

Tänka högt med papper och penna

BENGT OLLE BENGTTSSON är professor emeritus i genetik vid Lunds universitet. Han har bl.a. skrivit böckerna *Genetik och politik* (1999) och *Genetiska konflikter* (2006) samt har nyligen med Gunnar Broberg redigerat boken *Bortom det acceptablas gränser*. Bengt Lidforss och lundaradikalismen (2013).



Foto: Maria Lindb

Ett block rutat papper
En blyertspenna
Ett radergummi
Lugn och ro

enklare kan det nästan inte bli. Ändå är det med dessa triviala redskap jag utfört merparten av min genetiska forskning. Första uppsatsen i matematisk populationsgenetik publicerade jag 1975 i *Theoretical Population Biology* och den senaste trycktes 2012 i *Genetics*. Sammantaget har det blivit ungefär tjugofem artiklar inom fältet och kanske blir det några till. Flertalet av uppsatserna är ensamförfattade och bygger på matematiska uträkningar som tillkommit med dessa enkla redskap.

Ett sällsamt otidsenligt arbetssätt kan det tyckas, i en värld där datorer utför nästan alla exakta beräkningar. Men välfungerande, och dessutom på något sätt intellektuellt och sensuellt tillfredsställande. När jag reflekterar över mitt arbetssätt inser jag att jag använder ett akademiskt handlag som är långt ifrån självklart.¹

DATOR OCH TANGENTBORD ELLER PAPPER OCH PENNA?

Nästan alla genetiker arbetar idag på ett annat sätt än de gjorde för bara några år sedan. Majoriteten av mina kollegor sitter nuförtiden vid datorer där de analyserar DNA-sekvenser. Mikroskopen är undanställda och de farliga kemikalierna bortrensade. Labben står långa tider tomma.

Självklart använder även jag datorer i mitt arbete. Förutom att artiklarna skrivs med ordbehandlingsprogram så måste figurerna ritas med datorns hjälp och simuleringarna göras i ett programmeringsspråk. All

kommunikation med redaktörerna för de vetenskapliga tidskrifterna sker via nätet, och de flesta artklar jag refererar till finner jag där.

När jag förundras över min ringa datoranvändning handlar det således främst om något annat – detta att jag använder dem så sällan i själva forskningsarbetet. Och det är faktiskt märkligt. För det finns kraftfulla och imponerande datorpro-

gram, så kallade datoralgebrasystem, som kan ta hand om det slags uträkningar som är centrala i mitt arbete. Självt har jag mest erfarenhet av *Mathematica*, med det finns också andra. Dessa program är byggda för att hantera matematiska formler. Ett exempel: Skriver jag in $(a+b)^2$, så kan programmet tala om för mig att detta är det samma som $a^2+2ab+b^2$. Inte särskilt svårt, kan man tycka, och något de flesta lätt

En av de stora forskningsinnovationerna är blyertspennan, mödosamt framexperimenterad under 1700-talet. Den gjorde det möjligt att bli en ytterst mobil forskare. En blyertsstump och papperslapp i fickan innebar att man alltid kunde notera en idé, ett hugskott eller en observation. Universitetslektor Magnus Wikdahl på väg till jobbet. Foto: Billy Ehn.

klaras av i huvudet eller ”för hand”. Men låt a och b vara långa och besvärliga uttryck och ersätt 2 med 4, så har risken blivit stor att man gör ett slarvfel om man själv försöker utveckla uttrycket. Sådana fel gör aldrig beräkningsprogrammen.

Erfarenhetsmässigt vet jag att jag inte klarar av att skriva mer än cirka tjugo rader matematisk text utan att göra något fel. Det finns således beräkningar jag aldrig försöker mig på eftersom jag inser att jag omöjligtvis kommer att klara av dem. Inte på grund av deras teoretiska svårighetsgrad, utan för att dess triviala komplexitet är för stor.

Mathematica har därför alltid tyckts mig ett idealiskt arbetsredskap och vid några tillfällen har jag också använt det när det gällt att hantera mycket arbetskrävande uträkningar. Varför utnyttjar jag det då så relativt sällan – varför sitter jag inte *alltid* vid datorn för att göra mina uträkningar och därmed få dem korrekta med en gång?

Eftersom jag ofta ställt mig denna fråga vet jag genast några svar. De två mest omedelbara är:

Inledningsvis upplevs alla datorprogram som jobbiga. *Matematica* är inte något speciellt svårt program, men har man inte använt det på några månader känns det obekvämt att komma in i igen. Dess innehållsmässiga rikedom är också irriterande, för jag känner att jag aldrig kommer att lära mig det fullt ut. När jag använder *Mathematica* finns alltid i bakhuvudet tanken att ”en dag skall jag verkligen lära mig detta program”. Ju falskare denna förhoppning upplevs, desto mindre lockande är det att använda programmet.

Den andra förklaringen är att det är praktiskt böjigt att få *Mathematica* att fungera på den egna datorn. Exakt hur man idag gör för att skaffa nyttjanderätt

till programmet vet jag inte, men under lång tid fick man köpa ettåriga licenser för att kunna använda det. Ibland från företaget direkt, ibland via universitetets datacentral. Självklart hade jag kunnat fixa detta om programmet varit nödvändigt för mig, men mitt motstånd mot sådant administrativt strul har ökat genom åren.

Man kan dock ifrågasätta om dessa konkreta argument är de viktigaste. När valet står mellan att göra en relativt komplicerad härledning med blyertspenna eller dator – är argumenten om datorprogrammets praktiska för- och nackdelar då de självklart styrande? Finns det inte andra typer av förklaringar? Kanske *föredrar* jag att räkna för hand?

För det gör jag nog. Åtminstone till dels.

KOMMUNICERADE TANKAR

När jag började tänka över valet mellan blyertspenna och dator så trodde jag att tankarna skulle leda fram till en diskussion om skrivarbetets natur. Om autenticiteten i handens rörelse med pennan över papperet snarare än långfingrets studsande över tangentbordet².

För att bredda min kunskap om hur teoretiskt arbete faktiskt går till försökte jag dock samtidigt hitta andra beskrivningar av matematiskt hantverk. Fann då den nyligt utkomna och högst läsvärda boken *Théorème vivant* av den franske matematikern Cédric Villani (2012). Boken inleds med ett samtal mellan Villani och hans forskningsassistent Clément Mouhot i mars 2008. De bestämmer sig för att än en gång tackla den klassiska Boltzmannekvationen. Sedan får läsaren följa arbetet fram till november 2010, när deras långa artikel *On Landau damping*

accepteras för publicering i *Acta Mathematica*. Under dessa tjugo månader händer också mycket annat. Villani blir utnämnd till chef för det berömda *Institut Henri Poincaré* i Paris och föräras Fieldsmedaljen³ för de resultat som redovisas i Landau-artikeln.

I boken får läsaren följa forskningsarbetet på nära håll, inte minst genom de många avtryckta e-breven mellan Villani och Mouhot. Man får också lära sig hur rock-konserter, familjeliv och förortståget RER B passar in i en fransk elitmatematikers liv.

Med avseende på matematisk förmåga är jag som någon som tycker om att promenera i naturen medan Villani är den som vinner guld i maraton i OS. Mycket av det han skildrar kan jag dock känna igen. Det är fascinerande att förstå hur mycket han skriver med blyertspenna på papper – oftast använder han verbet *griffer*, ”klottra, krafsa ner”, för att beteckna detta, medan han med *écrire* tycks mena att skriva på datorn. Från boken framkommer således att Villani flitigt använder såväl blyertspenna som persondator; han berättar däremot inget om hur han avväger mellan dessa två arbetsformer.

Däremot kommer, en bit in i texten, en varm hyllning till datalogen Donald Knuth som utvecklat ett datorspråk i vilket man med enkla tecken kan skriva in formler och ekvationer så att de på skärmen vecklar ut sig i vackra integral- och summatecken och hela den rikedom som tillhör matematikens typografi. Programmet (som idag närmast är en språkfamilj) kallas $T_E X$ och används av matematiker världen över. För Villanis samarbete med Mouhot över nätet var det absolut nödvändigt.

Matematikern Villani använder således

datorn som ett arbetsredskap i forskningen med den för mig oväntade uppgiften att *kommunicera*. Han har uppenbart ett behov – vilket han själv medger – att kontinuerligt vara i samtal med någon för att därmed tvinga sig att fördjupa och gå vidare med det avancerade tankearbetet.

Självklart är detta överraskande, för är det något man inte direkt tänker på i samband med matematik och matematiker så är det kommunikation. Spontant uppfattar man ju matematik som något man gör för sig själv, inne i det egna huvudet. Villanis bok får mig därmed att tänka inte bara på handens rörelser utan att gå ett steg längre – vad är det egentligen för *arbete* man utför när man sitter och sliter med sina formler?

MATEMATIK SOM ARBETE

Efter år av erfarenhet anser jag att jag behärskar mitt vetenskapliga hantverk ganska väl. Inte bara ägnar jag mig åt det i forskningen, jag försöker också undervisa populationsgenetisk analys så att hantverkskänslan blir förmedlad.

Tyvärre betyder inte detta att jag därmed faktiskt vet hur det går till när jag utövar mitt hantverk. Härmed skiljer jag mig knappast från andra hantverkare, för nästan alla är okunniga om vad det är de gör när de gör det de alltid gör. I mitt fall – med att formulera och lösa ekvationer inom populationsgenetiken – är situationen emellertid något mer besvärlig än så.

Detta kommer sig av att jag studerade en hel del matematisk logik i min ungdom. Den logiska positivismens formalistiska syn på matematiken följer därför med mig sedan dess, medvetet och omedvetet. Matematiska satsar blir till tautologier utan någon egentlig mening. Bevis-

Nya asexuella kloner av femfingerörten (Potentilla argentea) kan ha selektiva fördelar som försvinner efterhand på grund av bristen på genetisk rekombination. Detta fenomen ligger bakom frågeställningen i min senaste genetiska forskningsartikel. Foto: Svante Holm.

steg blir till transformationer av matematiska satser med oförändrat sanningsinnehåll.

Som filosofi och logik är detta säkert utmärkt och bra. Men som beskrivning av vad man gör när man sitter och svettas över sina ekvationssteg är det uträkligt. Dessutom får det aktiviteten att framstå som något avskräckande. För vem vill sitta och transformera triviala, tautologa sanningar timme ut och timme in? Hur kul är egentligen det? Den formella logiken gör min matematiskt baserade analys, över vilken jag på något sätt ändå känner viss stolthet, till ett mekaniskt nonsensarbete.

Jag måste således erkänna: I över trettiofem år har jag skjutit ifrån mig alla djupare funderingar över vad det *faktiskt* är jag gör, när jag utövar mitt vetenskapliga hantverk. Bortträngningen har varit komplett. Nu om någonsin får jag se till att växa ur den.

Den nya utgångspunkten ger sig ome-

delbart. Jag måste vänja mig vid att betrakta mitt teoretiska hantverk, som ett *arbete*. I en viss mening har jag naturligtvis alltid gjort det; jag vet till exempel att det tar tid och gör mig trött. Men jag måste också acceptera att det är *ett arbete i sig*. Ett arbete som i likhet med alla andra riktiga arbeten har ett syfte. Ett arbete som leder någon vart. Och som görs precis därför.

”Syfte” finns naturligtvis inte med i formallogikens karaktärisering av matematiska satser och bevisföljder. Men i mitt hantverk spelar det en viktig roll – på samma sätt som kommunikation är en självklar del av det arbete Villani och Mouhot utför.

DET TEORETISKA ARBETETS TRE SYFTEN

Det finns säkert fler, men efter att ha tänkt på frågan ett slag så urskiljer jag idag tre viktiga syften för den matematisk-teoretiska delen av mitt hantverk.⁴

För det första handlar arbetet – i lugn och ro med blyertspennan och det rutade blocket – om att *hålla ordning på en lång tankeföljd*. Människor är bra på att genomföra logiska steg i sitt tänkande, men inte särskilt duktiga på att exakt komma ihåg dem (detta är datorer mycket bättre på, vilket förklarar varför datorer slår människor i schack). Längre argumentföljder där precision är viktig måste med nödvändighet skrivas ner, förtecknas steg för steg.

Tittar jag i efterhand på det skrivande jag gjort för mina teoretiska forskningsartiklar så utgörs merparten av just detta: enkla rader av på varandra följande tankesteg. Oftast bara matematiska satser, men ibland kan det på blocket stå sådant som ”Now we use the earlier obtained re-

sult plus that r is small, which give...”.⁵ Välordnade listor på tankar kan det kallas.

Listans betydelse som en av skrivandets urformer har intressant diskuterats av Jack Goody (1977) i hans *The Domestication of the Savage Mind*, och det tycks mig som om de handskrivna sidor jag producerar väl kvalificerar sig som exempel på listor. Listor med syfte att hålla ordning på en lång, precis tankeföljd. Denna tankeföljd gestaltas inte bara som den en gång stod klar för mig i mitt inre, utan på ett sätt som gör att den efterhand kan filas på, justeras, förstärkas, presenteras för andra, publiceras. Eller – i många fall – hittas fel i och förkastas.

Läsningen av Goody får mig också att uppmärksamma att det är mer än ekvationsrader som står på mina handskrivna papper. Uppe i högra hörnet finner man till exempel ibland sådant som: ” q small and N large”. Där förtecknas antaganden om variabler eller parametrar som gäller för allt som händer på sidan (konkret betyder det att alla termer med q^2 och N^{-2} kan ignoreras). Ofta inleds också sidorna med en rubrik, följt av ett schema som i halv-grafisk form beskriver modellens nyckelantaganden om selektion eller inavel eller mutation eller parningssätt. Mitt teoretiska hantverk går således inte ut på att producera en löpande prosatext (av den typ jag nu skriver), men handlar ändå uppenbart om ett *skrivande*. Ett skrivande som utnyttjar en förvånansvärt hög grad av grafisk komplexitet.⁶

För det andra innefattar arbetet *en kontinuerlig utvärdering av bakomliggande förutsättningar och antaganden*. När jag skriver mina ekvationssteg och driver beräkningarna mot sin lösning pågår samtidigt två slags tankar i min hjärna. Å ena sidan handlar det om att förenkla och förkorta,

multiplitera in och byta sida, samt allt annat småarbete som behövs för att komma närmare lösningen (just den typ av regelstyrt arbete som datorer gör så felfritt och bra). Å andra sidan löper tankarna friare ovanför det jag gör och ställer frågor som, till exempel: ”Förekommer selektionsparametern här alltid som en produkt tillsammans med populationsstorleken? – Ah, intressant!” eller ”Var fan har mutationstakten tagit vägen, har jag tappat bort den?”.

Den sista frågan kan vara riktigt betydelsefull. Om problemet jag studerar handlar om, säg, nya mutationers betydelse för evolutionshastigheten, så är det ju viktigt att mutationstakten finns med i modellens ekvationer. Gör den inte det så har jag troligtvis slarvat eller gjort något räknefel i ekvationsformuleringen eller i beräkningsarbetet. Men det finns också en möjlighet att jag har kunnat ”förkorta bort” mutationstakten när jag kommit fram till de senare delarna av uträkningarna, och att jag därmed är ett intressant resultat på spåret. Det fenomen jag intresserar mig för visar sig kanske ”på ett djupt sätt” vara oberoende av mutationstakten; slutresultatet blir kanske att i just detta sammanhang får man samma utfall med såväl en hög som med en låg mutations-takt.

Att teoretiskt arbete alltid innebär ett samtidigt ifrågasättande av utnyttjade antaganden och förutsättningar betonas av Thomas Kuhn (1977) i hans artikel ”A Function for Thought Experiments”.⁷ För honom förklarar detta varför en fysiker som gör ett tankeexperiment faktiskt lär sig något om världen genom att göra det, trots att inga nya fakta samlas in som en del av experimentet. Ett tankeexperiments syfte är istället att lära ut mer om världen genom att tvinga till djupare genom-

gångar av vad tillgänglig kunskap faktiskt betyder när den används i en väl-specifierad, oväntad, men inte orimlig situation.

Därmed har vi kommit fram till arbetets tredje och kanske mest grundläggande syfte, nämligen *att producera en inre känsla av säkerhet*. Det har hänt, när jag suttit länge och arbetat med en ekvation, att jag blivit så spänd att händerna skakar och jag har svårt att skriva. Det rör sig då ofta om en situation där jag tidigare gjort några snabba uträkningar och kommit fram till – vad jag tycker – ett jätteintressant resultat. Och nu sitter jag och försöker steg för steg, och med den noggrannhet som måste till, ordentligt härleda samma resultat. Jag vill så gärna att det tidigare uppnådda resultatet skall vara rätt, men jag vågar inte vara säker. Plit, plit, koll, koll. Till slut orkar jag nästan inte mer, spänningen blir för stor. Men skulle jag då komma fram till det förväntade, enkla, vackra resultatet, så släpper spänningarna och lyckokänslan blir överväldigande. Arbetet har lett fram till sitt viktigaste syfte – jag har övertygat mig själv. Med Ludwig Wittgensteins utmärkta nyord kan man påstå att mitt forskningshantverks yttersta mål är *Sich-überzeugens*, ”självövertygelser”⁸.

HUR ÖVERTYGAR MAN SIG SJÄLV?

Det kritiska parallella tänkandet sysslar således inte bara med beräkningarnas förutsättningar och antaganden. Det handlar också om att hela tiden kontrollera att man är säker på att allt man gör är rätt och övertygande. Det matematiska handlaget har här en unik position i vårt tänkande, för är vi övertygade om att vi ”räknat rätt” så är vi också säkra på slutresultatet.

Målet är nått: Ekvationerna som beskriver asexualitetens för- och nackdelar är lösta, jag är säker på att mina uträkningar är rätt, och forskningsresultaten är publicerade (utdrag ur Bengtsson 2012).

Att vara säker på sitt resultat är inte bara självtillfredsällande. Det är också nödvändigt för att man skall kunna våga stå för, presentera och publicera insikter som andra (förhoppningsvis) inte finner triviala. Den egna säkerheten utgör därmed basen för att kunna övertyga andra, vilket utgör ett så viktigt element i all vetenskap.

Vilka metoder använder vi då för att övertyga oss *själva* om att vi tänkt rätt, trots den gnatiga inre rösten som ständigt ifrågasätter vad vi gör? Otvivelaktigt använder vi många olika sådana metoder – alla vet att det till exempel går att övertyga sig om något, om man bara upprepar det tillräckligt många gånger för sig själv. Den viktigaste metoden vi utnyttjar tycks emellertid vara att distansera vårt eget tänkande från oss själva, så att vi kritiskt kan studera vad vi gör ”utifrån”. Detta är basen för allt det vi kallar att ”tänka högt”.

Så måste jag, till exempel, när jag för

mig själv vill reda ut en komplicerad tankegång, gå fram till tavlan i mitt arbetsrum och skriva upp de viktigaste punkterna, föreläsa för mig själv om dem, göra dem visuellt synliga för mig som om jag vore en utanförstående betraktare.⁹ Uppenbart är det precis detsamma som Villani behöver den nätan slutne Mouhot till: som en ursäkt för att tydligt formulera ett tänkande som han själv klarast beskriver i en kommunikationssituation. Jag vet inte säkert, men jag inbillar mig att även mycket inbundna och ickekommunikativa matematiker talar högt med sig själva, om än alldeles tyst.

TÄNKA HÖGT

Därmed är det dags att återvända till ursprungsfrågan: Varför föredrar jag blyertspennan och blocket framför datorn och beräkningsprogrammet?

Ovan skrev jag att det kan ges olika slags svar på frågan. Det jag nu kommit fram till tycks mig emellertid avgörande. Jag tror nämligen att min känsla av att vara säker på ett uppnått matematiskt/teoretiskt resultat är starkare om jag producerat det på papper än om jag producerat det på en dator.

Det prydliga intryck en skärmsida eller datorutskrift ger övertygar mig inte, snarare tvärt om. I synnerhet i början av en längre beräkningsprocess vet jag att det finns många felaktigheter – kanske på grund av att jag förenklat verkligheten för mycket i mina modellantaganden eller gjort dåliga approximeringar i starten – vilka lätt döljs för mitt kritiska sinne om de får en för prydlig gestaltning. Mitt behov av att målmedvetet tänka högt för mig själv, steg för steg, materialiseras uppenbart bättre av den fula och ojämna

handstilen på pappret än av datautskriften med all dess förmenta exakthet och typografiska prudentlighet.

Det finns således ingen anledning att skylla på datorprogrammets olika svagheter när det gäller att förklara varför jag helst fortfarande utför mitt teoretiska arbete med papper och penna. Som jag ovan misstänkte, visar det sig att jag föredrar denna arbetsmetod. Det är på pappret jag klarast hör vad jag tänker. Det är där jag tydligast kan se felan. Det är där som den befriande känslan av att vara *riktigt säker* starkast väller fram.¹⁰

NOTER

- ¹ Jag tackar Orvar Löfgren, Boel Berner, Torbjörn Säll, Tommy Nordström, Per Lundberg och Leif Lönnblad för olika former av hjälp med denna artikel. Tack för ekonomiskt stöd går till Kungl. Fysiografiska Sällskapet och Tryggers Stiftelse.
- ² En rolig bok som anknyter till detta tema är Henscher (2012).
- ³ Motsvarar ungefär Nobelpriset för matematik.
- ⁴ Självklart innehåller mitt vetenskapliga arbete också mera allmänt igenkännbara delar som problemspecificering, uppsatsskrivande och textredigering. Om dessa har jag emellertid inget speciellt att säga här.
- ⁵ Eftersom alla arbetsresultat förhoppningsvis förr eller senare resulterar i en vetenskaplig artikel brukar jag skriva på engelska, även när anteckningarna i första hand bara är till för mig själv.
- ⁶ Den roll som *sidan* spelar i matematiken ges en inledande beskrivning i Manguel (2006).
- ⁷ Omtryckt i *The Essential Tension* (1977); ursprungligen en artikel från 1964.
- ⁸ Ordet används av Wittgenstein i § 3 av *Über Gewissheit/On Certainty* (1969). Denna anteckning skrev han 1950–1951, kort före sin död. Av intresse i detta sammanhang är också hans postumt utgivna bok *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956). En annan livgivande bok om logiken i matematiskt arbete, fri från den logiska positivismens snäva ram, är Imre Lakatos' *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery* (1976); även detta en postum bok,

vilken huvudsakligen baseras på artiklar från 1963–1964.

⁹ I alla miljöer där seriöst teoretiskt arbete pågår finns det skrivtavlor på väggarna – i arbetsrum, korridorer, kaffehörn. ”Riktiga matematiker” vill helst att de skall vara gjorda av frostat glas och att man skriver på dem med skolkrita. Från en diskussion med en programutvecklare, som aldrig skulle fästa något arbetsresultat på papper med penna, har jag förstått att väggtavlor är viktiga även i sådana miljöer. Resultatet av en gruppdiskussion blir då normalt att skrivtavlan man pratat vid blir avfotograferad varefter bilden sänds till deltagarna via nätet.

¹⁰ Charles Dodgson var en insiktsfull logiker med en stark känsla för matematikens paradoxala aspekter. Det visade han inte minst när han som Lewis Carroll berättade om Alice i underlandet och bakom spegeln. Att han förstod vikten av att *skriva* matematik för att uppnå övertygelse framgår av följande konversation där Humpty Dumpty frågar:

“How many days are there in a year?”

“Three hundred and sixty-five,” said Alice.
[---]

“And if you take one from three hundred and sixty-five, what remains?”

“Three hundred and sixty-four, of course.”

Humpty Dumpty looked doubtful. “I’d rather see that done on paper,” he said. (Carroll, 1871).

REFERENSER

- Bengtsson, Bengt O., 2012. “Asexuals, polyploids, evolutionary opportunists...: The population genetics of positive but deteriorating mutations”, i *Genetics* 191:1393–1395.
- Carroll, Lewis [pseudonym för Charles L. Dodgson], 1871. *Through the Looking-Glass, and What Alice Found There*. London: Macmillan. [Finns i många senare utgåvor.]
- Goody, Jack, 1977. *The Domestication of the Savage Mind*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Henschel, Philip, 2012. *The Missing Ink: The Lost Art of Handwriting*. London: Faber & Faber.
- Kuhn, Thomas S., 1977. “A function for thought

experiments”, i *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, Imre, 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Manguel, Alberto, 2006. “Done on paper: The dual nature of numbers and the page”, i *The Life of Numbers*. Madrid: T Ediciones.

Villani, Cédric, 2012. *Théorème vivant*. Paris: Grasset.

Wittgenstein, Ludwig, 1956, 1967, 1978. *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.

Wittgenstein, Ludwig, 1969, 1975. *Über Gewissheit: On Certainty*. Oxford: Blackwell Publishing.

SUMMARY

Thinking Aloud with Paper and Pencil
(*Tänka högt med papper och penna*)

A pad of squared paper, a pencil, an eraser, peace and quiet. These are the tools with which I have done most of my research in theoretical population genetics. But what do I *do* when I solve my equations describing evolutionary processes? Inspired by among others the French mathematician Cédric Villani, I discuss what happens when I chose to consider my research craft as a special kind of work process. Communication turns out to be surprisingly important in the process – particularly between different parts of my own thinking. The primary aim of my work process seems to be to produce the comforting feeling of *certainty*. To reach this goal, my slow pencil-driven handwriting is often better than efficient and apparently fail-safe computer programs.

Keywords: mathematical models, population genetics, certainty, communication, Villani.

Bengt O. Bengtsson, professor emeritus, Genetics, Department of Biology, Lund University, Lund, Sweden.