunskaper tas tillvara, utvecklas och bildar en gemensam, professionell kunskapsbas. Systemet säkerställer en gradvis förbättring av lärande över tid (Stigler & Hiebert, 1999). Detta inspirerade oss att själva på liknande sätt försöka utveckla vår matematikundervisning. I vår undersökning ville vi ta reda på vilka möjligheter till lärande vi ger elever i undervisningen. Vi ville bli bättre på att hitta det som är avgörande för eleven i lärandesituationen för att lärande ska uppstå. Vi ville också utveckla förmågan att se det som ska undervisas om – ett matematiskt innehåll – på ett nytt sätt. Hur kan innehållet under en lektion varieras för att eleverna ska upptäcka och förstå det som ska läras?

I Lgr11 (Skolverket, 2011) står det att momentet mönster är en viktig del inom matematiken och en förkunskap till algebra. I litteraturen beskrivs hur viktigt det är

att arbeta med olika slags mönster och att erbjuda eleverna aktiviteter med mönster (Mouwitz, 2004; Orton & Orton, 1999; Papic & Mulligan, 2007). Mönster inom matematiken kan innebära geometriska former eller talföljder som upprepas eller förändras regelbundet (Matematik – ett kommunikationsämne, 1996). I den nya kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) har området mönster förstärkts och placerats in under kunskapsområdet algebra i det centrala innehållet för såväl årskurs 1–3 som 4–6. Undervisningen i matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmågor att konstruera, beskriva och uttrycka talföljder och geometriska mönster (Skolverket, 2011). I vår studie har vi valt att fokusera på talföljder med naturliga tal inom talområdet 1–1 000. Vad är det vi lärare måste lyfta fram inom området talmönster för att våra elever ska få möjligheter att utveckla dessa förmågor?

Genom att använda variationsteorin fick vi möjlighet att studera sambandet mellan undervisning och lärande (Marton & Booth, 2000). Kullberg (2010) hänvisar till Kennedy som anser att detta samband är det mest komplexa och det man vet minst om i lärarens arbete. Även i den svenska skolan har ett större intresse visats för *hur* eleven lär sig medan lärandets innehåll har tagits för givet (Carlgren & Marton, 2000). För att kunna fokusera på hur innehållet i undervisningen behandlas för att eleverna ska lära sig om talföljder valde vi att genomföra en learning study. Metoden ger oss möjlighet att få syn på det som eleverna måste förstå för att kunna beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. Vi kan studera vad eleverna erbjuds att lära under en lektion. Eftersom det finns variationer i hur saker och ting uppfattas är en förutsättning för lärande att eleverna erfar denna variation av lektionsinnehållet för att kunna generalisera och därmed förstå.

Syfte

Syftet med studien var att utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv och genom en learning study studera, upptäcka och validera aspekter som är kritiska för elever när de ska lära sig att beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. Studien syftade även till att beskriva hur man kan möjliggöra för eleverna att urskilja de kritiska aspekterna i undervisningen för att de ska kunna utveckla kunskap om lärandeobjektet.

De specifika forskningsfrågorna var:

- Hur skapas förutsättningar för eleverna i årskurs 3 och 4 att lära sig beskriva olika talföljder?
- Vilka är de kritiska aspekterna och hur kan de varieras?

Forskningsöversikt

I vår studie undersökte vi hur våra elever lär sig om talföljder som vi finner inom området mönster i matematiken. En talföljd är en serie av tal som upprepas eller förändras på ett regelbundet sätt (Matematik – ett kommunikationsämne, 1996). Att kunna se hur en talföljd fortsätter är en pre-algebraisk uppgift inom området mönster och dess generalisering (Algebra för alla, 1998).

Det finns en mängd olika sorters talmönster, men det är svårt att i litteraturen hitta

Erixson, Frostfeldt Gustavsson, Kerekes & Lundberg

en indelning och tydlig definition av dessa. Det vi har funnit är mer en beskrivning av ett urval av olika slags talföljder. I Analys-schemat i matematik för åren före skolår 6 (Skolverket, 2009) finns följande kategorisering av talföljder:

- mönster där skillnaden mellan talen är lika: 2, 4, 6, 8, 10
- mönster där skillnaden mellan talen ökar med ett för varje steg: 1, 2, 4, 7, 11
- mönster där varje tal bildas av att det föregående talet multipliceras med två: 1, 2, 4, 8, 16
- och slutligen mönster där talen bildas genom att talen 1, 2, 3, 4 multipliceras med sig själva (Skolverket, 2009, s.34).

Berglund (2009) benämner talföljder där det följande talet konstrueras av de två föregående för *rekursiva talföljder*. Ett exempel på en rekursiv talföljd är Fibonnaccis talföljd (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...). En annan sorts talföljd är en *aritmetisk talföljd* där varje nytt tal ökar med ett konstant värde i förhållande till det föregående talet, exempelvis 1, 4, 7, 10 ... (Berglund, 2009). Det som är karakteristiskt för en aritmetisk talföljd enligt Kiselman och Mouwitz (2008) är att differensen mellan ett tal i talföljden (förutom det första) och närmast föregående tal alltid är lika stor. I vårt exempel för aritmetiska talföljder är differensen mellan talen lika med 3. En *geometrisk talföljd* är en talföljd där kvoten mellan ett tal i talföljden (förutom det första) och närmast föregående tal alltid är lika stor (Kiselman & Mouwitz, 2008). Ett exempel på geometrisk talföljd med kvoten 2 är 5, 10, 20, 40, 80 ...

I engelskspråkig litteratur benämns talföljder som *linear sequence* och *quadratic sequence* (Hargreaves m fl., 1999, s. 72 och 75) som vi skulle kunna kalla för linjära och kvadratiske talföljder. Definitionen av en linjär talföljd stämmer överens med de svenska författarnas definition av aritmetiska talföljder. En kvadratisk talföljd definieras som en talföljd där differensen av differenserna är konstant (Hargreaves m fl., 1999). I den kvadratiske talföljden 1, 2, 4, 7, 11 ... bildar differensen en aritmetisk/linjär talföljd (första differensen) 1, 2, 3, 4 ..., medan den andra differensen (differensen mellan differenserna) är konstant och lika med 1.

I studien används termerna aritmetisk, rekursiv, geometrisk och kvadratisk talföljd. Även begreppet *visuellt talmönster* förekommer i studien, eftersom det finns en sådan uppgift på vårt för- och eftertest. I ett visuellt talmönster får eleverna stöd i en bild och det består av ett antal figurer/komponenter där storleken på figuren/komponenten ändras succesivt utifrån en additiv struktur (Papic & Mulligan, 2007). Dessa mönster kan också vara konstruerade genom att en komponent ökar i antal medan den andra hålls konstant, vilket är fallet i den uppgift som vi använder oss av i studien.

Att arbeta med talföljder och kunna se dess delar och hur de hänger ihop är ett sätt att kunna erfara tal och siffror. Om vi vill erfara en talserie kan vi göra det på olika sätt. Vi kan erfara det som en serie med tolv ental, 5 8 1 2 1 5 1 9 2 2 2 6 eller som en talserie där skillnaden mellan talen växlar mellan tre och fyra, 5 8 12 15 19 22 26. De som erfar en serie tal på det senare sättet har en möjlighet att se regelbundenheten. För att kunna se denna regelbundenhet måste talen vara grupperade på ett särskilt

sätt. En förutsättning för att hitta mönstret är att kunna gruppera talen och upptäcka strukturen i talserien (Marton & Booth, 2000).

I en brittisk studie (Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall, 1998) undersöktes vilka strategier 7–11-åringar använder för att analysera och beskriva linjära och kvadratiske talföljder. Man fann att eleverna letade efter skillnader mellan talen i talföljden, differensen mellan skillnaderna, egenskaper i skillnaden, talens egenskaper (vanligtvis jämna och udda tal) och produkter i multiplikationstabellerna. Eleverna kombinerade även talen för att få nästa tal i talföljden. En slutsats av studien är att eleverna bör erbjudas att arbeta med olika slags talföljder och utmanas med uppgifter där en och samma talföljd kan fortsätta på flera sätt, exempelvis 1, 2, 4 ... som kan fortsätta med 1, 2, 4, 8, 16 ... eller 1, 2, 4, 7, 11 ... för att utveckla förmågan att upptäcka talföljder och generalisera denna kunskap. Att det är viktigt att eleverna erbjuds möta och arbeta med talföljder uppbyggda med olika strukturer poängterar även Frobisher och Threlfall (1999) liksom Heiberg Solem, Alseth och Nordberg (2011).

Hargreaves m fl. (1999) har gjort en studie där ett flertal elever visade god förmåga att utifrån en serie av tal kunna avgöra om det var en talföljd eller inte och beskriva denna. När eleverna skulle skapa egna talföljder och beskriva en regel för talföljdens uppbyggnad dominerade talföljder som bestod av produkterna i olika multiplikationstabeller. I en studie gjord av Zazkis och Liljedahl (2002) där lärarstudenter uppmanades skapa egna talföljder visas liknande resultat. Studenterna skapade från början aritmetiska talföljder inom lågt talområde och med multiplikativ struktur (som en multiplikationstabell). Efter ytterligare uppmaningar att ge andra förslag valde fortfarande många talföljder med en struktur utifrån en konstant skillnad mellan talen, dock inom högre talområde och talföljder där skillnaden mellan talen ökade respektive minskade.

Warren och Cooper (2007) har i en studie med åttaåringar i Australien, undersökt vad lärare kan göra för att få elever att se och beskriva visuella växande mönster. Enligt Warren och Cooper har forskning visat att de svårigheter ungdomar visar upp inom algebra härstammar från brister i den tidiga undervisningen. Om eleverna inte får stöd i form av lärares instruktioner har de svårt att hitta okända steg och positioner i växande mönster. Eleverna behöver även få hjälp med att se vad i ett växande mönster som förändras och med vilken regelbundenhet. Annars fokuserar de endast på en komponent. Barn i Australien har generellt liten erfarenhet av växande visuella mönster. Studien visar att det finns aktiviteter i klassrummet som stödjer elevernas lärande och tänkande: att använda konkret material, att mötas av specifika frågor som hjälper eleverna att generalisera och att tydliggöra förhållandet mellan mönstersekvensen och dess position i talföljden (Warren & Cooper, 2007).

De refererade studierna ger alla förslag på aktiviteter och/eller arbetssätt som kan främja utvecklingen av att upptäcka och skapa talföljder. Ingen av dem beskriver emellertid vad eleverna måste lära sig för att behärska detta, det vill säga vad som är kritiskt för att utveckla förmågan.

Teori och metod

Variationsteorin

Inom den fenomenografiska forskningen beskrivs människors kvalitativt olika sätt att uppfatta fenomen i sin omvärld.

Fenomenografen är en forskningsansats inom främst pedagogisk och didaktisk forskning som avtäckar innebördsteman och som för sitt berättigande förutsätter att det finns företeelser i världen som har olika innebörd för olika människor (Kroksmark, 2007).

Variationsteorin, som har ett teoretiskt perspektiv på lärande, har vuxit fram ur fenomenografen. Medan fenomenografen intresserar sig för hur eleverna uppfattar ett lärandeobjekt så fokuserar variationsteorin på vad som är kritiskt för att utveckla ett visst kunnande eller förmåga (Marton & Booth, 2000). Enligt variationsteorin uppstår lärande först när man uppfattar omvärlden på ett nytt sätt. För att man ska kunna urskilja det nya måste vissa delar i det man ska lära vara konstanta och andra varieras (Runesson, 1999). Om man ska lära sig känna igen fåglars sång kan man först inte urskilja någon speciell, utan man hör bara fågelsång. När man sedan fått erfara att fåglar har olika läten kan man så småningom särskilja arternas unika sång.

Lärandeobjekt och kritiska aspekter är centrala begrepp inom *variationsteorin*. Lärandeobjektet är en förmåga som består av två delar, det direkta och det indirekta lärandeobjektet (Marton, Runesson & Tsui, 2004; Wernberg, 2009). Det direkta beskriver innehållet i det som lärs, alltså lärandets *vad*-aspekt. Det indirekta lärandeobjektet avser den förmåga eller färdighet som ska utvecklas, alltså *hur* eleven ska visa sin färdighet (Holmqvist, 2006). Läraren bör planera sin undervisning med hänsyn till såväl det indirekta som det direkta lärandeobjektet. Det läraren avser att undervisa om kallas det intentionella lärandeobjektet. Det som eleven sedan i praktiken får möjlighet att lära kallas det iscensatta lärandeobjektet. Den kunskap och förmåga eleven tillägnar sig under lektionen är det erfarna lärandeobjektet och kan studeras genom ett eftertest (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Vi kommer senare i texten att sätta dessa begrepp i relation till metoden *learning study*, som vi har använt oss av i studien.

För att nå framgång i undervisningen måste läraren ta reda på vilken uppfattning av lärandeobjektet som den lärande har. Lärandeobjektet måste avgränsas för att vi ska veta vad som ska ingå och inte ingå i detsamma (Holmqvist, 2006). I vår studie började vi med att inventera vilka olika slags mönster vi kände till. Vi insåg tidigt att vi var tvungna att avgränsa oss och valde lärandeobjektet *att kunna beskriva vad som kännetecknar olika talföljder*.

Begreppet kritiska aspekter används för att beskriva det som är nödvändigt att få syn på för att lära sig något nytt. För att få syn på och förstå lärandeobjektet måste de kritiska aspekterna hittas av läraren genom konstruktion av för- och eftertest, analyser av för- och eftertestens resultat samt analyser av filmade lektioner. Beroende på elevernas tidigare erfarenheter av lärandeobjektet kan de kritiska aspekterna vara

olika för olika elever. För att lärande ska möjliggöras måste läraren synliggöra de kritiska aspekterna för eleverna genom ett mönster av variation, så att det kan kopplas till elevens erfarenhet av lärandeobjektet (Kullberg, 2010; Marton, Runesson & Tsui, 2004).

De fyra mönster av variation som Marton, Runesson och Tsui (2004) beskriver är: kontrast, generalisering, separation och fusion. Kopplat till vår studie skulle dessa teoretiska begrepp kunna beskrivas på följande sätt:

- *Kontrast*: För att veta vad något är behöver man också veta vad det inte är. När vi i vår learning study använder lärandeobjektet talföljd så jämförs det med en talserie som inte bildar något mönster för att synliggöra motsatsen, exempelvis 1, 2, 4, 9, 11, 16 ...
- *Generalisering*: För att förstå det specifika behöver man uppleva det genom olika representationer. En aspekt, som inte förändrar fenomenet men visar på en bredd, ska varieras. För att förstå vad en talföljd är måste man erfara olika typer av talföljder. Ett flertal exempel på olika sorters talföljder presenterades (en sorts talföljd åt gången) för att urskilja viktiga egenskaper och drag hos dessa talföljder (exempelvis aritmetiska, geometriska, kvadratiske och rekursiva talföljder), samt vad som inte är relevant (exempelvis vilket tal talföljden börjar med, riktningen på talföljden).
- *Separation*: För att kunna erfara en specifik aspekt av något och kunna separera denna aspekt från andra aspekter, måste den specifika aspekten varieras medan de andra aspekterna förblir invarianta. Till exempel det första talet i flera talföljder är samma tal men differensen är unik för varje talföljd, 3, 6, 9, 12, 15 ..., 3, 4, 6, 9, 13 ..., 3, 6, 15, 24 ...
- *Fusion*: För att lärande ska uppstå behöver eleven ta hänsyn till alla kritiska aspekter och erfara dem samtidigt. När en talföljd ska beskrivas måste eleven ha tillägnat sig alla kritiska aspekter för att kunna erfara dem samtidigt i en ny situation.

Metod

I början av 2000-talet utvecklade Ferenc Marton och några kollegor i Hong Kong learning study ur lesson study (Holmqvist, 2006; Kullberg, 2010). Learning study är en modell för lärares kompetensutveckling samt en ansats för forskning i praktiken med en lärandeteori som grund (Carlgren, 2012). I en learning study samarbetar lärarna och en forskare/handledare när de planerar, analyserar och reviderar lektioner. Lektionerna filmas för att kunna analyseras. Lärarna söker ta reda på ett lärandeobjekts kritiska aspekter och det är också det centrala i metoden. För- och eftertestet används för att ta reda på elevens förståelse, hitta de kritiska aspekterna, skapa det intentionella lärandeobjektet och se hur det iscensattes. Lärarna analyserar tillsammans med en handledare på ett systematiskt sätt vad som blir skillnaden i elevernas lärande vilket hela tiden står i fokus (Holmqvist, 2006; Kullberg, 2010).

I figuren på sid 71 presenterar vi en learning study-cykel med förtydligande från vår studie.

1. Val av lärandeobjekt

Cykeln inleds med att läraren väljer en förmåga eller en kunskap som eleven ska utveckla. Vårt lärandeobjekt är att kunna beskriva vad som kännetecknar olika talföljder.

2. Förtest

För att ta reda på elevernas förståelse av lärandeobjektet konstrueras ett förtest. Genom en analys av det synliggörs kritiska aspekter av lärandeobjektet.

3. Lektionen planeras av lärarna tillsammans.

Lärarna planerar och diskuterar hur aspekterna bör urskiljas och varieras.

4. Lektionen genomförs

En av lärarna genomför lektionen som filmas.

5. Eftertest

Efter några dagar genomförs ett eftertest för att se vad eleverna lärde sig.

6. Lärarna ser den inspelade lektion och reviderar den.

Filmen analyseras och med information från för- och eftertest revideras lektionen för att ev bidra med nya kritiska aspekter.

Fig 1. Fritt efter en modell av Runesson (2011).

Urval

Det empiriska materialet till vår studie har samlats in på skolan och i klasserna där vi arbetar. Det är fyra elevgrupper som har deltagit i studien – två grupper i år 4 och två i år 3. Elevantalet var till en början 62 stycken, 26 i år 3 och 36 i år 4. Efter bortfall medverkade 53 elever i studien, 24 i år 3 och 29 i år 4. Dessa elever genomförde både förtest och eftertest samt deltog i en lektion. De elever som inte medverkade vid alla eller något moment utgör studiens bortfallsgrupp. I studien redovisas endast resultat från de elever som deltagit vid samtliga datainsamlingstillfällen samt en learning study-lektion.

Analys

Det material som samlats in för analys är förtest, eftertest, sammanställningar av resultat på för- och eftertest i excelformat, videodokumentation och anteckningar från analys av filmer. Analyser i studien har skett vid ett flertal tillfällen och genomfördes i form av samtal och diskussioner gemensamt i gruppen med de fyra lärarna och en handledare från högskolan, med variationsteorin som analysverktyg. Förtestens resultat, videodokumentation från lektionerna och eftertestens resultat har studerades för att identifiera de kritiska aspekter som var avgörande för eleverna att lära sig om

talföljder samt för att se vad som togs för givet och hur innehållet i undervisningen varierades (Fig. 2). Efter varje lektion har de kritiska aspekterna validerats genom att analysera elevernas svar på eftertestet, för att försäkra att dessa verkligen är kritiska för lärandeobjektet.

Den första analysen genomfördes efter förtestet. Rättningen av förtestet gjordes av respektive lärare efter gemensamma riktlinjer. Varje uppgift poängsattes för varje rätt delsvar i respektive talföljd. Detta gjordes med syftet att se vad som är kritiskt för eleverna för att lära sig konstruera och beskriva olika talföljder och inte i syfte att räkna antal rätta respektive felaktiga svar efter en rättningsmall. Resultaten fördes in i exceldokument gruppvis. Inom gruppen redovisades resultaten på elevnivå och på uppgiftsnivå. I förtestet analyserade vi även elevernas förmåga att beskriva talföljder med egna ord genom att undersöka elevernas ordval i deras beskrivningar. Kvaliteterna i deras egna beskrivningar ingick också i analysen. Vid analysen av förtestet identifierades några kritiska aspekter inom talföljder och mönster. Den gav oss ett underlag för att planera lektion 1.

Efter genomförd lektion 1 och eftertest gjordes analysen på samma sätt som efter förtestet. För att se om eleverna har utvecklat förmågan att beskriva talföljder med egna ord listades och jämfördes elevernas beskrivningar på för- och eftertest för att se om de nu använde fler matematiska begrepp.

I analysen av videodokumentationen iakttog vi hur våra kritiska aspekter varierades och hur vårt lärandeobjekt iscensattes och varit möjligt att erfara. I analysen av lektionen fokuserade vi på vilka möjligheter eleverna gavs för att utveckla sina kunskaper kring talföljder. Vi uppmärksammade och diskuterade också de ord läraren använde i lektionen och på vilket sätt ordvalet påverkade elevernas förståelse för lärandeobjektet. Varje film analyserades gemensamt vid flera tillfällen för att upptäcka nya kritiska aspekter eller enskilda elevers öppningar för variationer.

Inför varje ny lektion analyserades eftertesten och filmerna noga enligt beskrivningen ovan, för att eventuellt upptäcka nya kritiska aspekter och för att ge oss möjlighet att variera lärandeobjektet för eleverna.

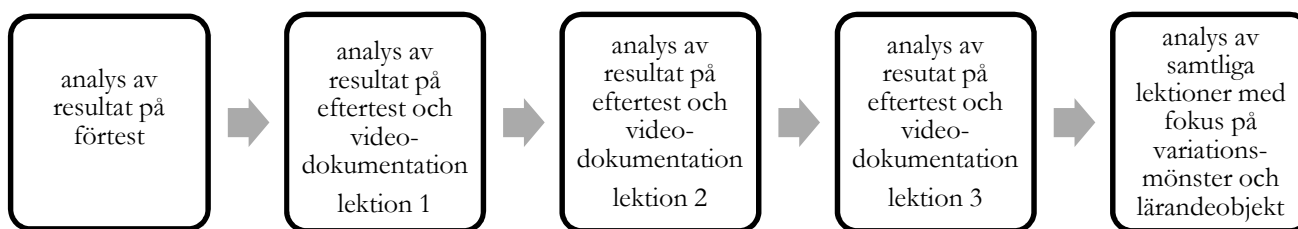


Fig 2. Analysens arbetsgång och innehåll.

Resultat

I detta avsnitt presenteras resultatet av förtestet som låg till grund för det fortsatta arbetet i vår learning study. Sedan följer resultat av eftertester och analyser av studiens tre lektioner. Därefter presenteras de kritiska aspekterna med exempel, och resultatdelen avslutas med hur kritiska aspekter varierades under studiens lektioner.

Resultat av förtest

Vårt förtest innehöll talföljder och mönster av olika slag. Uppgifterna testade om eleverna hade förståelse för aritmetiska talföljder med upprepad addition (43, 46, 49 ...), aritmetiska talföljder med upprepad subtraktion (35, 29, 23 ...), talföljder som kan bli både geometriska och kvadratiska (6, 12 ...), rekursiva talföljder där de två föregående talen kombineras för att få nästa tal i talföljden (1, 1, 2, 3, 5, 8 ...), geometriska talföljder där varje tal bildas av att det föregående talet multipliceras med två (10, 20, 40, 80 ...) och talföljder som varierar i riktning (talföljden läses lodrätt). Det innehöll också ett visuellt talmönster med ett växande och ett konstant inslag (○●●○●●?? ●●●●), visuellt talmönster med figuralt där mönstret växer systematiskt (se bild nedan) och hur man generaliserar numeriska utsagor ($6+6=?$, $16+6=?$, $26+6=?$). På tre av uppgifterna uppmanades eleverna förklara hur talföljderna är uppbyggda för att se deras förmåga att beskriva vad som kännetecknar talföljderna.



Visuellt talmönster med figuralt

Resultatet från förtestet visade att ingen fråga klarades av alla elever i någon grupp. De uppgifter som minst antal elever hade klarat är rekursiva talföljder, de talföljder som varierar i riktning samt visuella talmönster med ett växande och ett konstant inslag.

Resultaten på de uppgifter där eleverna skulle beskriva talföljder med egna ord visade att kvaliteten i deras beskrivningar skiljde sig åt beroende på om eleven själv konstruerat uppgiften eller om det var en på förhand given talföljd, samt hur frågan är ställd. De talföljder som eleverna skapat själva har de till övervägande del kunnat beskriva med ord och/eller matematiska symboler. Ungefär hälften av eleverna använde ord som hänger samman med multiplikationstabellen vid den egna konstruktionen, exempelvis "uppbyggd med sjuans tabell", "med femmans produkter", "3 hopp". Några elever gjorde aritmetiska talföljder och beskrev dessa med hjälp av uttryck som "18 +2, 20+2, 22+2", "plus 11", "minus 15". Elevernas beskrivningar av den geometriska talföljden visade att de hade bristande förmåga att beskriva vad som kännetecknar talföljden, alltså att varje nytt tal i talföljden bildas genom dubbling av det föregående talet. Uppgiften som testade hur eleverna kan generalisera numeriska utsagor, och uppmanade dem att se sambanden och att beskriva mönstret, beskrevs av eleverna utifrån mönstret i entalen och tiotalen i summan.

Analysen av resultaten från förtesten gav oss insikter i att eleverna inte har förmågan att beskriva talföljder, förutom de aritmetiska talföljderna. De första fyra kritiska aspekterna, *upptäcka relationen mellan talen i talföljden*, *upptäcka relationen mellan talen och hela talföljden*, *upptäcka det som inte syns* och *att upptäcka att talföljder kan variera i riktning* framkom i analysen (se sida 76 och 77 för detaljerad beskrivning av kritiska aspekter). Dessa kritiska aspekter gav oss grunden till det intentionella lärandeobjektet i den första lektionen. Eftersom eleverna visade god förståelse för uppgif-

ten mönster med figuraltal och eftersom fördjupandet i generaliserande av numeriska utsagor skulle vidga vårt lärandeobjekt, togs dessa bort från eftertestet.

Resultat av eftertest och analys lektion 1

Lektion 1 bjöd eleverna på många exempel med aritmetiska talföljder som låg inom talområdet 0–70. Lärandeobjektet att *kunna beskriva vad som kännetecknar en talföljd* gjorde att mycket tid ägnades åt att skriva en regel till varje talföljd för att ge eleverna förutsättningar att kunna beskriva talföljder med egna ord. Läraren gav på detta sätt eleverna ord de själva kunde använda för att beskriva en talföljd. Detta blev en ”utantillregel” och läraren styrde under lektionen in eleverna på det ”rätta”. Läraren använde orden ökar/minskar för att beskriva talföljden. Elevaktiviteterna bestod av att enskilt skapa egna talföljder som provades på kamraterna. Läraren gick runt under aktiviteten för att hitta olika exempel på talföljder men eleverna följde i stort sett lektionsmallen. Lektionen innehöll inga egentliga utmaningar för eleverna utan hölls inom ett relativt lågt talområde och med få variationer på talföljder. Exempel: 6, 13, 20, 27 ... och regeln som beskriver denna talföljd: talföljden ökar med sju hela tiden.

Under lektion 1 iscensatte vi de fyra kritiska aspekterna som vi hittat genom förtestet. Resultatet på eftertestet efter lektion 1 visade att eleverna inte kunnat erfaras lärandeobjektet genom dessa kritiska aspekter tillfredsställande då bara 55 procent av eleverna hade minst 75 procent rätt. Det var tre frågor som alla elever svarade rätt på. Vi upptäckte att vi tog för givet att eleverna kunde generalisera utifrån de talföljder vi presenterade. Analys av videolektionen visade att viss *generalisering* iscensattes då tre olika varianter av talföljder presenterades, aritmetiska talföljder och kvadratiske talföljder samt talföljder som varierar i riktning. Variationsmönstret *separation* iscensattes då vi varierade talen i de aritmetiska talföljderna med konstant skillnad och då vi började flera talföljder med samma tal men varierade storleken på skillnaden mellan talen i de kvadratiske talföljderna. *Fusion* iscensattes när vi synliggjorde mönstret mellan talen och i hela talföljden. *Kontrast* iscensattes inte alls under lektionen.

Resultatet och analysen av lektion 1 och eftertestet gav oss grunden till planeringen av lektion 2. Vi ersatte den kritiska aspekten *att upptäcka att talföljder kan variera i riktning* med en ny, *att upptäcka talföljders olika uppbyggnad* och planerade en lektion med variationsmönstret kontrast och arbete inom högre talområden. Lektion 2 skulle också innehålla mer interaktion mellan eleverna för att möjliggöra en diskussion mellan elever med olika kunskaper om olika sätt att beskriva vad som kännetecknar olika talföljder.

Resultat av eftertest och analys lektion 2

I lektion 2 ägnades betydligt kortare tid till aritmetiska talföljder än i lektion 1. Olika exempel på samma sorters talföljder visades samtidigt, där exempelvis skillnader mellan talen i en aritmetisk talföljd var samma medan första talet i talföljden varierade (generalisering). För att möjliggöra för eleverna att erfaras den specifika aspekten att det finns en relation mellan talen i talföljden och hela talföljden arbetade vi med talföljder där första talet var invariant medan differensen var unik för varje talföljd

(separation). Talområdet var betydligt högre än i lektion 1. Det ägnades mycket mindre tid till att skriva regler till talföljderna, det sammanfattades kort efter färdigt moment. Läraren använder orden *skillnad mellan talen* för att beskriva talföljderna. Elevaktiviteterna var fler i lektion 2 och det pågick interaktion mellan eleverna under elevaktiviteten. Eleverna uppmanades att konstruera talföljder parvis och under aktiviteten var läraren aktiv genom att gå runt bland eleverna och leta exempel som öppnade för variation av talföljder. Dessa exempel lyftes i lärarens fortsatta aktivitet. I lektion 2 fick eleverna sortera ett antal olika talföljder i olika kategorier. Genom att dela ut flera olika typer av talföljder och också serier av tal utan mönster fick eleverna möjlighet att uppmärksamma likheter och skillnader mellan olika talföljder samt mellan serier av tal som bildar, respektive inte bildar, en talföljd (kontrast och fusion). Eleverna hade kategorierna skrivna på tavlan, men läraren betonade inte dessa kategorier tydligt. Vid slutet av lektion 2 lyfte läraren fram de talföljder som skulle uppmärksammas för att ge eleverna en ännu större möjlighet att få syn på de kritiska aspekterna.

Efter lektion 2 var resultatet bättre än efter lektion 1, en större andel elever (77 procent av eleverna hade minst 75 procent rätt) hade visat att de lärt sig om talföljder och närmat sig lärandeobjektet än vad det var efter lektion 1. Men det var fortfarande bara tre frågor som alla elever klarade av. Analysen av lektion 2 visade att alla då aktuella kritiska aspekter iscensattes. Eleverna arbetade inom ett högre talområde och interaktionen elev/lärare och elev/elev var större. Läraren tog vara på de variationer som kom från eleverna. Den nya aktiviteten, att sortera givna talföljder av olika slag, öppnade upp för alla mönster av variation: kontrast, generalisering, separation och fusion.

När vi analyserat lektion 2 insåg vi att lektion 3 endast krävde få förändringar. Dessa bestod av att eleverna i sorteringsövningen fick ett papper med fyra kategorier av talföljder inskrivna. Eleverna skulle sortera sina talföljder under rätt rubrik. Dessa kategorier är: *Skillnaden mellan talen är lika*, *Varje nytt tal bildas genom att det föregående talet multipliceras med två (dubbling)*, *Skillnaden mellan talen ökar för varje steg/tal* och *Ingen talföljd eftersom det inte är något mönster mellan talen*.

Resultat av eftertest och analys lektion 3

I lektion 3 följer momenten samma modell som i lektion 2 utom i den sista elevaktiviteten och avslutningen av lektionen. Eleverna gavs större möjlighet att diskutera och sortera talföljder för att upptäcka variationer av de kritiska aspekter vi ansåg viktiga för att synliggöra lärandeobjektet. Vid övningen med sorteringen av olika talföljder fick eleverna ett papper med färdiga kategorier, som läraren tydligt betonade, vilket bidrog till en tydligare sortering. I elevaktiviteten hade läraren en aktiv roll genom att med hjälp av frågor och samtal styra in eleverna på de kritiska aspekter vi ville att de skulle få syn på.

På resultatet av eftertestet efter lektion 3 fann vi den största andelen elever (alla elever hade minst 75 procent rätt), jämfört med eftertest efter lektion 1 och 2, som utvecklat kunskap om lärandeobjektet. Samtidigt fann vi också här de största skill-

naderna i resultat mellan för- och eftertest när det gäller antal rätt på respektive uppgift. Ingen fråga på förtestet klarades av alla elever medan det var 14 frågor i eftertestet som alla elever svarade rätt på.

Kritiska aspekter

Det eleven behöver upptäcka och tillägna sig för att förstå lärandeobjektet är de kritiska aspekterna (Marton, Runesson & Tsui, 2004; Wernberg, 2009). Efter att ha analyserat för- och eftertest samt vår videodokumentation efter lektion 1 hittade vi ursprungligen de fyra första kritiska aspekterna. Den fjärde togs bort redan efter den första lektionen eftersom analysen visade att det inte var en kritisk aspekt. Inför den andra lektionen utökades våra kritiska aspekter med den femte och efter den tredje framkom ytterligare en.

Sammanfattningsvis fann vi följande vara kritiskt för elevernas lärande inom området talföljder:

- *Upptäcka relationen mellan talen i talföljden*, vilket innebär att urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra. Eleven ska alltså förstå att det inte är en uppräknings av tal utan att det händer något mellan talen.
Exempel: 2 (+2), 4(+2), 6(+2), 8(+2) ...
- *Upptäcka relationen mellan talen och hela talföljden*, vilket innebär att eleverna behöver urskilja helheten, att det inte är tillräckligt att iaktta en mindre del av den ordnade mängden tal i talföljden. Eleven tittar bara på relationen mellan de två sista talen i talföljden och upptäcker då inte hela talföljdens uppbyggnad.
Exempel: 1 (+1), 2(+2), 4(+3), 7(+4), 11(+5), 16(+6) ... där skillnaden mellan talen ökar med ett för varje tal. Om eleven endast ser vad som händer mellan de två sista talen kan talföljden missuppfattas och fortsätta med en konstant skillnad på 5.
Exempel: 1, 2, 4, 7, 11, 16, **21**, **26** ...
- *Upptäcka det som inte syns, mellanrummen*, vilket innebär att eleverna måste få syn på det som händer i talföljden. Eleven måste förstå att det finns en regelbundenhet, ett mönster, ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet.
Exempel: 42 (+5) 47 (+10) 57 (+15) 72 (+20) 92 ... där skillnaden mellan talen ökar med 5 för varje nytt tal.
- *Upptäcka att talföljder kan variera i riktning*, vilket innebär att talföljden kan skrivas exempelvis horisontellt, vertikalt, i cirklar, i rutor, med tomma platser mitt i, med kommatecken emellan och lodrät.
Exempel: 8, 15, , , 36,
- *Upptäcka talföljders olika uppbyggnad*, vilket innebär att talföljder inte alltid är aritmetiska, exempelvis 7, 14, 21, 28. Eleverna måste upptäcka att talföljder kan vara uppbyggda på andra sätt såsom kvadratiske talföljder exempelvis 42, 43, 45, 48, 52 ... eller geometriska talföljder exempelvis 20, 40, 80, 160, 320 ...

Erixson, Frostfeldt Gustavsson, Kerekes & Lundberg

där varje tal bildas genom att det föregående talet multipliceras med ett visst tal (i detta exempel med två).

- *Upptäcka skillnaden mellan talen i talföljden*, vilket innebär att förstå att skillnaden mellan två tal i talföljden inte är detsamma som antalet tal emellan två tal på tallinjen.

Exempel: 10, 15, 20, 25, 30 ... där skillnaden mellan talen är 5 men antalet tal på tallinjen är 4.

Analysen av förtestet gav oss fyra tänkbara kritiska aspekter till lärandeobjektet *att beskriva vad som kännetecknar olika talföljder*. Efter varje ny lektionsanalys förändrades den kommande lektionen för att ge större möjlighet för eleverna att upptäcka lärandeobjektet, och kritiska aspekter togs bort eller nya lades till. För att eleverna skulle kunna urskilja de kritiska aspekterna ville vi skapa en variation kring talföljderna i lektionen. Variationen skulle hjälpa eleverna att urskilja de kritiska aspekterna och på så sätt närma sig lärandeobjektet.

Diskussion och slutsatser

Elevernas resultat på förtestet visar att deras förmåga att fortsätta och beskriva olika typer av talföljder var begränsade. Under arbetets gång har vi insett förtestets begränsningar när det gäller utformandet av testet såväl språkligt som innehållsmässigt. Trots att vi lärare var noga med att följa samma struktur vid genomförandet i våra grupper upptäckte vi efteråt att det ändå fanns skillnader. Om exempelvis någon elev hoppade över en uppgift uppmanades han/hon att försöka en stund till medan andra elever inte fick samma möjlighet. Uppgiften *Gör nu en egen talföljd. Den ska vara lagom svår för dina klasskamrater*, anser vi, begränsade eleverna med ordet "lagom" i stället för att utmana dem. Ytterligare en begränsning var att förtestet gav alltför få tillfällen att beskriva olika typer av talföljder, för att ge en tydlig bild av elevernas förmåga att beskriva dessa. Vi kunde, trots allt, utifrån testet urskilja tänkbara kritiska aspekter som efter lektionen verkligen visade sig vara kritiska aspekter.

När vi i början av studien planerade lektion 1 begränsade vi omedvetet elevernas möjligheter att upptäcka olika typer av talföljder. Vi trodde då att om vi erbjöd några få variationer av talföljder och arbete inom ett lågt talområde, 0–70, skulle det underlätta för eleverna att tillägna sig lärandeobjektet. Eftersom förtestet visade att eleverna saknade förmågan att beskriva vad som kännetecknade olika talföljder ägnades mycket tid, och stort fokus, under lektion 1 åt att ge eleverna färdiga ord och uttryck som ett slags överförande av en modell. Färdiga modeller kan begränsa elevens eget tänkande vilket kan leda till att tilltron till den egna förmågan minskar (Skolverket, 2008). Trots att vi under studiens gång läst forskning och undersökningar kring matematikundervisning som bekräftar detta, skapade vi lektion 1 med färdiga modeller och upptäckte vårt misstag först senare i studien.

En elev frågade under lektion 2 om man var tvungen att göra en talföljd som liknade lärarens exempel vilket var en aritmetisk talföljd. När eleven fick höra att det är fritt fram att konstruera vilken talföljd som helst gav eleven ett exempel på kvadratisk tal-

följd som läraren kunde ta vara på i nästa moment i undervisningen. Detta har gjort oss uppmärksamma på hur viktigt det är att lyfta elevers öppningar för variation och uppmuntra till eget tänkande och tilltro till sin egen förmåga i lärandeprocessen.

Resultaten efter lektion 1 visade att eleverna inte fått utveckla sina kunskaper nämnvärt när det gäller att beskriva vad som kännetecknar en talföljd. Detta anser vi har flera orsaker: brist på interaktion mellan lärare-elev/elev-elev, hur lektionstiden disponerades mellan lärarledd genomgång och elevaktivitet samt ett lektionsinnehåll som inte utmanar eller visar på tillräcklig variation inom området talföljder. Eleverna gavs inte möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna och erbjöds inte alla mönster av variation. Resultatet efter lektion 2 visade att åtgärder av ovanstående brister fick önskad effekt.

Marton och Booth (2000) skriver att vi erfar en talserie på olika sätt, antingen som en serie med ett antal siffror eller en talserie där vi ser ett mönster enligt vilket talserien är uppbyggd. Detta stämmer överens med hur våra elever såg de olika talföljderna vi arbetade med. Vi kunde också se att de elever som såg en serie tal på det senare sättet även hade visat förmågan att se regelbundenheten i en talföljd, precis som Marton och Booth (2000) beskriver. Det var betydligt fler elever som kunde se en regelbundenhet i talföljderna efter att vi i undervisningen möjliggjort att upptäcka relationen mellan talen i talföljden (den första kritiska aspekten). Eleverna har fått se och själva prova att gruppera tal på ett särskilt sätt och urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra.

Vi kan se vissa likheter mellan några av de kritiska aspekterna som vi har hittat och de strategier som eleverna använder för att upptäcka talföljder och generalisera sina kunskaper i studien gjord av Hargreaves med flera (1998). Fyra av de sex beskrivna strategierna i Hargreaves med flera (1998) studie handlar om att eleverna söker efter talens inbördes relationer i talföljden, vilket innefattas av vår första kritiska aspekt som benämns *Upptäcka relationen mellan talen i talföljden*. En av de aktiviteter i klassrummet som stödjer elevernas lärande och tänkande beskrivna i Warrens och Coopers (2007) studie är aktiviteten där de får hjälp med att se vad i ett växande mönster som förändras och med vilken regelbundenhet. Elever som inte fick denna hjälp fokuserade endast på en komponent i det växande mönstret. Den andra kritiska aspekten i vår studie, *Upptäcka relationen mellan talen och hela talföljden*, innebär att eleverna behöver urskilja helheten då det inte är tillräckligt att fokusera bara någon del av den ordnade mängden tal i talföljden för att kunna beskriva den. Om eleven exempelvis bara iakttar relationen mellan de två sista eller två första talen i talföljden blir det svårt för henne/honom att upptäcka mönstret som talföljden är uppbyggd efter.

Vi har funnit att det inte räcker att förstå och se att det händer något mellan talen och att urskilja sambandet mellan talen (första kritiska aspekten). Eleven måste förstå att detta samband är ett regelbundet mönster som kan varieras i oändlighet för att utveckla sin förmåga att konstruera och beskriva talföljder. I studien sammanfattar vi detta i den tredje kritiska aspekten, *Upptäcka det som inte syns – mellanrummen*. Även den sjätte kritiska aspekten, *Upptäcka skillnaden mellan talen i talföljden*, skiljer vår studie från de andra som vi beskrivit tidigare. För att erhålla en förståelse av lä-

randeobjektet måste eleverna förstå att skillnaden mellan två tal i talföljden inte är detsamma som antalet tal emellan två tal på tallinjen.

I samtliga studier som vi refererar till kan man se tendensen att elever/studenter använder sig av produkterna i multiplikationstabellerna när de skapar egna talföljder (Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall, 1998; Hargreaves m fl., 1999; Zazkis & Liljedahl, 2002). Detta är något som även våra elever använde sig av, särskilt i förtestet. Resultaten på eftertesten efter den andra och tredje lektionen visade att det förekom en betydlig rikare variation av olika talföljder i elevernas exempel.

Avslutande reflektioner

Under analysarbetet kunde vi konstatera att de två sista lektionerna blev mycket bättre jämfört med den första. Under arbetets gång har våra kunskaper om variationsteorin fått oss att se på sambandet mellan undervisning och lärande med nya ögon. Vi har utvecklat förmågan att se lärandeobjektet på ett nytt sätt (Holmqvist, 2006). Trots att vi från början var så nöjda med den första lektionen, insåg vi efter ingående analyser av inspelad lektion och elevernas resultat på eftertestet, att lektionen radikalt behövde förändras. Insikten om detta fick oss som lärare att konstatera hur många misslyckade "förstalektioner" vi har bakom oss. Kunskaper om variations-teorin har hjälpt oss att se på lärandeobjektet med nya ögon och utforska elevernas lärande i relation till undervisningens innehåll. Vi har lärt oss att se hur elevernas lärande reflekterar vår undervisning (Runesson, 2011, personlig kommunikation) och vi har blivit mer och mer medvetna om hur mycket vi har kvar att lära.

Sättet på vilket lärandeobjektet presenteras, varierar och bearbetas under lektionen har stor betydelse för resultatet. Eleven måste få erfara en variation av lärandeobjektet så att det blir möjligt att generalisera, det vill säga att använda sin kunskap i nya situationer. Vår studie har inneburit att vårt förhållningssätt har skiftat fokus från elevens förutsättningar till lärarens sätt att undervisa kring lärandeobjektet. Det viktigaste är inte metoder, arbetssätt eller grupper utan hur vi som lärare möjliggör lärande för eleverna.

Frågorna som vi ställer oss är: Vad måste eleverna få syn på för att lärande ska uppstå? Vilka tidigare erfarenheter av lärandeobjektet har eleverna? Fick eleverna möjlighet att lära det som var avsett att lära eller gav lektionen ett annat resultat? Tar vi som lärare tillvara elevernas egna öppningar för variation? Det sistnämnda kan ge oss lärare exempel på elevers missuppfattningar och få oss att upptäcka eventuella nya kritiska aspekter. Under studien har vi blivit mer uppmärksamma på elevernas egna öppningar för variation vilket visade sig i lektion 2 och 3. Fokus under våra kollegiala diskussioner ligger numera kring vad i det aktuella lärandeobjektet vi ska behandla i undervisningen, vilken förmåga eleverna ska utveckla samt vilka förkunskaper och uppfattningar eleverna har. Vad tar vi som lärare för givet om elevernas förmågor och kunskaper som hindrar lärandet (Marton & Booth, 2000)?

Referenser

- Algebra för alla*. (1998). Nämnaren. Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs Universitet.
- Berglund, L. (2009). *Tal och mönster*. Lund: Studentlitteratur.
- Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber Ekonomi.
- Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Vol. 1 Iss: 2, s. 126–139.
- Carlgren, I. & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundets förlag.
- Frobisher, L. & Threlfall, J. (1999). Teaching and Assessing Patterns in Number in Primary Years. I A. Orton. (red.) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 84–103). London: Cassell.
- Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24:3, s. 315–331.
- Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's Strategies with Linear and Quadratic Sequences. I A. Orton. (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 67–83). London: Cassell.
- Heiberg Solem, I., Alseth, B. & Nordberg, G. (2011). *Tal och Tanke – matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3*. Lund: Studentlitteratur.
- Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur.
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs Universitet.
- Kroksmark, T. (2007). *Fenomenografisk didaktik – en didaktisk möjlighet*. Didaktisk Tidskrift Vol. 17, No. 2–3.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Gothenburg Studies In Educational Sciences 293. <http://hdl.handle.net/2077/22180>.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. M. (2004). The Space of Learning. I Marton, F. & Tsui, A. B. M. (red). *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3–40). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
- Matematik – ett kommunikationsämne*. (1996). Nämnaren. Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs Universitet.
- Mouwitz, L. (2004). *Bildning och matematik. Rapport 2004:29 R*. Högskolverket Falköping: Elander Gummessons AB.
- Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. I A. Orton. (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 104–120). London: Cassell.
- Papic, M. & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. I J. Watson, & K. Beswick (red.), *Mathematics: Essential research, essential practice. (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart)*, Vol. 2, s. 591–600. Adelaide: MERGA.

Erixson, Frostfeldt Gustavsson, Kerekes & Lundberg

- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. (Göteborg Studies in Educational Sciences, 129). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Runesson, U. (2011). *Lärares kunskapsarbete – exemplet learning study: Forskning om undervisning och lärande*: Stockholm: Stiftelsen SAF i samverkan med Lärarförbundet.
- Runesson, Ulla. Professor i pedagogik vid Högskolan för lärande och kommunikation, Jönköping. (2011). *Föreläsning "Samproducerad kunskap – Av lärare för lärare"*. HLK, 16 augusti.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.
- Skolverket. (2005). *En sammanfattning av TIMSS 2003*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Rapport 323. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009). *TIMSS Advanced 2008. Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*. Rapport 336. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009). *Analyschema i matematik för åren före årskurs 6*. www.skolverket.se
- Skolverket. (2011). *Lgr11. Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, 2011*. Stockholm: Fritzes.
- Warren, E. & Cooper, T. (2007). Generalizing the Pattern Rule for Visual Growth Patterns: Actions that Support 8 Year Olds' Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), s. 171–185.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Umeå: Umeå Universitet.
- Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, s. 379–402.

Variation av undervisningsinnehåll för att möjliggöra urskiljning av kritiska aspekter av begreppet densitet

J Magnusson & T Maunula

Denna artikel fokuserar undervisning om begreppet densitet och svårigheterna att få elever att lära sig det vi önskar. Syftet är att beskriva resultaten av en Learning study; kritiska aspekter av densitetsbegreppet samt en fördjupad förståelse av detta undervisningsinnehåll. Studien genomfördes i skolår 7 och 8 och målet var att få elever att kunna urskilja densitet hos olika gaser, vätskor och fasta föremål. Teoriramverket är variationsteoretiskt och i artikeln beskrivs hur denna teori om lärande kom att användas i praktiken av lärare, både före, efter och i undervisning. Resultatet av studien blev att vi lärare mer distinkt kunde urskilja kritiska aspekter för densitetsbegreppet och att vår förståelse av lärandeobjektet fördjupades genom att vi provade ut olika kritiska aspekter i undervisning. Vi menar att dessa aspekter kan ses som ett ämnesdidaktiskt bidrag till NO-undervisning. Dessutom beskrivs en undervisningssekvens om densitet, som genomförs efter studien, som ett exempel på de mer långtgående effekterna som vi menar att learning study kan ge.

LEARNING STUDY HAR UNDER DE SENASTE ÅREN blivit en allt vanligare företeelse i den svenska skolan och sedan introduktionen 2003 har hundratals lärare prövat minst en learning study i sitt klassrum (se till exempel Skolverket, 2011). Vilken sorts kunskaper om undervisningsinnehållet kan utvecklas i en learning study? I denna artikel beskriver vi resultat och slutsatser från en learning study om densitet samt diskuterar de konsekvenser dessa upptäckter fick för vår syn på undervisningsinnehållet. Densitet är en fysikalisk egenskap hos ett ämne som påverkar vardagliga företeelser som till exempel varför föremål flyter eller sjunker och hur vindar och



Joakim Magnusson, 4–9-lärare i matematik, slöjd och NO samt forskarstuderande i pedagogiskt arbete vid Göteborgs universitet.



Tuula Maunula, 4–9-lärare i matematik och NO samt forskarstuderande i pedagogiskt arbete vid Göteborgs universitet.

strömmar i havet uppstår. Om vi vill att elever ska lära sig att förstå fenomen som dessa behöver uppfattningar som relaterar till hur lätt, tungt, stort eller litet något är utmanas, då de är uppfattningar som ger uttryck för att det är vikt och volym snarare än densitet som fokuseras. Eftersom densitet relateras till både volym och vikt är det ett komplext undervisningsinnehåll, som vi av erfarenhet vet att våra elever har haft svårt att lära sig.

Bakgrund

I januari 2003 påbörjades ett samarbete mellan forskare från Göteborgs universitet och lärare från två skolor i Öjersjö utanför Göteborg. Syftet med samarbetsprojektet var att introducera och pröva learning study som forsknings- och skolutvecklingsmodell i Sverige (se till exempel Kullberg, 2010). Totalt genomfördes nio studier, samtliga i matematik, med elever i åldrarna 6 till 15 år. Då projektet avslutats bestämde sig de deltagande lärarna och skollädares för en fortsatt implementering av learning study som skolutvecklingsmodell. Lärare med erfarenheter från de tidigare studierna fungerade nu som handledare för andra lärare i varierande ämnen. Sedan introduktionen för drygt tio år sedan har totalt 23 learning studies genomförts på de båda skolorna. Denna studie är en av dessa och den genomfördes av fem lärare¹ i NO och i fyra olika klasser i skolår 7 och 8. En av lärarna, som hade deltagit i fyra studier i matematik och varit handledare i en av dessa, fungerade som handledare för skolans första studie om ett naturvetenskapligt begrepp, densitetsbegreppet. Samtliga lärare hade deltagit i learning study innan denna studie påbörjades och flera hade varit handledare för andra studier.

Syfte och frågeställningar

Syftet med artikeln är att beskriva hur learning study kan bidra till att fördjupa lärares förståelse av ett undervisningsinnehåll.

Frågeställningarna är:

- Vilka aspekter av densitetsbegreppet är kritiska för elevernas förståelse?
- Hur utvecklas lärarnas uppfattning av fenomenet under en learning study?

Teoretiskt perspektiv: Variationsteori

I denna studie, liksom i flertalet av learning studies hittills, är variationsteorin den teori om lärande som används som teoretiskt ramverk. Lärande ses ofta i vardagliga sammanhang som en kunskapsökning, men i ett variationsteoretiskt perspektiv beskrivs istället lärande som förändringar i sätt att se (Marton & Booth, 1997). Det kan innebära att man till exempel helt förändrar uppfattning om något, som att förändra sin syn på varför det blåser, från att träden ruskar fart på vinden med sina löv till att det handlar om luftmassor som förflyttas på grund av tryckskillnader. Detta exempel innebär att man helt lämnar sitt gamla paradig. Det kan även innebära att

1. Av dessa fem är artikelns författare två. Joakim Magnusson var handledare och Tuula Maunula var lärare i lektion 4.

man gör allt mer distinkta urskiljningar och till exempel lär sig se fler nyanser av brunt eller att man lär sig att urskilja flera möjliga perspektiv på fenomenet trängsel-skatt, men det gemensamma är att lärande innebär förändringar i sätt att se fenomen. Variationsteorin har utvecklats från den fenomenografiska forskningsansatsen, där skillnader mellan uppfattningar om olika fenomen undersöks och beskrivs (Marton, 1981). Ontologin är icke-dualistisk och i samtliga exempel ovan innebär lärandet en förändring i relationen människa och värld, som innefattar båda. För att kunna göra urskiljningar är en förutsättning att man kan jämföra aspekter. Jämförandet är själva grunden för variationsteorin, eftersom lärande är urskiljandet av olikheter (Marton & Booth, 1997).

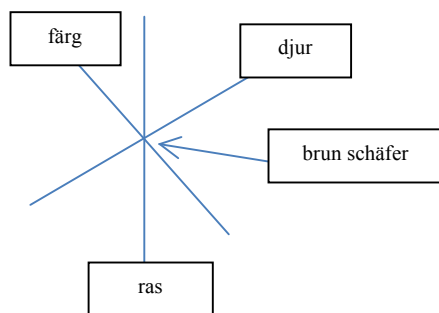
Centrala begrepp inom det variationsteoretiska ramverket, som lärandeobjekt, kritiska aspekter, dimensioner av variation samt variationsmönster, används som verktyg i en learning study. Dels används teorins syn på lärande som utgångspunkt i studierna, eftersom man eftersträvar en förändring i sätt att uppfatta fenomen hos eleverna, dels används variationsmönster i både planering, genomförande och analys av lektionerna för att uppnå lärande (se till exempel Lo & Marton, 2012). Vi menar att en av grundpelarna för variationsteorin är att i undervisning utgå ifrån elevers existerande sätt att se. Till exempel betonar Lo (2012) vikten av att i undervisning skapa en kontrast mellan olika sätt att uppfatta fenomen, till exempel mellan olika elevers intuitiva uppfattningar och en mer naturvetenskapligt vedertagen, för att öka möjligheterna till lärande.

Allt lärande har en innehållslig dimension och *lärandeobjektet* beskriver det avgränsade fenomen och den förmåga som eleverna ska lära sig i undervisningen, utifrån de deltagande lärarnas perspektiv (se till exempel Wernberg, 2009, Häggström 2008). Man tar ofta sin utgångspunkt i styrdokument för att därefter specificera och konkretisera vad man vill uppnå med lektionen genom att ställa frågor som; vad är det vi vill att våra elever ska lära sig och vad innebär det att kunna det? Samtidigt väljer man ofta ett lärandeobjekt som man upplever att eleverna har svårt att förstå, något som är komplext att undervisa om. För att lära sig ett lärandeobjekt behöver vissa aspekter urskiljas. Ska man till exempel förstå prisbildning måste aspekterna tillgång och efterfrågan urskiljas (Marton & Pang, 2006). Att kunna urskilja dessa är avgörande för elevernas förståelse och de utgör *kritiska aspekter* för fenomenet prisbildning. I en learning study kan de kritiska aspekterna ses som ett verktyg, då man börjar med att formulera hypotetiska kritiska aspekter och sedan undersöker och omformulerar dessa i en cyklisk process, men de kan även ses som själva resultatet av studien och då bli ett kunskapsbidrag i ämnesdidaktik. Eftersom lärandeobjektet konstitueras av de kritiska aspekterna kan man beskriva lärandeobjektet efter studien genom att beskriva dess kritiska aspekter. För att kritiska aspekter ska kunna urskiljas krävs en variation i just dessa aspekter (se till exempel Marton & Pang, 2006). Om alla toner vore identiska skulle ton tappa sin innebörd och olika röster skulle till exempel inte gå att urskilja (Carlgren & Marton, 2000).

Aspekterna kan i en undervisningssituation, när man har ett visst syfte, tydliggöras i *variationsmönster* (se till exempel Lo, 2012). Det finns en poäng i att skapa

kontrast när man vill möjliggöra för elever att urskilja ett nytt fenomen eller begrepp, medan *generalisering* kan vara bättre när det gäller att lära sig att bortse från vissa saker, som att vinklar är vinklar även om de inte ligger horisontellt i planet. Vi ser dessa två mönster som olika former av *separation*. Variationsmönstret *fusion* är istället ett mönster där flera aspekter varierar simultant. Även om det kan vara en god idé att börja i fusion, i helheten snarare än detaljerna, för att elever ska få möjlighet att urskilja den bakgrund mot vilket lärandeobjektet ska fokuseras (Marton, 2009 i Lo 2012) är det av vikt att även låta aspekter varieras och hållas konstanta i olika mönster i undervisningen. När enskilda aspekter är urskilda kan fusion åter användas för att relatera delarna till varandra och till helheten.

Lo (2012, s. 60) beskriver med hjälp av exemplet brun schäfer skillnaden mellan kritiska värden och kritiska aspekter, där djur, ras och färg är aspekter av en brun schäfer. Dessa aspekter utgör tillsammans olika *dimensioner av variation*, där till exempel vit, svart och brun är skilda värden i aspekten färg. Om man kan urskilja en brun schäfer så innebär det samtidigt att man kan se att hund, schäfer och brun är olika värden ur aspekterna djur, ras och färg. Samtidigt har man identifierat vad det *inte* är ur aspekterna färg och djur, att det till exempel inte är en grå bondkatt. Detta kan illustreras med följande figur.



Figur 1: Dimensioner av variation av brun schäfer, Lo. (2012, s. 60. Översättning av förf.)

Metod

Learning study-cykeln

Learning study har inspirerats av den japanska och kinesiska traditionen att systematiskt och djupgående analysera och undersöka den egna undervisningen med hjälp av så kallade Lesson study (Lo m fl, 2005). I detta avsnitt beskrivs några gemensamma drag och karakteristiska skillnader. Både lesson – och learning – study är cykliska processer där lektioner kollektivt planeras och revideras allteftersom studien fortgår. I detta ingår att formulera mål för vad som ska läras och att under naturliga förutsättningar bedriva en undervisning som andra lärare observerar. Lektionen analyseras i syfte att identifiera i vilken utsträckning man lyckas nå målsättningen med lektionen. Utifrån denna analys revideras lektionsplaneringen och en ny lektionsplanering upprättas. Denna lektionsplan kan därefter testas och användas i en ny grupp med nya elever (Runesson & Gustafsson, 2012). Lektionsplaneringarna i en lesson study kan se olika ut men de har gemensamma drag då

de på detaljnivå behandlar lärares och elevers agerande, aktiviteter och förväntade respons på undervisningen (Runesson & Gustafsson, 2012). Morris & Hiebert (2011) menar att dessa planeringar representerar den kunskap som krävs för att undervisa och hjälpa eleverna att nå de mål man satt upp för lektionen. Denna kunskap ska kunna föras vidare och vidareutvecklas av andra.

I en learning study däremot studerar man hur lektionens innehåll behandlas, vilket innebär att den kunskap som produceras under studiens gång dokumenteras på ett annat sätt. Skälet är att då man i slutet av nittioalet, med inspiration från lesson study, utvecklade learning study i Hong Kong och Sverige, även tillförde en specifik teori om lärande; variationsteorin (Runesson & Gustafsson, 2012). Det som dokumenteras är de kritiska aspekter som under studiens gång identifierats samt de variationsmönster som planerats inför lektionerna. De kritiska aspekterna är relaterade till olika uppfattningar av lärandeobjektet. Att ta reda på elevernas aktuella uppfattningar av lärandeobjektet är därför en av utgångspunkterna i en learning study. Detta görs med hjälp av skriftliga och/eller muntliga förtester. De förändringar i elevers uppfattningar som skett under lektionerna analyseras efter undervisning med hjälp av eftertester.

Tidigare forskning²

Det har gjorts omfattande studier av hur elever uppfattar densitetsbegreppet, uppfattningar som man med hjälp av undervisningsaktiviteter på olika sätt försöker utmana och vidareutveckla. Vi beskriver denna forskning under tre olika rubriker; att betrakta densitet på skilda sätt, elevuppfattningar om näraliggande begrepp samt undervisning om densitet.

Att betrakta densitet på tre skilda sätt

De flesta av studierna i denna översikt tycks behandla densitet på en fysikalisk partikelnivå eller i form av matematiska beräkningar där volym och massa jämförs i syfte att identifiera densitet. Enligt Maclin med flera (1997) är det främst våra dagliga erfarenheter av att jämföra material av varierande vikt och volym som ligger till grund för våra intuitiva uppfattningar av densitetsbegreppet. Då till exempel material med samma volym men med olika vikt hanteras och jämförs kan antaganden om att vissa material är tyngre än andra göras. Detta är enligt författarna något som kan betecknas som en icke formell begreppsutfattning av densitet vilket skiljer sig från en mer formell vetenskaplig definition där densitet ses som ett matematiskt förhållande mellan massa³ och volym. Proportionerliga jämförelser görs då i syfte att till exempel identifiera om material av varierande vikt och volym har samma densitet det vill

2. Den forskningsgenomgång som ligger till grund för detta avsnitt är gjord efter det att vi genomförde den learning study som presenteras i artikeln.

3. Maclin m fl (1997) använder sig av benämningen vikt i stället för massa eftersom vikt ansågs vara ett mer vedertaget begrepp bland eleverna. Detta är något vi också valde att göra i vår studie och i denna artikel.

säga identifiera massa per volymenhet (se till exempel Hewson och Hewson, 1983). Vikt och volym måste då beräknas innan man med hjälp av dess kvot kan bestämma materialets densitet. Ur ett lärandeperspektiv kräver detta inte bara förståelse för proportionalitet utan även för hur man mäter vikt och volym.

Enligt Maclin med flera (1997) är den vetenskapliga definitionen viktig för att uppnå en djupare förståelse av densitetsbegreppet men den bör föregås av en mer kvalitativ icke formell förståelse där jämförelser mellan material görs utifrån resonemang kring hur eleverna uppfattar materialens vikt, volym och densitet. Ett alternativt sätt att betrakta förståelse av densitet framförs av Hitt (2005) som beskriver den på tre vetenskapliga nivåer, en makroskopisk, en symbolisk och en mikroskopisk. Den makroskopiska nivån är enligt författaren enklare för elever att förstå än den matematiskt symboliska eftersom jämförelser görs mellan material som man kan se och känna på. På den mikroskopiska nivån behandlas materia på partikelnivå och illustreras med hjälp av partikelmodeller. Hawkes (2004) och Forbes (2004) anser att allt för många elever betraktar densitet som ett resultat av den aritmetiska operationen att dela massa med volym.

Neanderthals knew no math yet knew that rock has a higher density than wood and used that knowledge to their advantage. Too many students believe that density is the result of the arithmetic operation of dividing mass by volume (Hawkes, s. 14, 2004).

Författaren avser att elever inte kan urskilja ett ämnes densitet med hjälp av numeriska värden utan att även ett kemiskt partikeltänkande måste tas i beaktande, att densitet är ett mått på hur tät massa packas. Detta innebär att man måste kunna ta hänsyn till två aspekter för att förstå vad olika densitet beror på; både atommassa och avstånd mellan atomer. Xu & Clark (2012) menar att man för att uppnå en djup förståelse måste integrera den makroskopiska och den mikroskopiska nivån. I deras indelning ingår symbolnivån (vikt per volymenhet) i den makroskopiska nivån medan den mikroskopiska nivån överensstämmer med Hawkes (2004) beskrivning. Gabel & Bunce (1994) anser att bristande förståelse för massa, volym och densitet kan kopplas till brister i förståelse av materia på partikelnivå. I Nordlab (n.d) beskrivs samma nivåer som Hitt (2005) där man menar att ämnen i kemiska reaktioner kan observeras och mätas på makronivå, förstås med hjälp av atomer och molekyler på mikronivå och med hjälp av formler, beräkningar, bilder med mera kommuniceras på representationsnivå (motsvarande Hitts symbolnivå). I den studie vi genomförde kretsade undervisningen kring den makroskopiska nivån även om vi lärare tvingades börja med att fördjupa vår egen förståelse på den mikroskopiska nivån, det vill säga vad olika densitet beror på.

Elevuppfattningar om densitet, materia, massa och volym

Volym och massa är direkt mätbara storheter medan densitet är förhållandet mellan dessa storheter. Detta gör att densitetsbegreppet är mer komplext och enligt Dawkins med flera (2008) därmed svårare att förstå. Lybeck (1981) undersökte med hjälp av elevintervjuer utförda i årskurs 7 och i årskurs 1 på gymnasiet den variation av

elevuppfattningar som uppträder om densitet och om varför ett föremål flyter eller sjunker i vatten. Dessa uppfattningar kategoriserades efter distinkta kvalitativa skillnader, enligt den fenomenografiska forskningsansatsen. Lybeck exemplifierar med hjälp av två elever kvalitativt skilda uppfattningar där den ena uppfattar att ett föremål sjunker därför att det är tungt medan den andre istället uppfattar att det beror på att föremålets densitet är större än vattnets. Den första uppfattningen ger enligt författaren uttryck för en vardagsfysikalisk förklaring medan den andra kan anses ge uttryck för en mer vedertagen fysikalisk förklaring. Tre fenomenografiska utfalls-kategorier presenteras där uppfattningarna i den första är av en enkel, absolut karaktär vilket Lybeck benämner som en *klassifikatorisk uppfattning*. Detta är uppfattningar som tar sig uttryck i att enbart en aspekt av fenomenet tas i beaktande, till exempel vikt, och aspekter som volym, densitet och relationen till vattnet som föremålet sänks ned i bortses ifrån.

Denna kategori är, enligt Lybeck, den dominerande och kan kopplas till det som av Inhelder och Piaget (1968 i Lybeck, 1981) beskrivs som fyra irrelevanta principer kring materia, som är vanligt förekommande bland elever yngre än 13–14 år. Även här beskrivs att endast *enskilda aspekter* framförs som argument till huruvida ett föremål flyter eller inte. Det kan vara föremålets absoluta vikt, föremålets absoluta volym, föremålets absoluta yta mot vätskan eller absoluta volymen av vätskan som föremålet sänks ned.

I Lybecks andra kategori, *komparativ uppfattning*, görs jämförelser mellan föremålets och vattnets egenskaper såsom tyngd och volym, där det avgörande för ett föremåls bärkraft är om det är lättare eller tyngre än något annat med samma volym. Uppfattningen att en sten sjunker för att den är tyngre än vattnet ger enligt Lybeck uttryck för att eleven underförstått kan urskilja att två lika volymer av ämnen jämförs. I den tredje kategorin, *kvantitativ uppfattning*, känner eleverna till den formella symboliska definitionen och försöker kvantifiera relationen mellan egenskaperna med hjälp av variabler. Däremot är det oklart vilken innebörd de lägger i begreppet. Vissa elever har till exempel problem att skilja mellan tyngd och densitet även om de kan uttrycka den matematiska formeln.

Herrington och Scott (2011) menar att elever i åldrarna 14–22 år ofta är bra på att lösa matematiska densitetsproblem men att de har större svårigheter att till exempel förklara varför vissa föremål flyter medan andra sjunker i olika vätskor, vilket kan tolkas som att de inte har urskilt densitet på makroskopisk nivå. Författarna pekar på två skilda elevuppfattningar av densitet. Den första uppfattningen, att ju mer massivt ett föremål är, desto högre densitet har det, oavsett dess volym, beskrivs även av Barker och Miller (1999). Detta resonemang innebär till exempel att fasta föremål har högre densitet än flytande. Den andra uppfattningen är att föremål flyter för att de är så små och lätta, vilket är en uppfattning som tyder på att volym och densitet inte tas i beaktande, beskrivs även av Krnel med flera (1998). Dessa uppfattningar tycks passa in under Lybecks (1981) tidigare beskrivna kategori där enbart en aspekt tas i beaktande.

Undervisning om densitet

I den forskning som gjorts beträffande undervisning om densitet är det de tre nivåerna – mikro, makro och symboliskt – som i varierande utsträckning behandlas. I vår forskningsgenomgång är den vanligast förekommande formen den symboliska (matematiska) nivån (Hewson & Hewson, 1983; Herrington & Scott, 2011; Hitt, 2005; Baker & Woodward, 2001; Lybeck, 1981) vilken dock oftast kombineras med någon av de andra nivåerna. Lybeck (1981) menar till exempel att elevuppfattningarna, som identifierats i fenomenografiska intervjuer om densitet och proportionalitet, behöver utmanas i undervisning vilket i Lybecks fall görs både på makronivå och på symbolisk matematisk nivå. Enligt Dawkins med flera (2008) är det viktigt att lärare förstår att elever som tycks behärska den symboliskt matematiska nivån inte nödvändigtvis förstår den bakomliggande meningen med operationerna på en makroskopisk nivå. Kohn (1993) menar att det vid densitetsexperiment, där objekt med olika densitet sänks ner i en vätska, är viktigt att jämförelser av lika vikt och olika volym samt lika volym och olika vikt görs, snarare än att fokusera på huruvida föremålen sjunker eller flyter. Dessa jämförelser kan bidra till att vidga elevernas kunskaper utan att beräkningar görs.

Flera studier (till exempel Hewson, 1986; Xu & Clark, 2012) beskriver hur elever i undervisning relaterar densitetsskillnader i material till täthet, det vill säga att de inte tar hänsyn till atomslag i material.

I en studie i USA (Maclin m fl, 1997) undervisades 30 elever i årskurs åtta under en tioveckorsperiod om begreppen materia, vikt, volym och densitet. Undervisningen behandlade de tre nivåer av densitetsbegreppet som tidigare beskrivits. En av slutsatserna som forskarna drog är att om man som elev ska kunna skilja på vikt och densitet hos varierande material i fast, flytande- och gasform måste man ha förstått grundläggande egenskaper hos materia, som att materia har massa och volym. Det visade sig att cirka en fjärdedel av eleverna i gruppen förknippade vikt med något som man kan se och ta på och att material som delades upp i mindre och mindre bitar till slut inte ansågs ha någon massa. För att bemöta detta ägnades flera lektioner åt att resonera kring vad som är materia och vad som inte är materia. Att vissa föremål eller ämnen uppfattas ha volym medan andra inte har det beskrivs av Hewson och Hewson (1983), till exempel kan vattnet i en kopp anses ha volym men inte själva koppen.

Genomförande och resultat

Avgränsningar för studien

Vi ägnade avsevärd tid i början av studien åt att reda ut vad olika densitet beror på. Vår atommodell omfattade att det som skiljer olika grundämnen åt är olika antal partiklar i atomerna och därmed blir förstås vikten på varje atom olika. Men på vilket sätt påverkar det densiteten? Innehåller en kubikcentimeter järn lika många atomer som en kubikcentimeter aluminium, under samma temperatur och tryck? Det är skillnad på att *förstå begreppet* densitet (vad något väger per volymenhet) och att förstå vad densitet *beror på* (olika antal elementarpartiklar och/eller olika avstånd

mellan atomerna). Hitt (2005) menar, som vi tidigare beskrivit, att begreppet densitet i undervisningen bör behandlas på tre vetenskapliga förståelsenivåer, makroperspektiv, mikroperspektiv och symbolisk. I en learning study utvecklas innehållet i lektionen i en cyklisk process, där syftet inte är att skapa den perfekta lektionen, utan att lära sig mer om innehållets behandling. Det är svårt att behandla alltför många aspekter av ett fenomen samtidigt om dessa ska bli möjliga att urskilja. Avgränsningar är därför nödvändiga. Vi valde att enbart fokusera makronivån i denna studie. Tryck och temperatur är faktorer som påverkar tätheten av partiklar i ett ämne och därmed densiteten. För att avgränsa vår learning study, då man endast har en lektion i fokus, behöll vi dessa faktorer konstanta i vår studie. I ett undervisningsperspektiv, när man har fler lektioner på sig, anser vi dock att det är viktigt att variera temperaturen och trycket i relation till densiteten.

Lärandeobjekt och hypotetiska kritiska aspekter

Vi ville att våra elever skulle kunna beskriva till exempel varför vissa fasta föremål flyter i vätskor medan andra sjunker. Lärandeobjektet för studien är *att förstå och kunna använda sig av densitetsbegreppet*. Vi använde skriftliga tester där vi försökte utforma frågor som skulle visa de skilda uppfattningar om volym, massa och olika material som fanns i elevgrupperna. Resultaten visade att begreppet densitet var okänt för de flesta av eleverna som deltog i studien. Vad som verkligen förvånade oss var att endast hälften av eleverna svarade korrekt på frågorna: *Vilket väger mest av 1 kg bly eller 1 kg luft?* samt *Vilket har störst volym av 1 liter bly och 1 liter luft?*

Vad behöver eleverna kunna urskilja, det vill säga vad är kritiskt för *att förstå och kunna använda sig av densitetsbegreppet*? Före lektionerna formulerade vi hypotetiska kritiska aspekter som utgjorde den grund utifrån vilken vi planerade vår första lektion och skapade de variationsmönster som vi trodde skulle hjälpa eleverna att urskilja dessa aspekter:

- att 1 kg alltid väger 1 kg, men att volymen kan vara olika
- att 1 liter alltid är 1 liter, men att vikten kan vara olika
- att man har konstanta volymer när man jämför densitet
- orsaker till densitet (bortom tryck och temp)

Variationsmönster i de fyra lektionerna

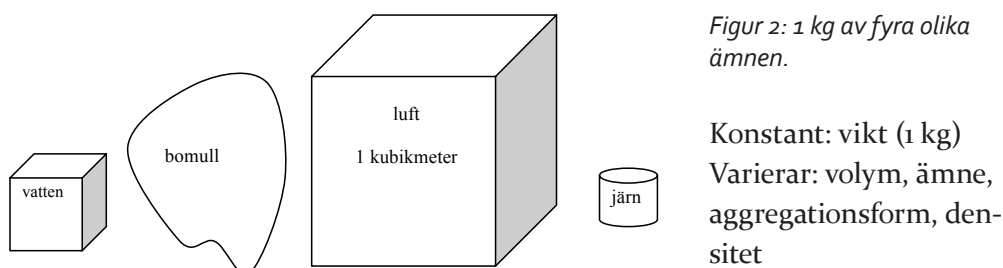
Under denna rubrik beskriver vi hur innehållet behandlades under de fyra lektionerna. Vi vill poängtera att det inte är fyra lektioner som en klass har haft utan fyra lektioner som genomförts i fyra olika klasser av fyra olika lärare. Varje elev har alltså enbart deltagit i en enda lektion. Det finns stora likheter mellan lektionerna men det är när man analyserar innehållets behandling som stora skillnader blir tydliga. Vi använde oss av variationsteorins olika mönster för att planera, genomföra och analysera lektionerna.

Den variationsteoretiska innehållsanalysen av lektionerna gjordes genom att vi först undersökte skillnader mellan testresultaten från de olika lektionerna för att därefter studera vilka olika variationsmönster i lektionerna som skulle kunna förklara

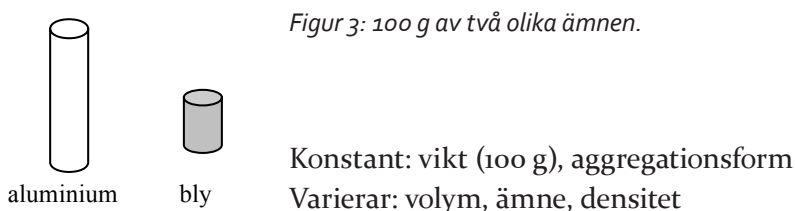
dessa skillnader. Alltså: analysen syftar till att svara på hur innehållets behandling under de olika lektionerna kan relateras till skillnader i elevtestresultat. I en lektion kan någon aspekt helt tas för given och på så sätt förbli omöjlig för eleverna att urskilja medan samma aspekt i en annan lektion kan synliggöras och varieras. Dessa skillnader i sätt att behandla innehållet är objektet för analysen.

Variationsmönster i lektion 1 och 2

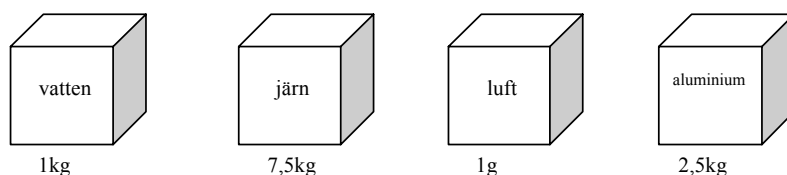
Om vi vill att eleverna ska kunna se att 1 kg alltid är 1 kg men att detta kan ha olika volym, ska vi låta vikten vara konstant och variera volym. Det som varierar är det som är möjligt att urskilja och i detta fall handlar det om att eleverna ska kunna urskilja olika volymer hos skilda material som alla väger 1 kg. Volym varierar medan vikt är konstant.



För att visa att detta inte bara gäller för 1 kg upprepades variationsmönstret med en annan vikt. Detta mönster kallas generalisering. Man belyser fortfarande samma kritiska aspekt men varierar istället vikten för att belysa att det inte enbart gäller för vikter på 1 kg.



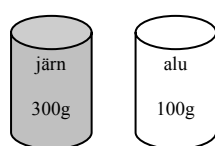
Eftersom förtesterna hade visat att endast hälften av eleverna hade svarat rätt på frågan *Vilket har störst volym av 1 liter bly och 1 liter luft?* konstruerade vi ett nytt mönster av variation så att eleverna med hjälp av detta skulle få syn på vår andra kritiska aspekt; att 1 liter alltid är en liter, men att den kan ha olika vikt



Figur 4: 1 liter av fyra olika ämnen.

Konstant: volym (1 liter) Varierar: vikt, ämne, aggregationsform, densitet

För att visa att det inte enbart gäller för 1 liter utan även andra volymer skapades nästa variationsmönster:



Figur 5: Lika volymer av järn och aluminium

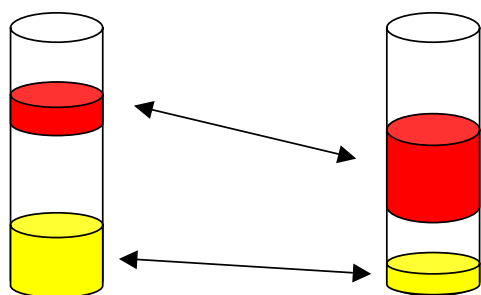
Konstant: volym

Varierar: vikt, ämne, aggregationsform, densitet.

Både lektion 1 och 2 avslutades med ett experiment, som kan ses som ett klassiskt densitetsexperiment i NO-undervisning. Olika vätskor med varierande densitet – sirap, vatten, glycerol och matolja – hålls i samma mätglas för att ämnena ska skikta sig i en ordning beroende på olika densitet. I instruktionen till denna laboration används samma mängd av de fyra vätskorna, men vi varierade mängderna för att eleverna skulle kunna separera densitet från en mängds volym och vikt. Fanns det möjligen uppfattningar hos eleverna att den största mängden hamnade längst ner i mätglaset, oavsett densitet? Detta experiment användes under samtliga lektioner, men skillnaderna på hur det gjordes är stora. Under lektion 1 och 2 var inte syftet uttalat vilket försvårade efterföljande jämförelser och diskussioner. Det blev främst ett görande för eleverna.

Att börja fokusera lärandeobjektet, lektion 3

Analysen av lektion 1 och 2 samt eftertesterna från dessa klasser, visade att densitet förblev ett okänt begrepp för de allra flesta av eleverna, men att de blev bättre på att göra distinktioner mellan volym och vikt. Vi hade alltså valt ett lärandeobjekt för vår studie, som efter två försök hade förblivit osynligt i lektionerna för eleverna. Under framför allt den första lektionen ansträngde vi oss för att skapa undervisning där eleverna själva skulle upptäcka densitetsbegreppet, utan att vi gav dem någon vägledning. Under den andra lektionen gav vi dem mer hjälp, men då i form av matematiska beräkningar. Inget av sätten gav de resultat vi önskade. Vi bestämde oss för att introducera densitetsbegreppet genom att ändra variationsmönstren så att densitet blev möjligt att urskilja. Under learning study-mötena hade vi diskuterat vad vi ville med det klassiska densitetsexperimentet som förekom under lektion 1 och 2. Samma experiment fick i lektion 3 (och 4) en tydligare roll där jämförelser gjordes mellan olika gruppers mätkolvar (se bild nedan) med de fyra vätskorna skiktade på samma sätt, oavsett vilken mängd de olika grupperna tagit. Fokus var nu på vätskornas densitet.



Figur 6: Variation mellan elevgruppernas olika försök.

Konstant: densitet, ämnen, aggregationsform, ordning som vätskorna skiktat sig i

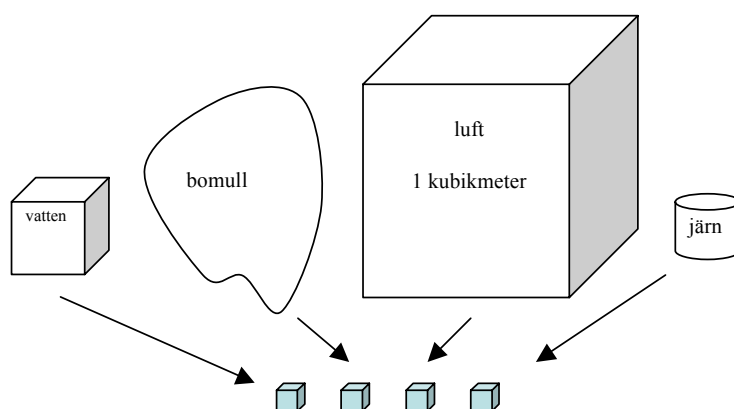
Varierar: mängd (volym/vikt)

Vi menar att detta variationsmönster kan hjälpa eleverna att se att mängden av ett ämne inte har någon betydelse för densiteten.

Att systematiskt variera lärandeobjektet, lektion 4

Att jämföra lika volym

Även om vi på eftertesterna kunde se att eleverna blev bättre på att urskilja densitet var vi ändå inte nöjda med resultaten, eftersom bara drygt hälften av eleverna (57 %) från lektion 3 kunde svara på att densiteten var högre i bly jämfört med aluminium, oavsett vilken mängd vi hade av dessa ämnen. Under lektion 4 definierades densitet som *jämförande av vikter med lika volym* redan i början av lektionen vilket inte gjordes i lektion 3 då det introducerades först i samband med det avslutande mätglasexperimentet. Genom att separera först vikt och sedan volym i samma undervisningssekvens blev densitet, som är relationen mellan dem, möjligt att urskilja. Detta medförde en utökning till två variationsmönster, som synliggjorde att det är skillnad på vikt och volym, men att relationen mellan dem är densitet. Med hjälp av den tidiga introduktionen av begreppet densitet och att man måste jämföra vikten av lika stora volymer gavs eleverna nu möjligheten att argumentera om densiteten hos olika material, vikter och volymer under hela lektionen.



Figur 7: Att skilja ut 1 kubikcentimeter av varje föremål, som väger 1 kg

Variationsmönster 1: (före separation av de små kuberna)

Konstant: vikt (1 kg)

Varierar: volym och densitet

Variationsmönster 2: (efter separation av de små kuberna)

Konstant: volym (1 cm³)

Varierar: vikt och densitet

Nya dimensioner av variation utifrån elevers inspel under lektioner

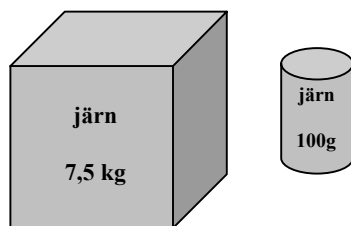
De svåraste aspekterna att hitta av lärandeobjektet är de som man vill att eleverna ska kunna bortse ifrån. Om till exempel en elev skulle ge uttryck för att färg spelar roll för densiteten vill man kanske gärna utmana den uppfattningen, men eftersom

färg kan anses som relativt långsökt i detta sammanhang är det inget vi har undersökt. Däremot finns det mer näraliggande aspekter, som man vill att eleverna ska kunna bortse ifrån, men som är svåra att upptäcka för att man själv redan för länge sedan lärde sig att bortse ifrån dem. Det är lätt att ta dessa för givna. I vår studie hittade vi en del av dessa aspekter genom att studera förtester och inspelade lektioner, men även genom att vara öppna för dem under pågående lektion. Under denna rubrik redogör vi för tre skilda aspekter som är kritiskt att kunna bortse ifrån, som vi fann i vår studie.

Att kunna bortse från mängd

Då vi analyserade inspelningarna från de första lektionerna upptäckte vi att några elever gav uttryck för uppfattningen att ett väldigt litet föremål, en blyertspets, väger så lite att den rimligtvis borde flyta. Det är svårt att avgöra vilken av aspekterna vikt och volym som fokuseras. Oavsett vilket så måste man bortse från båda aspekterna för att urskilja densitet, eftersom densitet är oberoende av mängd.

Under analysen av lektion 2 märkte vi att vi inte jämfört olika mängder av ett ämne med samma densitet. Till lektion 3 och 4 tillförde vi därför följande variationsmönster.



Figur 8. Att urskilja olika mängder med samma densitet.

Konstant: ämne, aggregationsform och densitet. Varierar: mängd (volym/vikt)

Vi ville med detta mönster visa att densiteten är densamma inom ett ämne oavsett volym och vikt, något eleverna inte haft möjligheten att urskilja under de två första lektionerna.

Att kunna bortse från ordning

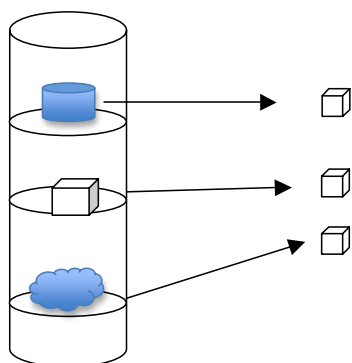
När experimentet med mätglasen skulle göras under lektion 4 diskuterade vi ännu en aspekt, som man behöver bortse ifrån. Ordningen som man håller vätskorna i spelar ingen roll för hur vätskorna sedan skiktat sig. Elevgrupperna fick inte enbart olika mängd att undersöka utan skulle även hålla vätskorna i olika ordning under experimentet. Efteråt jämfördes gruppernas mätglas, och frågan om vad som har någon betydelse, av mängd och ordning, för hur vätskorna skiktades diskuterades. När detta gjorts konstaterade en elev under helklassdiskussionen att:

Det enda som nog spelar någon roll är nog egentligen densiteten.

Detta menar vi är ett uttalande som tyder på att eleven kan bortse från såväl mängd som ordning.

Att kunna bortse ifrån aggregationsform mellan ämnen

Vi bestämde oss för att i den sista lektionen införa ett variationsmönster där densiteten mellan ämnen i olika aggregationsform skulle jämföras. Eleverna fick därför, efter att de genomfört skiktexperimentet, i uppdrag att hitta valfria fasta föremål i klassrummet som kunde hamna i skikten mellan de flytande ämnena.



Figur 9: Att hitta föremål med olika densitet.

•
•

Konstant: hur de skiktas

Varierar: ämnen, densitet, aggregationsform, mängd

Senare i lektionen, när syftet var att utmana elevernas syn på mängdens betydelse för densitet, gav en elev (Elev 2 nedan) uttryck för uppfattningen att ju mer massivt ett föremål är, desto högre densitet har det. Denna uppfattning finns tidigare beskriven i Barker och Miller (1999) och skulle innebära att fasta föremål alltid skulle sjunka i vätskor. Detta var ett oväntat inspel, men under lektionen försöker läraren utmana denna uppfattning på följande sätt:

Läraren: Vi har en liten bit aluminium, den väger inte mycket och så har vi ett stort akvarium med vatten som väger minst 20 gånger så mycket. Om jag nu lägger ner aluminiumet i akvariet borde det inte flyta då?

Flera elever: Nej.

Läraren: Men den väger ju så lite, vattnet väger ju så mycket.

Elev 1: Det är större densitet i det.

Läraren: Är det större densitet i aluminiumet, men vattnet är ju så mycket mer?

Elev 2: Aluminiumet har en fördel av att det är ihop, vattnet är ju mycket mer flytande.

Läraren: Ah, du säger att det är för att det ena är fast och det andra är flytande, men då så, då tar jag en liten sirapasklump, den är ju också flytande.

Elev 2: Ah men den är ju så liten ...

Läraren: Jag säger ju det, jag tar en pytteklump då borde väl den flyta? Jag har två flytande saker, pyttepytte ... håller jag och vattnet är ju jättetungt. Det är väl klart att sirapen borde flyta om jag bara tar jättelite.

Elev 3: Alltså, det är precis som i mätglaset. Vi höllde matolja innan vattnet men vattnet åkte ändå ner genom matoljan därför att den har högre densitet, så den åkte genom vattnet ...

Visserligen spelar aggregationsformen roll för densiteten inom ett ämne, eftersom till exempel is flyter i vatten, men då har de olika temperatur. Även tryck påverkar densiteten inom ett ämne, ju mer du pressar ihop en gas desto högre densitet får den, men vid konstant tryck och temperatur, som i vår studie, behöver man kunna bortse från

den aggregationsform som ett ämne har. Att inte tro att fasta föremål automatiskt har högre densitet för att de är fasta är ett exempel på detta. Vi menar att elev 2 ovan först ger uttryck för att aggregationsformen spelar roll; aluminium är fast medan vattnet är flytande och därmed kommer aluminiumbiten att sjunka genom vattnet. När hon blir utmanad i detta, genom att läraren byter till två föremål av samma aggregationsform (sirap och vatten), ger hon istället uttryck för att den flytande sirapsklumpen är så liten i relation till vattnet, och därmed borde flyta. Vi anser att detta är exempel på två skilda aspekter av densitetsförståelse som synliggörs här, mängdens och aggregationsformens betydelse, och båda aspekterna behöver kunna bortses ifrån.

Att kunna urskilja flera aspekter samtidigt

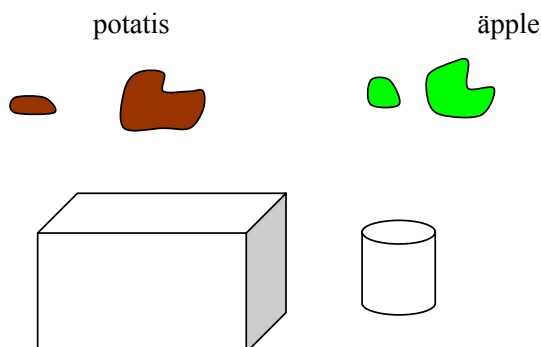
Lektion 4 avslutades med ett experiment, som inom variationsteorin kan betraktas som en *fusion*. Fusion innebär att de kritiska aspekterna varierar samtidigt och om aspekterna har separerats innan ger nu fusionen en möjlighet att relatera de kritiska aspekterna till varandra. Experimentet innebar att både stora och små bitar av äpple och potatis skulle stoppas i små och stora mängder av vatten och att resultatet skulle förklaras av eleverna. Mängden (volym/vikt) av potatis, äpple och vatten varierar medan densiteten är konstant inom varje ämne. Mellan ämnena varierar både densitet och aggregationsform. Samtliga våra kritiska aspekter varierar i detta experiment och för att kunna förklara det på ett naturvetenskapligt vedertaget sätt, måste man kunna:

- separera vikt och volym
- urskilja densitet som en relation mellan volym och vikt hos ett ämne
- jämföra vikter av samma volym
- urskilja relationen vikt, volym, och densitet *mellan* olika ämnen

För att kunna förstå densitetsbegreppet måste man samtidigt även kunna bortse från:

- mängd eller storlek, det vill säga att densiteten är samma i hela ämnet, oavsett mängd av ämnet
- aggregationsform hos ämnet, eftersom den inte har någon betydelse för densiteten (under konstant temperatur och tryck), det vill säga alla fasta ämnen har inte högre/lägre densitet än vätskor
- ordningen, till exempel ordningen som man håller vätskor i

I denna sista sekvens av lektion 4 finns samtliga aspekter närvarande och eftersom de är separerade tidigare under lektionen kan de förhoppningsvis urskiljas i denna fusion.



Figur 10: Fusion av densitet. Både potatis, äpple och vatten varierar samt mängd av ämnena.

Magnusson & Maunula

Ett utdrag ur dialogen i lektion 4:

Läraren: Om jag nu stoppar den lilla äppelbiten i vattnet, kommer den att flyta eller sjunka?

Elev 1: Flyta

Läraren: Om jag stoppar den stora äppelbiten i vattnet då?

Flera elever samtidigt: Sjunka ...

Läraren: Så stor sjunker, liten flyter?

Elev 1: Nej ...

Flera elever: Båda flyter.

Läraren: För att ...

Elev 2: Båda har samma densitet.

Elev 3: Men den stora åker ner lite grann först.

Läraren släpper ner äppelbitarna i det stora vattenkaret och båda flyter.

Läraren: Vi gör likadant med potatis (en stor och en liten bit), vad händer då?

Flera elever: Båda sjunker.

Läraren: Båda sjunker, varför då?

Elev 3: De har högre densitet än vattnet.

Elev 4: ... och äpplet!

Läraren släpper ner potatisbitarna i vattnet och båda sjunker.

Resultat

Testresultat

Lyckades eleverna lära sig något av det vi avsett, det vill säga vårt lärandeobjekt *att förstå och kunna använda sig av densitetsbegreppet*? Om vi jämför resultaten på testerna (se tabell 1 sid 98) kan man se att resultaten från lektion 4 överlag har förbättrats mest. Testerna var mer omfattande, men här väljer vi att fokusera på de frågor som vi menar allra bäst visar om densitetsbegreppet är urskilt av eleverna. Fråga 1 och 2 visar huruvida elever kan urskilja densitet mellan först lika volymer och sedan lika vikter. I samtliga klasser sker en förbättring i dessa aspekter. Faktiskt sker den minsta förbättringen i lektion 4 men å andra sidan är 91 procent nära taket för denna fråga. När det gäller fråga 3 kan den anses som extra svår, eftersom det korrekta svaret ska vara att *densiteten är lika stor hos 5 liter vatten som 10 liter vatten*, men det är här den allra största skillnaden mellan eftertesterna finns. Eleverna från lektion 1 och 2 får inget förbättrat resultat, medan nästan hälften av eleverna från lektion 4 på eftertesten förbättrar sitt resultat (från 28 % till 72 %) jämfört med förtesten. Även den sista frågan måste anses komplex när man jämför olika vikter, olika ämnen jämte olika densiteter med varandra, och även om det finns en förbättring i samtliga klasser när eleverna från lektion 4 det bästa resultatet i denna fråga.

Ett mer distinkt lärandeobjekt

Ett resultat från vår studie är en fördjupad kunskap om lärandeobjektet. Det ursprungliga lärandeobjektet i studien, att *förstå och kunna använda sig av densitetsbegreppet*,

Vilket har störst densitet?

				Lektion 1	Lektion 2	Lektion 3	Lektion 4
1.	1 liter bly	1 liter luft	Förtest	19 %	36 %	39 %	62 %
			Eftertest	80 %	69 %	81 %	91 %
2.	1 kg bly	1 kg aluminium	Förtest	6 %	32 %	26 %	71 %
			Eftertest	73 %	60 %	67 %	91 %
3.	5 liter vatten	10 liter vatten	Förtest	38 %	27 %	35 %	28 %
			Eftertest	40 %	27 %	62 %	72 %
4.	10 kg aluminium	5 kg bly	Förtest	19 %	23 %	22 %	55 %
			Eftertest	40 %	45 %	57 %	81 %

Tabell 1: Siffrorna anger andel korrekta svar. Det var möjligt att svara *lika stor densitet*.

belyser ett eftersträvat kunnande, en förmåga som man vill utveckla eller ett *indirekt lärandeobjekt* (Marton & Booth, 1997). De aspekter av fenomenet som eleverna behöver urskilja och samtidigt fokusera för att utveckla denna förmåga är inte lätt att utläsa ur detta indirekta lärandeobjekt. I studien har vi lärare istället formulerat ett *direkt lärandeobjekt* (Marton & Booth, 1997) som mer belyser det innehållsliga; *att kunna relatera vikt, volym och densitet inom ett ämne eller mellan ämnen oavsett mängd*.

De kritiska aspekterna, en sammanfattning

De aspekter som eleverna måste urskilja ur det direkta lärandeobjektet, för att i förlängningen utveckla sin förmåga *att förstå och kunna använda sig av densitetsbegreppet* är:

- 1. Att kunna separera vikt och volym i ett ämne
- 2. Att kunna se densitet som en relation mellan volym och vikt
- 3. Att kunna jämföra vikter av samma volym
- 4. Att kunna relatera densitet mellan ämnen
- 5. Att kunna se att densiteten är samma i hela ämnet, det vill säga att mängden av ett ämne inte påverkar densiteten
- 6. Att kunna se att aggregationsformen i sig inte påverkar densiteten mellan olika ämnen⁴
- 7. Att kunna se att ordningen inte påverkar skiktningen av vätskor av olika densitet⁵

Om man jämför våra hypoteser i början av studien med de aspekter som beskrivs i stycket ovan kan man konstatera att vi lärare har gjort nya distinktioner kring de kri-

4. Även om tryck eller temperatur, som i sig kan påverka aggregationsformen, påverkar densiteten för ett ämne, så har inte fasta ämnen automatiskt högre densitet än flytande ämnen.

5. Denna aspekt gäller ett specialfall, när man jämför vätskor eller gaser av olika densitet.

tiska aspekterna. Nr 5 i listan ovan är identifierad med hjälp av elevernas testresultat medan 6 och 7 är aspekter som hittats i analyserna av lektionerna, genom elevers frågor och kommentarer.

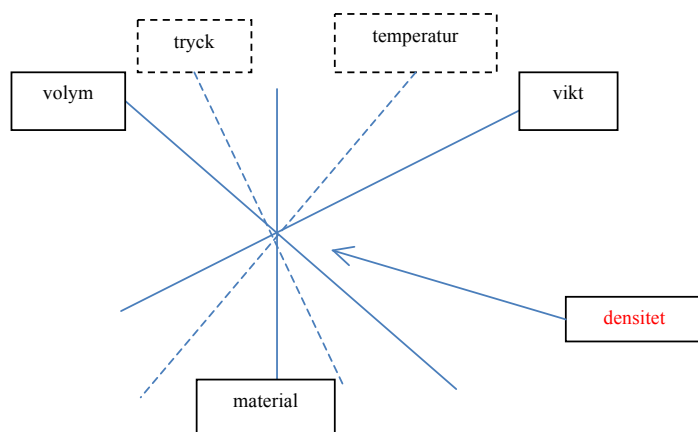
Vi vill nu diskutera och analysera resultaten från den här studien och relatera dem till tidigare forskning.

Diskussion

Resultaten relaterade till tidigare forskning

Resultaten från denna studie är dels en sammanfattning av vad som utgjorde kritiska aspekter för våra elevers densitetsförståelse, dels en fördjupad syn på undervisningsinnehållet hos oss lärare. Genom att systematiskt prova ut olika aspekter i undervisningen kom vi att se fler distinktioner av innehållet. De hypotetiska kritiska aspekter som vi identifierade i början av vår studie var material, volym, vikt, densitet, tryck och temperatur. I tidigare forskning finns beskrivet att elever fokuserar *en* av aspekterna vikt och volym och likställer den med densitet, vilket även vi kunde se i denna studie. Till exempel uppstod förvåning i en av elevgrupperna då en blyertsspets sjönk trots att den var så liten och lätt. I vår studie kan man, liksom i Barker och Millers (1999), se att densitet uppfattas som hur massivt ett föremål är, att elever uppfattar att aggregationsformen i sig spelar roll för densiteten. Även andra enskilda aspekter som ett föremåls yta, form samt volym och vikt av det man jämför med, likställs med densitet av elever i tidigare forskning (Lybeck, 1981). Vår studie visar att det inte räcker med att urskilja att vikt och volym inte är detsamma som densitet, utan man måste även kunna separera vikt och volym. Dessutom behöver man samtidigt kunna relatera dessa aspekter till varandra i begreppet densitet. I forskningsgenomgången har vi inte funnit studier som beskriver *mängd* som begrepp att använda i densitetsundervisning. Våra elever behövde såväl kunna urskilja mängd, eftersom den rymmer både volym och vikt, som att kunna bortse från mängd eftersom den inte har betydelse för ett ämnes densitet. Likväl fanns det uppfattningar hos eleverna som tydde på att mängden av ett föremål, både mycket eller lite, påverkade densiteten.

Om man jämför de hypotetiska kritiska aspekter som vi utgick ifrån i studien (se fig

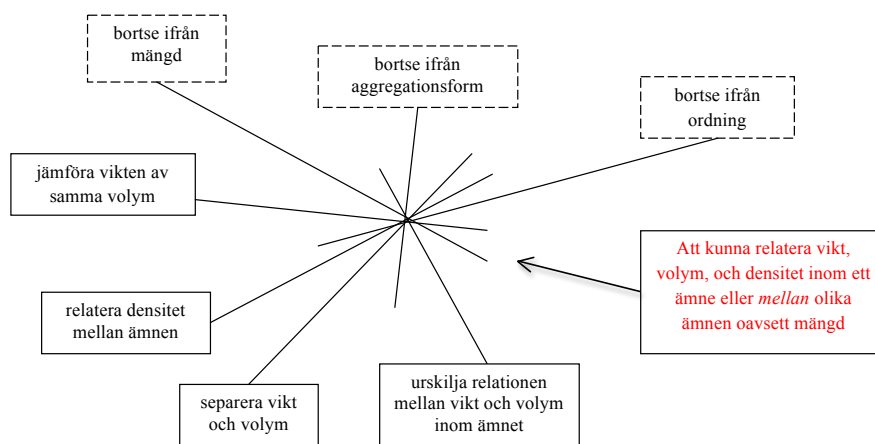


Figur 11: Våra hypotetiska kritiska aspekter före studien (temperatur & tryck hölls konstanta i studien).

11) var de grundade på aspekter som kan härledas ur ämnens fysikaliska egenskaper. Detta är aspekter av densitet men de säger inte så mycket om de uppfattningar som eleverna har om densitet. De speglar inte på egen hand vad som är kritiskt för elevernas förståelse.

Formuleringen av det direkta lärandeobjektet, *att kunna relatera vikt, volym och densitet inom ett ämne eller mellan ämnen oavsett mängd* är ett resultat av vår studie som svarar mot frågeställning 2 i denna artikel och som behandlar lärares utveckling genom studien. Från att i början av studien på ett ytligt och svävande sätt diskutera vad densitet är och vilka skäl det finns till densitetsskillnader mellan olika föremål förändrades lärarnas diskussioner under studiens gång och kom att kretsa kring allt mer distinkta densitetsaspekter. Dessutom förändrades fokus från aspekter som enbart kunde relateras till en naturvetenskap till aspekter som även kunde relateras till elevers uppfattningar kring densitetsförståelse.

Det direkta lärandeobjektet är konstituerat av de kritiska aspekter som vi upptäckte under studiens gång när elever gav uttryck för olika uppfattningar. Aspekterna kan illustreras enligt följande.



Figur 12: Kritiska aspekter av densitet. Bilden är inspirerad av Lo (2012).

Bilden ovan ska inte ses som en slutgiltig samling av vad som är kritiskt för vårt lärandeobjekt, utan mer som ett pågående arbete att fortsätta från. Vi menar att det viktigaste i vårt resultat är de aspekter som våra elever, liksom troligen även andra, behöver bortse ifrån, som till exempel att aggregationsformen i sig inte spelar någon roll för densiteten. Att elever till exempel uppfattar att densiteten förändras beroende på mängd är en aspekt som inte är enkel att härleda från ämneskunskaper om densitet, men den kan utforskas i en learning study.

Om dynamiska kritiska aspekter

Att kunna bortse från en aspekt kräver att man redan har urskilt något. Med variationsteoretisk terminologi kan en generalisering göras om man vill att elever ska lära sig att bortse från aspekter.

Generalization cannot help the learners discern what is critical, but it separates

Magnusson & Maunula

what is critical from what is not. For example, to be a triangle, the angle sum is critical, but the size of each angle is not; the number of sides is critical, but the length of each side is not. (Lo & Marton, 2012, s.11)

I citatet ovan beskriver författarna längden på triangels sidor som en icke-kritisk aspekt och antalet sidor som en kritisk. Vi skulle vilja diskutera denna terminologi i relation till hur vi benämner de kritiska aspekterna. Vi menar att skillnaden mellan en kritisk respektive icke-kritisk aspekt går mellan om du urskiljer den eller inte. Det kan även vara en aspekt som behöver bortses ifrån. De kritiska aspekterna är empiriskt funna i relation till elevgrupper. Om en elev kan bortse från längden av triangelns sida är det ingen kritisk aspekt för henne, men om en annan elev inte kan bortse från längden är detta kritiskt för hennes uppfattning. Likadant är det i vår studie, där vi menar att eleverna behöver kunna bortse från flera aspekter, som aggregationsform, ordning och mängd. Om en elev har urskilt att man behöver jämföra samma mängd av ämnen för att jämföra densitet är inte detta längre kritiskt för henne, men likväl finns sannolikheten att det är kritiskt för några av hennes klasskamrater. Vi ser de kritiska aspekterna som dynamiska och föränderliga.

Vad har de kritiska aspekterna för användningsområden? Vi menar att de kan vara ett redskap för lärare eftersom kunskapen om vad som kan vara kritiskt för att lära sig ett lärandeobjekt bidrar till att man som lärare sannolikt inte tar dessa aspekter för givna och detta i sig ökar möjligheterna för eleverna att lära sig i undervisning. Även om man verkligen ser till att varje kritisk aspekt av innehållet blir belyst under en lektion kan det ändå vara så att alla elever inte lärt sig, det finns annat som också spelar roll. Vi får aldrig en garanti för lärande men genom att försöka vara lyhörda för alternativa sätt att se lärandeobjekten ökar våra chanser att öppna nya dimensioner av lärandeobjektet under lektionerna.

Om svårigheter i en learning study

Vilka svårigheter finns med testerna? Man kan börja med att konstatera att ingen lektion har gett ett hundra procentigt resultat. Givetvis är målet att samtliga elever ska lära sig samtliga aspekter, men eftersom utgångspunkten för det första är att man väljer ett komplext lärandeobjekt och för det andra att lektionstiden är begränsad, är det kanske inte förvånande att man inte alltid når 100 procent. Vi har inte använt oss av kontrollgrupper även om vi förstår att testet i sig kan bidra till ett lärande utan vi letar efter *skillnader* mellan lektionerna, i testresultat och utförande. På så sätt utgör klasserna kontrollgrupper åt varandra. För att på djupet hitta samtliga elevers uppfattningar om densitet borde vi ha intervjuat dem, men eftersom learning study är en modell som ska kunna rymmas i en vanlig skolas vardag är det praktiska skäl som avgjort att vi inte har använt intervjuer. Det finns även ett annat dilemma med testerna i en learning study. Eftersom vi letar efter vad som kan vara kritiskt för elevers lärande av olika lärandeobjekt, och vi inte vet vilka alternativa uppfattningar som kan finnas innan vi startar studien, så är det inte rimligt att i början av en studie, när vi formulerar testfrågor, kan veta vad vi ska finna. Därför har vi dels skillnader mellan

klassernas testresultat, dels elevers inspel under lektionerna som källa till vad som kan vara kritiskt.

Undervisning är komplext och faktorerna som påverkar är många. En del av dem ligger utanför en lärares kontroll. Vi ser learning study som processer för att bättre förstå undervisning och för att bättre förstå hur våra elever ser på de innehåll som vi valt som lärandeobjekt. När vi analyserar eftertesterna och de inspelade lektionerna kan vi se vad som inte riktigt blev som vi hade tänkt oss och ofta även varför. Ibland kräver det flera lektioner där vi provar olika saker men ibland är det enklare att direkt veta vilka förändringar vi borde göra. Variationsteorin ger oss en teoretisk vägledning i vad vi bör hålla konstant och vad vi bör variera.

Om att använda elevers inspel i undervisning

Någon månad efter att denna studie hade avslutats genomfördes en fysiklektion av en av lärarna. Lärandeobjektet i lektionen var att förstå Arkimedes princip för att kunna förklara varför föremål med olika densitet sjunker olika mycket i vatten. Läraren lastade en ihållig plastkub, som låg och flöt i ett akvarium med vatten, med olika vikter. Kubens volym var en liter och allteftersom vikten ökade stegrades argumentationen kring hur mycket den skulle väga då den sjönk. Då kubens totala vikt var 1 kg kunde man se att dess kanter befann sig precis i jämnhöjd med vattennivån, på gränsen till att sjunka.

[...]

L: Vad händer om jag lägger i ytterligare 100 g?

Flera elever: Den sjunker.

L: Varför då?

Elev: Då väger den litern mer än 1 liter vatten.

Vad eleverna nu började urskilja var just Arkimedes princip. Lyftkraften på ett föremål motsvarar den mängd vätska den pressar undan. Nöjd med att många av eleverna diskuterat och problematiserat Arkimedes princip började läraren avsluta lektionen när en elev avbröt med frågan:

Skulle kuben kunnat lyfta mer om det var sirap i akvariet?

Denna fråga öppnade en ny dimension av innehållet, som läraren inte hade tänkt på och som vidgade möjligheten till förståelse på ett djupare plan. Det som läraren hade valt att hålla konstant fram till nu var kubikdecimetern och vattnet i akvariet medan vikten på kuben och därmed hur djupt den sjönk varierat. Fokus låg på densiteten hos föremålet som sänktes ner i vattnet. Det som eleven nu synliggjorde var att densiteten på vätskan, som man sänker ner kuben i, också kan variera och detta var en aspekt som helt hade tagits för givet. Eleverna hade i ett tidigare experiment sett att sirap har högre densitet än vatten. Denna fråga öppnade en ny möjlighet att urskilja en aspekt av Arkimedes princip, nämligen att det inte bara är volymen och vikten på det som sänks ner i en vätska utan även vikten och volymen på den mängd vätska som trängs undan som spelar roll.

Elev 5: Så om en kubikdecimeter sirap väger 2 kg så hade man kunnat lasta 2 kg i kuben innan

Magnusson & Maunula

den sjönk?

Elev 4: Om det varit flytande järn i akvariet hade kuben kunnat lyfta jättemycket då?

Elev 6: Kanske så mycket som en liter järn väger ...

Elev 7: Kan en båt i saltvatten lastas tyngre än en båt i en sjö?

Åter kopplade eleverna tillbaka till något som undersökts tidigare, nämligen att saltvatten har högre densitet än sötvatten. En elev som tidigare inte hade yttrat sig ställde nu följande fråga:

Elev: Är det mycket av en båt som ligger under vattnet och som man inte ser?

Vissa frågor öppnar upp lektionen och driver den framåt. Men om man inte som lärare förstår när elever öppnar upp nya dimensioner av innehållet med sina frågor och kommentarer, då är det lätt att dessa frågor förblir obesvarade, och ibland inte ens ställda. Under denna lektion var både sirapsfrågan och båtfrågan exempel på drivande elevfrågor. Man ser aldrig hur stor volym av båten som ligger under vattenytan. Vikten på det vatten som båten tränger undan motsvarar båtens vikt. Att det rör sig om mycket stora volymer började nu eleverna kunna urskilja. Lektionen böljade nu mellan båtar i flytande sirap, trästockar som flyter, flytande människor i Döda havet med mera. Allt varierades och prövades och vi tror att Arkimedes hade uppskattat att vara närvarande.

Referenser

- Baker, W. P. & Woodward, S. (2001). How are Volume and Mass related? *Science Activities*. 38(1), s. 34–6.
- Barker, V. & Millar, R. (1999). Students' reasoning about chemical reactions: what changes occur during a context-based post-16 chemistry course? *International Journal of Science Education* 2(6), s. 645–665.
- Carlgren, I. & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Kristianstads Boktryckeri AB.
- Dawkins, K. R., Dickerson, D. L., McKinney, S. E. & Butler, S. (2008). Teaching Density to Middle School Students: Pre service Science Teachers' Content Knowledge and Pedagogical Practices. *Clearing House*. 82(1), s. 21–26.
- Forbes, T.P. (2004). *Alternative conceptions held by community college chemistry students about physical properties and processes: Density, solubility and phase changes*. Hämtad från. <http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/1963/1/etd.pdf>.
- Gabel, D. & Bunce, D. (1994). Research on Problem Solving. In D. Gabel (red.) *Handbook of research on science teaching and learning: A project of the National Science Teachers Association*, s. 301–326. NY. Macmillan Publishing Co.
- Hawkes, S. J. (2004). The concept of density. *Journal of Chemical Education* 81(1), s. 14–15.
- Hitt, A. M. (2005). Attacking a Dense Problem: A Learner centered Approach to

- Teaching Density. *Science Activities* 42(1), s. 25–29.
- Herrington, D. & Scott, P. (2011). Get in the Game with Team Density. *The Science Teacher* 78(4), s. 58–61.
- Hewson, M. G. & Hewson, P. W. (1983). Effects of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching* 20(8), s. 731–743.
- Hewson, M. G. (1986). The Acquisition of Scientific Knowledge: Analysis and Representation of Student Conceptions Concerning Density. *Science Education* 70(2), s. 159–170.
- Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Krnel, D., Watson, R. & Glazar, S. A. (1998). Survey of research related to the development of "matter". *International Journal of Science Education* 20(3), s. 257–389.
- Kohn, A. (1993). Preschoolers' reasoning about density: Will it float? *Child Development*, 64 (6), s. 1637–50.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lo, M.L., Pong, W. Y. & Chik, P. (2005). *For Each and Everyone. Catering for Individual Differences through Learning Studies.* Hong Kong: Hong Kong University Press.
- Lo, M. L. & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Vol. 1(1). s. 7–22.
- Lo, M.L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lybeck, L. (1981). *Arkimedes i klassen: En ämnespedagogisk berättelse.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Maclin, D., Grosslight, L. & Davis, D. (1997). Teaching for Understanding: A Study of Students' Pre instruction Theories of Matter and a Comparison of the Effectiveness of Two Approaches to Teaching About Matter and Density. *Cognition and Instruction* 15(3), s. 317–393.
- Marton, F. (1981). Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science* 10, s. 177–200.
- Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. & Pang, M.F. (2006). On Some Necessary Conditions of Learning. *The Journal of the Learning Sciences* 15 (2), s. 193–220. Lawrence Erlbaum Associates.
- Morris, A. K. & Hiebert, J. (2011). Creating Shared Instructional Products: An alternative Approach to Improving Teaching. *Educational Researcher* (40) 5, s. 5–14.
- Nordlab. (n.d.). *Materiens byggnad.* Hämtad 22 feb, 2006 från <http://naserv.did.gu.senior/dlab/se/trialse/pdf/ke2.pdf>.
- Runesson, U. & Gustafsson, G. (2012). Sharing and developing knowledge products from Learning Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies* Vol. 1

Magnusson & Maunula

(3). s. 245–260.

Skolverket. (2011). *Lesson study och learning study samt IKT i matematikundervisningen*. Rapport 367. Stockholm: Fritzes.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt*. Umeå: Umeå universitet.

Xu, L. & Clarke, D. (2012). Student Difficulties in Learning Density: A Distributed Cognition Perspective. *Research in Science Education* 42(4), s. 769–789.