

Progression i elevers begreppsliga kunskap om tal i bråkform som delar av helhet

Originalartikel

Anna Teledahl^{1*} , Frida Harvey¹ , Magnus Esbjörner^{1&2}  och Samuel von Malortie 

Sammanfattning

För att utveckla elevers begreppsliga kunskap i matematik behöver lärare ha djupa insikter om elevers kunskapsprogression, men forskning visar att detta varierar stort mellan lärare. Studiens syfte är att bidra med förståelse för hur elevers begreppsliga kunskap om tal i bråkform som delar av helhet kan beskrivas som handlingar på olika kvalitativa nivåer. Grundskoleelevers skriftliga lösningar på problem som handlar om tal i bråkform har analyserats med fokus på om eleverna *identifierar*, *urskiljer* eller *använder* olika egenskaper, principer och relationer hos och mellan begrepp. Resultatet visar fyra nivåer där elever går från att urskilja och identifiera ett fåtal egenskaper och principer, hos begrepp som de har svårt att använda, till att urskilja flera egenskaper och principer vars relationer de sedan använder för att dra slutsatser. Denna progressionsbeskrivning kan användas praktiskt för att planera för undervisning som utvecklar elevers begreppsliga kunskap men också som teoretisk utgångspunkt för liknande studier inom andra matematikområden.

Nyckelord: matematik, begreppslig kunskap, tal i bråkform, progression

Abstract

To develop students' conceptual understanding in mathematics, teachers need deep insights into students' knowledge progression; however, research shows that this varies significantly among teachers. This study aims to contribute to an understanding of how students' conceptual knowledge of fractions as parts of a whole can be described in terms of actions on different qualitative levels. Elementary students' written solutions to problems involving fractions have been analyzed with a focus on whether the students *identify*, *discern*, or *use* various properties, principles, and relationships within and between concepts. The results show four levels, where students progress from discerning and identifying a few properties and principles—within concepts they struggle to use—to discerning multiple properties and principles whose relationships they then use to draw conclusions. This description of progression can be applied practically to plan teaching that develops students' conceptual understanding, and also serves as a theoretical starting point for similar studies in other areas of mathematics.

Keywords: mathematics, Conceptual Knowledge, fractions, progression

¹ Örebro universitet

² Örebro kommun

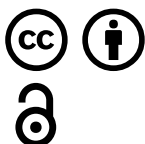
*Korresponderande författare:
Anna Teledahl
anna.teledahl@oru.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 13, nr 2, 2025, 70–95
DOI: [10.61998/forskul.v13i2.25297](https://doi.org/10.61998/forskul.v13i2.25297)
ISSN: 2001-6131

Publicerad: 2025-09-04

© 2025 Författarna.

Denna artikel publiceras med öppen tillgång under villkoren i Creative Commons. Erkännande-licensen CC BY 4.0, som tillåter användning, spridning och reproduktion i vilket medium som helst, förutsatt att originalverket är korrekt citerat.



Introduktion

Forskning om matematikundervisning har under en lång tid förespråkat undervisning som skapar möjligheter för eleverna att utveckla *begreppslig kunskap*¹, den kunskap som förknippas med en djup förståelse för matematiken (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996; Kazemi & Stipek, 2001; Star & Stylianides, 2013). Richland med flera (2012) har visat att lärares förståelse för vad begreppslig kunskap är varierar. En bristande förståelse av vad begreppslig kunskap innebär kan få till följd att elevers möjlighet att utveckla sådan kunskap riskerar att reduceras till förmåga att använda och genomföra procedurer, samt att känna till de matematiska termer som beskriver procedurerna.

Matematikdidaktisk forskning beskriver ofta ämnet matematik som en samling begrepp, där varje begrepp har en relation till andra närliggande begrepp (Hiebert & Lefevre, 1986), vilket indikerar att begreppslig kunskap handlar om mer än att kunna använda matematiska termer för begreppen. Det handlar bland annat om att förstå hur olika begrepp relaterar till varandra, hur de kan generaliseras eller bli mer specifika samt hur de kan förstås i relation till matematiska principer² (Crooks & Alibali, 2014; Hiebert & Lefevre, 1986). I en svensk kontext – där termen förmåga, snarare än kunskap, används – beskrivs detta i kursplanen i matematik i Lgr22 som en ”förmåga att använda och beskriva matematiska begrepp och samband mellan begrepp” (Skolverket, 2022).

Begreppslig kunskap ingår i det som Carlgren (2023) kallar elevers ämneskunnande och hon menar att lärare behöver ha djupa kunskaper om hur ämneskunnandet kan se ut. I ett ramverk som beskriver en matematiklärares olika kunskaper, skiljer forskarna tydligt ut kunskaper om på vilka olika sätt eleverna kan uppfatta matematik och matematiska begrepp (Hill m.fl., 2008). Flera studier har visat att den här typen av lärarkunskap har betydelse för kvaliteten på den undervisning som lärarna bedriver, vilket i sin tur påverkar elevernas möjligheter till lärande (Hill m.fl., 2008; Tchoshanov, 2011). Richland med flera (2012) menar att matematikdidaktisk forskning behöver undersöka elevers uppfattningar om matematiska begrepp, och hur progression i begreppslig kunskap kan se ut, samt hur lärare kan utveckla kunskapen om detta i olika sammanhang. Beskrivningar av progression i elevers kunskap efterfrågas också i större utsträckning när lärare ska ge elever formativ återkoppling på genomförda arbeten, något som har blivit allt viktigare i skolan (Sadler, 2009; Suurtamm m.fl., 2016).

Att brister i utveckling av begreppslig kunskap är en orsak till svårigheter för elever i matematik är belagt tidigare (Yetim & Alkan, 2013). Det gäller inte minst det matematiska området *tal i bråkform* (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Meert m.fl., 2010; Pitkethly & Hunting, 1996). Svensk forskning har vidare visat att lärarstudenter har svårigheter med tal i bråkform (Tossavainen & Helenius, 2024) samt att den progression som finns i svenska läromedel omfattar få tydliga utvecklingslinjer (Ahl & Helenius, 2021). Det finns anledning att anta att djupa kunskaper om elevers ämneskunnande eller begreppsliga kunskap om tal i bråkform är begränsad i den svenska kontexten, framför allt när det gäller hur en kunskapsprogression skulle kunna beskrivas. Det behövs empiriskt grundade beskrivningar av progression i elevers kunskap om tal i bråkform, som bygger på observerbara handlingar. Sådana beskrivningar kan fungera som utgångspunkt både för vidare forskning, som underlag för planering av undervisning och bedömning av elevers nivå (Ball, 2007; Schoenfeld, 2014; Säfström, 2017).

1 Begreppslig kunskap är vår svenska översättning av begreppet *Conceptual Knowledge*, som är det begrepp som används internationellt i diskussionen om olika typer av kunskap.

2 En mer utförlig beskrivning av kunskap om relationer mellan begrepp som *Connection Knowledge* finns under rubriken Teori.

Syftet med studien som presenteras i denna artikel var att utveckla empiriskt grundad kunskap om hur elevers progression inom begreppslig kunskap kan se ut för det specifika begreppet tal i bråkform. Studien kan ses som ett bidrag till den forskning om elevers specifika ämneskunskande som efterfrågats av bland annat Carlgren (2023). Den forskningsfråga som är aktuell i vår studie är denna:

- Hur kan en möjlig kunskapsprogression – som identifieras genom elevers skriftliga lösningar – beskrivas när det gäller tal i bråkform som delar av helhet?

Tidigare forskning om tal i bråkform som delar av helhet

Tal i bråkform definieras som tal skrivna med formeln a/b där både a och b är heltal, och b inte får vara 0. Tal i bråkform beskrivs i forskningen som ett mångfacetterat och komplext begrepp som är utmanande för elever att förstå (se t.ex. Charalambous & Pitta-Panzi, 2007). Begreppet delas ofta in i de fem delkomponenterna *tal i bråkform som delar av helhet*, *tal i bråkform som förhållande*, *tal i bråkform som division*, *tal i bråkform som rationella tal* och *tal i bråkform som operator* (Behr m.fl., 1983; Kieren, 1976).

För att undersöka frågor som rör hur elever utvecklar kunskap om tal i bråkform har forskare (t.ex. Petersson, 2015) föreslagit att aspekter av tal i bråkform, som nämnda delkomponenter, bör undersökas var för sig. Denna studie riktar in sig på den första delkomponenten. I tidigare forskning har delar av helhet beskrivits som en av de största utmaningarna för elever att förstå tal i bråkform (Getenet & Callingham, 2017; Hackenberg & Sevinc, 2022; Strother m.fl., 2016).

Viktiga egenskaper och principer hos tal i bråkform som delar av helhet

Tal i bråkform som delar av helhet handlar om att dela in mängder i lika stora delar, alternativt att skapa helheter utifrån givna delar. Det finns egenskaper hos tal i bråkform som delar av helhet som forskning har visat att det är viktigt att eleverna känner till om de ska kunna utveckla förståelse av begreppet (Charalambous & Pitta-Panzi, 2007). I likhet med Helenius och hans kollegors beskrivning (2021), betraktas begrepps egenskaper i denna studie som synonymt med *kännetecken för begreppet* eller ”vilken beskaffenhet ett begrepp har”.

Det finns också en uppsättning principer och regler för tal i bråkform och deras användning, som elever behöver känna till. Bristande kunskaper om egenskaper och principer för tal i bråkform medför ofta svårigheter när sådana tal ska jämföras och relateras till varandra, eller när de ska adderas respektive subtraheras (Braithwaite & Siegler, 2017).

För att förstå tal i bråkform som delar av helhet behöver elever förstå relationen mellan täljare och nämnare samt deras innebörd och roll. De behöver också förstå att täljare och nämnare tillsammans bildar en helhet, där nämnaren talar om vilka slags delar det är frågan om, till exempel tredjedelar, och där täljaren talar om hur många sådana delar man har, till exempel två tredjedelar ($2/3$). Elever behöver även förstå att bråkdelarna – oavsett om det handlar om tredjedelar eller tolfte delar – måste vara lika stora för att ha samma namn och att bråkdelarna då är lika stora, därför att de representerar lika stora delar av samma helhet. Att bråkdelarna har samma namn är detsamma som att de har samma nämnare. En tredjedel är ett namn på en bråkdel med nämnaren tre, och tredjedelar är ett exempel på bråkdelar där varje del representerar en tredjedel av en och samma helhet. Dessutom behöver elever förstå att fler bråkdelar av en helhet innebär mindre storlek per bråkdel, till exempel att tolfte delar är mindre delar än tredjedelar (Charalambous & Pitta-Panzi, 2007).

Forskning visar att det är utmanande för elever att förstå dessa principer. Löwing (2016) lät i en studie ett par tusen svenska grundskoleelever göra diagnostiska tester inom olika matematiska områden. Resultatet visade att endast en tredjedel av de deltagande eleverna i årskurs 2 och knappt hälften av de deltagande eleverna i årskurs 5, uppfattade att bråkdelar med samma namn måste vara lika stora.

Förståelsen av täljarens och nämnarens roller – att täljaren anger antalet bråkdelar, medan nämnaren definierar bråkdelen och att dessa två komponenter utgör en enhetlig representation av tal i bråkform, snarare än två separata heltal – är en central men utmanande princip för elever (Charalambous & Pitta-Panzi, 2007; Gabriel m.fl., 2013; Wellberg m.fl., 2023). En vanligt förekommande missuppfattning, benämnd *whole number bias*, innebär att elever behandlar täljaren och nämnaren som oberoende heltal. Detta leder till felaktiga slutsatser – exempelvis att $\frac{1}{4}$ uppfattas som större än $\frac{1}{3}$ då heltalet 4 är större än 3 (Braithwaite & Siegler, 2017; Obersteiner m.fl., 2019), eller att två ekvivalenta tal i bråkform som $\frac{2}{3}$ och $\frac{4}{6}$ uppfattas vara olika stora (Wellberg m.fl. 2023).

För att kunna jämföra tal i bråkform måste elever förstå att talen först måste relateras till en helhet (Ladegaard Pedersen & Bjerre, 2021). Neuman (1993) visar i en studie att, även om eleverna förstod att bråkdelar behövde vara lika stora, missade de att alla delarna tillsammans skulle bilda en helhet. Elever som uppmanades att dela ett snöre i tredjedelar eller fjärdedelar kapade ofta snörena på måfå, vilket ledde till att de blev olika långa. När eleverna i studien sedan klippte bort bitar för att se till att snörena blev lika långa, tog de inte hänsyn till att de bortklippta bitarna också tillhörde den ursprungliga helheten.

Strother med flera (2016) konstaterar i sin studie att låg- och mellanstadieelever – när de relaterar bråkdelar till en helhet – ofta gör detta i relation till helheten 1, men har svårt att relatera bråkdelar till helheter som är större än 1. Detta blir problematiskt i uppgifter där elever ska illustrera, beräkna eller förklara relationer som $\frac{1}{4}$ av 12 eller jämföra bråkdelar av en mängd som $\frac{1}{3}$ av 15 och $\frac{1}{4}$ av 16. Sammantaget kan man säga att om elever inte tydligt förstår vilken helhet talet i bråkform refererar till, riskerar de att missuppfatta både talets värde och relationer mellan tal i bråkform (Charalambous & Pitta-Panzi, 2007).

En central del av att förstå tal i bråkform som delar av helhet är att känna till att ett och samma tal i bråkform kan representeras på olika sätt (Yetim & Alkan, 2013), till exempel som grafiska representationer, matematiska symboler, skriftspråk, konkret material och verkliga händelser (jfr Behr m.fl., 1992). För att kunna använda tal i bråkform i olika sammanhang, behöver elever förstå och kunna relatera olika representationer till varandra. Exempelvis att $\frac{1}{3}$ är samma sak som "en tredjedel" eller en rektangel uppdelad i tre lika stora delar, där en av delarna är färglagd.

Ahl och Helenius (2021) har dock, i sin granskning av två svenska matematikboksserier från årskurs 3 till årskurs 9, identifierat att elever erbjuds liten variation i hur tal i bråkform representeras, oavsett vilken årskurs materialet riktar sig till. Enligt deras granskning möter elever i dessa läromedel huvudsakligen och genomgående grafiska representationer av tal i bråkform (se figur 1), vilket riskerar att hämma elevens utveckling av, förståelse för och användning av tal i bråkform.

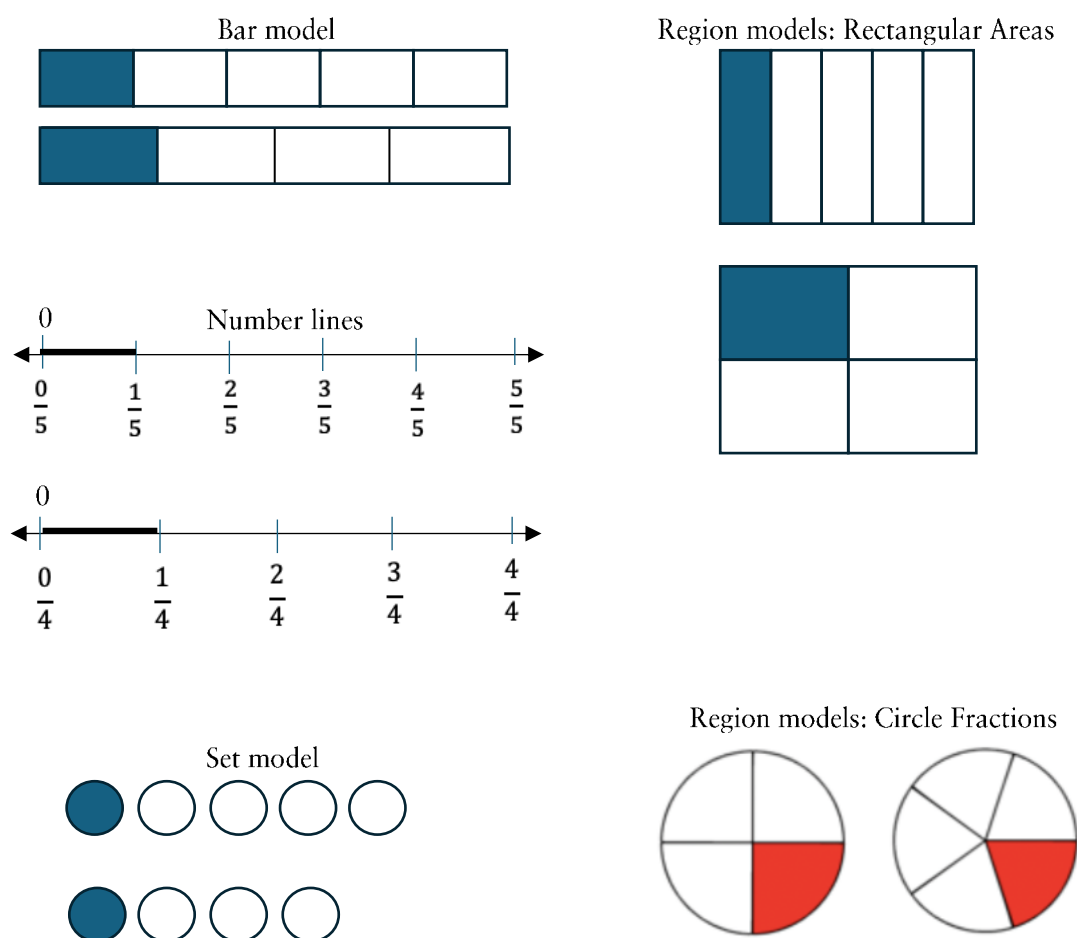
Strother med flera (2016) har undersökt elevers arbete med tal i bråkform som delar av helhet. De har identifierat fyra olika grafiska representationer av tal i bråkform; indelning av kongruenta block (bar model, "blockmodell" på svenska), tal på tallinjer (number lines), indelning av godtyckliga geometriska figurer som cirklar och kvadrater (region model) och indelning av uppsättningar av föremål (set model). I figur 1 illustreras jämförelse mellan talen $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ med dessa fyra olika grafiska representationer. Strother med flera (2016) menar att vissa grafiska representationer tycks vara mer effektiva än andra när elever arbetar med tal i bråkform som

delar av helhet. Studien visade också att kongruenta block och tal på en tallinje, ökade elevernas möjlighet att jämföra storleken på olika bråkdelar. Däremot fann forskarna att godtyckliga geometriska figurer, eller uppsättningar av föremål, riskerade att leda till missförstånd, samt till felaktiga beräkningar och jämförelser av tal i bråkform.

Singh med flera (2021) identifierade i en studie att lärarna i mycket stor utsträckning representerade tal i bråkform grafiskt genom cirklar. Forskarna konstaterade att denna begränsning ledde till svårigheter för eleverna att lösa vissa typer av uppgifter som handlar om tal i bråkform.

Figur 1

Olika grafiska representationer av bråkdelarna $\frac{1}{5}$ och $\frac{1}{4}$



Not: De fyra olika grafiska representationerna av tal i bråkform; blockmodell (bar model), tal på tallinjer (number lines), indelning av godtyckliga geometriska figurer som cirklar och kvadrater (region model) och indelning av uppsättningar av föremål (set model). Bilden är modifierad efter Strother med flera (2016, s. 135).

Sammanfattningsvis har tidigare forskning beskrivit att elever behöver både kunna identifiera, använda samt resonera om matematiska begrepp. När det gäller tal i bråkform som delar av helhet, behöver de förstå att bråkdelarna måste vara lika stora, att täljare och nämnare har olika roller; det vill säga att täljaren anger antalet bråkdelar medan nämnaren visar vilken storlek bråkdelarna har. Eleverna måste även förstå att tal i bråkform behöver relateras till en helhet, liksom att talen kan representeras på olika sätt.

Teori

Begreppslig kunskap i matematik beskrivs på olika sätt av olika forskare. I ett försök att sortera bland olika definitioner och sätt att mäta begreppslig kunskap, skiljer Crooks och Alibali (2014) ut sex olika typer:

1. Connection Knowledge, kunskap om relationer mellan begrepp.
2. General Principle Knowledge, kunskaper om fakta och generella principer.
3. Knowledge of Principles Underlying Procedures, kunskap om de matematiska principer som ligger till grund för olika procedurer.
4. Category Knowledge, kunskap om hur matematiska områden kan organiseras.
5. Symbol Knowledge, kunskaper om matematiska symboler.
6. Domain Structure Knowledge, kunskap om strukturen på matematiken som en hel disciplin.

Förutom en beskrivning av dessa sex typer av begreppslig kunskap, har Crooks och Alibali (2014) också undersökt hur elevers begreppsliga kunskap mäts i studier inom matematikdidaktisk forskning, forskning som behandlar specifika matematikområden som till exempel i *likheter*. De konstaterar att vad som mäts, hur det mäts och hur resultaten tolkas, kan variera stort både inom och mellan forskningsområden i matematikdidaktik. Denna variation, menar de, beror på att det saknas samlade och koherenta definitioner av vad begreppslig kunskap är och hur den kan beskrivas. De beskrivningar som finns är sinsemellan väldigt olika. Sfard (1991) menar till exempel att kunskap om begrepp skapas genom handling medan Star (2007) är kritisk mot idén att man överhuvudtaget skulle kunna skilja mellan begreppslig kunskap och procedurell kunskap (kunskap om hur man gör).

Crooks och Alibali (2014) menar att ett sätt att ta sig an de utmaningar som är förknippade med mätning av elevers begreppsliga kunskap, är att fokusera på uppgifter som eleverna ska genomföra, samt att begränsa sig till två typer av begreppslig kunskap: General Principle Knowledge och Knowledge of Principles Underlying Procedures. De menar också att General Principle Knowledge – kunskap om principer eller fakta, det vill säga *att* saker är som de är – är lämplig att mäta genom att be elever identifiera eller förklara exempel, definitioner eller uttalanden. Knowledge of Principles Underlying Procedures – kunskap om de matematiska principer som ligger till grund för olika procedurer, det vill säga *varför* saker är som de är – mäts lämpligast genom att låta elever genomföra uppgifter eller lösa problem och då välja lämpliga procedurer baserade på en egen utvärdering av dem.

Till Crooks och Alibalys beskrivning av dessa sätt att mäta begreppslig kunskap, är det viktigt att tillägga att explicit kunskap – det vill säga kunskap som är möjlig att observera direkt – är beroende av elevers språkliga förmåga. Elevers förmåga att resonera verbalt i matematik är tätt sammankopplad med deras begreppsliga kunskap, men det finns inte ett *ett-till-ett-förhållande* mellan dessa förmågor, eftersom kunskap kan vara både explicit och implicit (Greeno, 1993; Hatano & Inagaki, 1986).

I skriftligt material representeras handlingar både explicit och implicit. När handlingar representeras explicit kan det till exempel ske genom direkta beskrivningar av handlingar. Implicit blir det när en representation, till exempel en summa, kan sägas föregås av en handling. Handlingen kan vara en addition utan att den direkt representeras av exempelvis en beräkning.

Med inspiration från Crooks och Alibali (2014) beskrivning, har vi valt att skilja mellan tre handlingskategorier: *identifiera*, *använda* och *resonera*. Att identifiera eller känna igen regler och principer för hur tal i bråkform definieras och representeras är för oss ett exempel på det som Crooks och Alibali (2014) kallar för General Principle Knowledge tillsammans med Symbol Knowledge. Handlingen innebär då att ge uttryck för ett urskiljande av olika egenskaper och principer. Att kunna använda principerna för att, till exempel manipulera tal i bråkform, har vi betraktat som en egen handlingskategori. Den motsvarar delvis det som Crooks och Alibali (2014) kallar Knowledge of Principles Underlying Procedures, men också Symbol Knowledge och Connection Knowledge. Den sista handlingskategorin handlar om elevers resonemang. Vi har valt att inte ta med denna i vårt ramverk, vilket beskriver elevers kunskapsprogression. Inte för att den inte är viktig. Skälet är i stället att den hade krävt data som innehåller fler och mer innehållsrika beskrivningar av elevernas resonemang än de vi har haft tillgång till.

Progression inom begreppslig kunskap

Utifrån svårigheterna med att definiera begreppslig kunskap är det ingen överraskning att det i matematikdidaktisk forskning finns få detaljerade beskrivningar av progression i elevers begreppsliga kunskap. Det närmaste man kan komma är sannolikt forskning om det som kallas *hypothetical learning trajectories* (HLT) (Clements & Sarama, 2004). Syftet med forskning om HLT är att beskriva hur elever konstruerar kunskap utifrån redan etablerade kunskapsstrukturer (Clements & Sarama, 2004). När det gäller tal i bråkform som delar av helhet, har till exempel Steffe (2001, 2010) beskrivit olika HLT med utgångspunkt i elevers kunskaper om hela tal och operationer, medan Simon med flera (2018) beskrivit HLT som utgår från elevers kunskaper om mätning. Det gemensamma i beskrivningarna av HLT är att de – utifrån ett konstruktivistiskt perspektiv – fokuserar på en beskrivning av undervisning som sekvenser av uppgifter, med syfte att bygga elevers kunskap med hjälp av tidigare kunskaper eller scheman.

Nagy (2017) skiljer mellan progression i undervisning och progression i elevers kunskaper. I vår studie fokuserar vi på progression i elevers kunskaper inom en delkomponent av området tal i bråkform – tal i bråkform som delar av helhet, utifrån en idé om vad elever gör. Det finns en koppling till undervisning och uppgifter i vår studie. Men, till skillnad från forskning om HLT, ligger vårt fokus på hur handlingar kan identifieras i elevers skriftliga lösningar, samt beskrivas och förstås som kvalitativt skilda nivåer av begreppslig kunskap.

I tabell 1 har förmågor om tal i bråkform som delar av helhet, identifierade i tidigare forskning, beskrivits i form av handlingar och handlingskategorier. Detta utgör ett ramverk som har använts vid analyser i studien. Förmågorna är uppdelade i två handlingskategorier: *identifiera* och *använda*. Vi har sedan identifierat två handlingar för varje handlingskategori, handlingar som eleverna manifesterar när de identifierar respektive använder sig av de egenskaper och principer som tidigare forskning har identifierat som viktig för förståelsen av tal i bråkform som delar av helhet. Kategorin identifiera har delats upp i handlingarna Urskilja egenskaper och principer och Urskilja relationer mellan begrepp och dess representationer. Kategorin använda har delats upp i handlingarna Använda och växla mellan representationer och Använda egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att manipulera och/eller skapa nya objekt.

I tabell 1 återfinns beskrivningar av fiktiva handlingar ämnade att underlätta förståelsen för respektive handling. De fiktiva handlingarna har alla identifierats i studien.

Tabell 1*Ramverk för begreppslig kunskap om tal i bråkform som delar av helhet*

Handlingskategorier	Handlingar	Beskrivning av handlingen
Identifiera	Urskilja egenskaper och principer	<i>Robin kan urskilja delarna som delar av en helhet</i> <i>Robin kan urskilja att delarna måste vara lika stora samt att alla delarna tillsammans utgör en helhet. Hen kan urskilja att antalet delar som behövs för att skapa en helhet är beroende av vilken typ av delar man valt.</i>
	Urskilja relationer mellan begrepp och dess representationer.	<i>Robin kan identifiera olika representationer av tal i bråkform med samma värde</i>
Använda	Använda och växla mellan representationer.	<i>Robin kan växla mellan att representera en tredjedel symboliskt och att grafiskt visa en tredjedel i relation till en helhet. Robins tredjedelar har samma storlek i grafiska representationer</i>
	Använda egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att manipulera och/eller skapa nya objekt	<i>Robin kan tolka relationen mellan olika bråkdelar (se att de har samma värde/storlek) och kan relatera dessa till respektive helhet. Robin kan skapa helheterna vilket gör det möjligt att jämföra dem.</i>

Not. Ramverket beskriver handlingar och handlingskategorier, identifierade i tidigare forskning, samt beskrivningar av fiktiva handlingar.

Metod

Studiens kontext

Syftet med den studie som redovisas i denna artikel var att utveckla empiriskt grundad kunskap om elevers progression inom begreppslig kunskap om tal i bråkform. I studien analyserades 165 skriftliga lösningar på två matematiska problem, från fyra klasser i årskurserna 2 (en klass med 21 elever), 5 (två klasser med 24 respektive 25 elever) och 8 (en klass med 28 elever). Lösningarna är hämtade från ett ettårigt ULF-projekt³ (som involverade två forskare i matematikdidaktik och fyra matematiklärare från fyra olika svenska grundskolor. En lärare undervisade som klasslärare i årskurs 2, två som klasslärare i årskurs 5 och en som matematiklärare i årskurserna 7–9 (endast eleverna i en av lärarens klasser i årskurs 8 deltog i studien). Skolorna har blandade upptagningsområden och två är centralt belägna F–6-skolor i en större svensk kommun, en är en centralt belägen F–9-skola i samma kommun och en skola är en F–6-skola på landsbygden.

Målet för projektet var att designa undervisningsaktiviteter som skulle utveckla elevernas begreppsliga förmåga. Inom projektet konstruerades, testades och utvärderades lektionssekvenser,

³ ULF står för utbildning, lärande, forskning. Projektet med namnet Förbättrad matematikundervisning utifrån begreppsförmåga – utveckling av undervisningsaktiviteter som leder till ökad begreppsförmåga hos svenska elever var en del av Örebro ULF på Örebro universitet.

lektioner, lektionsaktiviteter och matematiska problem. Lärarna som deltog i projektet tillfrågades utifrån att de tidigare hade deltagit i matematikinriktade aktiviteter anordnade av forskarnas lärosäte. Studien som presenteras i denna artikel är en delstudie i projektet och artikeln är skriven av två av projektets lärare tillsammans med de två forskarna.

Matematiska problemuppgifter i studien

Ett förtest genomfördes i samtliga klasser, inom området tal i bråkform. Det visade att elever hade lättare att lösa matematikuppgifter typiska för läromedel, exempelvis "färglägg hälften av figuren", än uppgifter som de inte vanligen stöter på, exempelvis "går det att dela in en ore-gelbunden figur i två halvor? Motivera ditt svar". Vi konceptualiserade den förstnämnda som typuppgift och den sistnämnda som atypisk matematikuppgift. Ett mål när nya uppgifter skulle konstrueras var därför att konstruera atypiska uppgifter, som i så stor utsträckning som möjligt skulle uppfattas av eleverna som problemlösningssuppgifter (jfr Jäder m.fl., 2020, för kriterier för en problemlösningssuppgift som ger utrymme för kreativa matematiska resonemang).

I studien granskades elevlösningar från fem atypiska matematikuppgifter. I uppgifterna fick eleverna avgöra vad som var mest, störst och längst, baserat på att de fick veta att två *olika bråkdelar* – till exempel $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ av två *olika helheter* – utgör samma mängd eller har samma storlek, volym eller längd. Gemensamt för de fem uppgifterna var att helheterna som talen relaterade till var olika, men de varierade, utifrån huruvida mängd, storlek, volym och längd var given eller inte (se bilaga 1).

Denna artikel behandlar elevlösningar från två av de fem ovannämnda matematikuppgifterna:

1. I klass 4a har $\frac{2}{5}$ av klassen ett husdjur. I 4b har $\frac{1}{3}$ husdjur. Det finns lika många elever som har husdjur i båda klasserna. I vilken klass går det flest elever?
2. På ett kalas finns två olika stora kannor saft. Efter en stund innehåller kannorna lika mycket saft. I den gula är det då kvar $\frac{3}{5}$ och i den röda $\frac{3}{4}$. I vilken kanna fanns det mest saft från början?

Målet med uppgifterna var att eleverna skulle kunna se att till exempel $\frac{2}{5}$ av en mängd är lika många, eller lika mycket, som $\frac{1}{3}$ av en annan mängd. Utifrån det skulle de kunna räkna fram hur helheterna för respektive andel såg ut och därmed kunna jämföra dessa.

Ett sätt att lösa den här typen av problem är att välja en mängd eller ett mått som är lika. I uppgift 1 kan vi välja ett antal elever som har husdjur. Om vi utgår ifrån att det finns 10 elever med husdjur i båda klasserna då är $\frac{2}{5} = 10$ elever med husdjur i 4a, samtidigt som $\frac{1}{3} = 10$ elever med husdjur i 4b. Om $\frac{2}{5}$ av klassen motsvarar 10 elever i klass 4a så motsvarar $\frac{1}{5}$ av klassen 5 elever. Alla elever i klassen motsvarar $\frac{5}{5}$ alltså finns det 25 elever i klass 4a. I klass 4b motsvarar då $\frac{1}{3}$ av klassen 10 elever och hela klassen (det vill säga $\frac{3}{3}$) består då av 30 elever.

Uppgift 2 kan lösas på motsvarande sätt genom att vi "hittar på" eller "väljer" att det är 12 dl kvar i båda saftkannorna. Om 12 dl motsvarar $\frac{3}{5}$ av saften i den gula kannan så motsvarar $\frac{1}{5}$ då 4 dl och följaktligen $\frac{5}{5}$ av kannan 20 dl. I den röda saftkannan leder motsvarande resonemang till att $\frac{3}{4}$ av saften motsvarar 12 dl vilket innebär att $\frac{1}{4}$ motsvarar 4 dl. Hela kannan, eller $\frac{4}{4}$, motsvarar då 16 dl saft.

Datainsamling

För att besvara frågeställningen ”Hur kan en möjlig kunskapsprogression, som identifieras genom elevers skriftliga lösningar, beskrivas när det gäller tal i bråkform som delar av helhet?”, har empiriska data, i form av skriftliga elevlösningar, samlats in och analyserats. Data utgörs av 165 skriftliga elevlösningar från två matematikuppgifter, 89 för uppgift 1 och 76 för uppgift 2, från fyra klasser (en i årskurs 2, två klasser i årskurs 5 och en i årskurs 8). Projektets deltagare har gemensamt konstruerat uppgifterna. Samtliga uppgifter användes i alla årskurser, men i klassrummet varierade det huruvida uppgiften presenterades skriftligt (årskurs 5 och 8) eller muntligt och konkret (årskurs 2) för att anpassas till elevernas olika åldrar.

De fyra lärarna i studien hade, på olika sätt i samtal med eleverna, säkerställt att eleverna i samtliga klasser hade förstått problemformuleringen. Eleverna i samtliga klasser hade vid lektionerna tillgång till praktiskt material som exempelvis klossar, snören och pappersremсор. Praktiskt material användes i större utsträckning i årskurs 2 och 5 än i årskurs 8. De elevlösningar som analyserades i studien kommer från elever, vars vårdnadshavare gett projektet tillstånd att samla in skriftligt material. Det innebär att majoriteten av elevernas lösningar kunde analyseras i de fyra klasserna (alla lösningar samlades in för att alla elever skulle behandlas lika). Utöver medgivande fanns inget övrigt urval.

Analys av data

Elevlösningarna analyserades i två steg. I det första steget analyserades uppgift för uppgift, uppdelade utifrån vilken uppgift som lösningen hörde till. I det andra steget syntetiserades mönster för elevers begreppsliga kunskap som var synliga mellan elevuppgifterna. Studiens två analyssteg följer huvudsakligen Braun och Clarkes (2012) beskrivning av tematisk analys, som genomförs i sex faser; Steg 1 - Fas 1: Bekanta sig med materialet, Fas 2: Kodning av materialet och Fas 3: Gruppering av lösningar utifrån kodning, Steg 2 - Fas 4: Jämförelse av grupper av lösningar mellan uppgifter och Fas 5: Namngivning och beskrivning av teman (se tabell 2). Analysmetodens steg och faser är sammanfattade i tabell 2.

Tabell 2

Sammanfattning av de olika stegen i analysprocessen

Studiens analyssteg	Braun & Clarkes faser och hur vi arbetat med dessa
Steg 1: analys av elevlösningar <i>uppgift för uppgift</i>	- Fas 1: Bekanta oss med materialet – titta på alla lösningar och bilda oss en uppfattning om dem. Indelning i två grupper: 1. endast svar eller 2. svar med tillhörande lösning - Fas 2: Kodning av materialet – utifrån ramverket notera vilka handlingar respektive lösning visar - Fas 3: Gruppering av lösningar utifrån kodning, uppgift för uppgift.
Steg 2: syntetiserades av mönster i elevers begreppsliga kunskap <i>mellan uppgifter</i>	- Fas 4: Jämförelse av grupper av lösningar mellan uppgifter – skapande och revidering av teman - Fas 5: Namngivning och beskrivning av teman

Not. Stegen är utvecklade från Braun och Clarkes (2012) sex faser.

I den första fasen i analysen bekantade vi oss med materialet genom att överskådligt titta på lösningarna, och därefter grupperades lösningarna grovt utifrån om eleverna enbart skrivit svar eller om det både fanns svar och lösning. Elevlösningar som endast innehöll svar togs inte med i den fortsatta analysen.

I fas 2 kodades sedan elevlösningarna utifrån handlingar som har identifierats i tidigare forskning och som presenteras i tabell 1; urskilja egenskaper och principer, urskilja relationer mellan begrepp och dess representationer, använda och växla mellan representationer samt använda egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att manipulera och eller skapa nya objekt. I fas 3 grupperades lösningarna utifrån de handlingar som identifierats i fas 2.

I nästa steg av analysen inledde vi med fas 4 där de grupper av elevlösningar som identifierats i fas 3 jämfördes först uppgift för uppgift utifrån respektive handling och sedan ännu en gång utifrån handling, men denna gång mellan uppgifter. På så sätt identifierades distinkt skilda nivåer inom varje handling, baserat på likheter och skillnader mellan lösningarna. I fas 5 jämfördes sedan först vilka principer och egenskaper som lösningarna indikerade att eleverna på olika nivåer hade urskilt, därefter vilka relationer och representationer de hade urskilt och om, och i så fall hur, de hade använt sig av det de hade urskilt. Vi kunde genom denna analys beskriva vad som kännetecknade respektive grupp av lösningar för respektive handling. Dessa beskrivningar återfinns i kolumnen längst till höger i tabell 3.

Handlingarna som manifesterades i lösningarna på den första nivån liknade varandra, oberoende av typ av handling. Detsamma gällde för övriga tre nivåer. Nivåbeskrivningarna kunde därför syntetiseras till fyra distinkt skilda grupper av elevlösningar, där eleverna genom sina lösningar visade olika nivå av begreppslig kunskap om tal i bråkform som delar av helhet.

Dessa grupper av lösningar namngavs för att beskriva de handlingar som var aktuella i respektive grupp, och utgör resultatens fyra teman:

- Grupp 1: Elever som skapar representationer
- Grupp 2: Elever som skapar representationer och jämför
- Grupp 3: Elever som skapar representationer, jämför och relaterar till olika helheter genom att anta ett givet värde
- Grupp 4: Elever som skapar representationer, jämför och relaterar till olika helheter utan att anta ett givet värde.

Mellan dessa grupper återfinns en progression i handlingar, som uttrycker begreppslig kunskap om tal i bråkform som delar av helhet.

Det är en utmaning att utifrån skriftlig kommunikation identifiera elevers kunskaper, eftersom det alltid kräver ett visst mått av tolkning av vilken kunskap som eleven har kommunicerat. I hela analysarbetet har artikelns författare arbetat tillsammans och, genom diskussioner utifrån elevlösningarna, kodat, tematiserat och beskrivit materialet. Det ser vi som en styrka då olika tolkningar har diskuterats och perspektiverats.

Etik

Projektet granskades och godkändes av Etikprövningsmyndigheten innan genomförandet (diarienummer 2022-02912-01). Det följer Vetenskapsrådets riktlinjer för god forskningssed (2017). Både eleverna och deras vårdnadshavare informerades skriftligt och muntligt om projektets

syfte och utformning. Skriftliga godkännanden att delta i projektet samlades in både från elever och vårdnadshavare. Elevlösningar har endast samlats in från elever där både elev och vårdnadshavare gett sitt medgivande att delta i studien. Alla elevlösningar som innehåller personuppgifter pseudonymiserades av ansvarig lärare, innan övriga deltagare fick tillgång till dem. För att undvika att handstil ska kunna kännas igen har samtliga texter i elevlösningarna skrivits om av artikelns författare. Data från studien har lagrats enligt upprättad datahanteringsplan.

Resultat

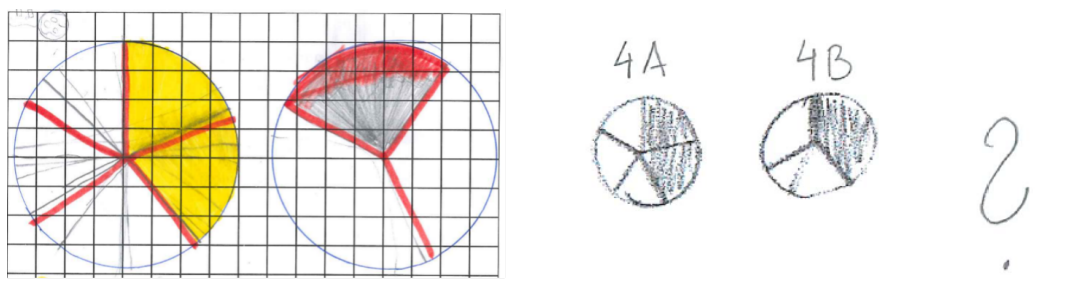
Analysen av elevernas skriftliga lösningar på problemuppgifter om tal i bråkform som delar av helhet visade en progression i elevernas kunskap. Denna redovisas som fyra olika grupper nedan och representerar fyra nivåer av begreppslig kunskap, där den fjärde innehåller de lösningar som innebär den mest avancerade kunskapen.

Grupp 1: Elever som skapar representationer

Elever vars lösningar ingår i denna grupp har tolkats som att de har påbörjat problemlösningsaktiviteten. Dessa elever kunde urskilja vissa egenskaper och principer för tal i bråkform som delar av helhet, som ingår i handlingskategorin *identifiera*.

Figur 2

Elevlösning 1 och 2, årskurs 5, uppgift 1⁴



Samtliga elever i grupp 1 påbörjade problemlösningsaktiviteten genom att rita en grafisk representation av sitt tal i bråkform, vilket elevlösningarna 1 och 2 i figur 2 visar exempel på. I elevlösning 1 och 2 illustrerar eleverna de bråkdelar $\frac{2}{5}$ respektive $\frac{1}{3}$ – som förekommer i uppgiften, men utgår från helheter (cirklar) som har samma storlek. I uppgiften är det bråkdelarna som har samma storlek (representerar samma antal), inte helheten.

De grafiska representationerna är genomgående cirklar. Elever i denna grupp kunde urskilja principen att tal i bråkform utgör delar av helhet, vilket kan representeras grafiskt, liksom egenskapen att bråkdelarna i ett och samma tal i bråkform i en grafisk representation, måste vara lika stora. De kunde även urskilja att antalet delar som behövs för att skapa en helhet är beroende av vilken typ av delar man valt, det vill säga att eleverna urskilde egenskapen att nämnaren avgör antalet delar i den grafiska illustrationen.

När det gäller handlingskategorin att använda sina kunskaper om tal i bråkform, visade eleverna i den här gruppen förmåga att använda och växla mellan olika representationer av bråkdelar. Det visades genom att de omsatte tal i bråkform, skrivet med matematiska symboler i problemformuleringen till en grafisk representation. Det var emellertid en utmaning för eleverna i

4 Uppgift 1: I klass 4a har $\frac{2}{5}$ av klassen ett husdjur. I 4b har $\frac{1}{3}$ husdjur. Det finns lika många elever som har husdjur i båda klasserna. I vilken klass går det flest elever?

denna grupp att dra slutsatser utifrån sina representationer, vilket innebar att de stannade vid att grafiskt illustrera talen. Eleverna försökte sig inte på att dra en slutsats i relation till det aktuella matematiska problemet.

Grupp 2: Elever som skapar representationer och jämför

Elever vars lösningar ingår i denna grupp har tolkats som att de visade förståelse för samma principer och egenskaper i handlingskategorierna *identifiera* och *använda* som grupp 1 ovan. Men inom handlingskategorin *urskilja principer* visade de också att de förstod att representationer av tal i bråkform kan användas för att jämföra bråkens absoluta (snarare än relativa) storlek.

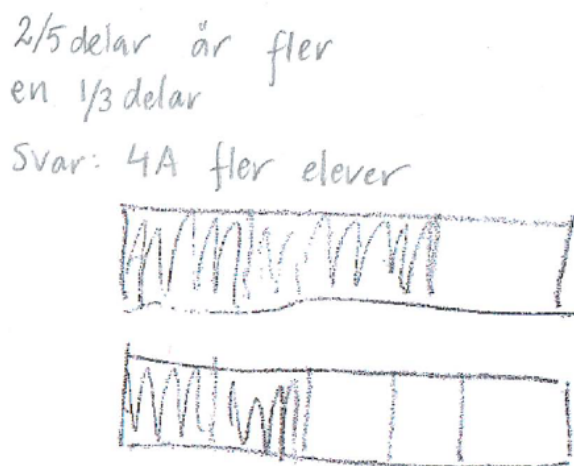
Eleverna i grupp 2 drog slutsatser om det matematiska problemet genom att göra olika typer av jämförelser. Jämförelserna, inom handlingskategorin *använda*, gjordes utifrån att eleverna först hade urskilt relationen mellan del och helhet. Jämförelser av det här slaget gjordes ofta visuellt, och eleverna använde cirklar eller blockmodeller, eftersom de representerade talen grafiskt. Det förekom dock att de också nyttjade skriftspråk och symboler när de använde och växlade mellan olika typer av representationer.

För att jämföra talens absoluta storlek jämförde eleverna hur stort fält av respektive cirkel eller rektangel som var färglagt. Cirklarna respektive rektanglarna, som jämfördes i den här typen av lösningar, var lika stora och representerade samma helheter det vill säga att fältet som delades grafiskt i bråkdelar utgjorde helheten 1. Eleverna urskiljde att talet behöver relateras till en helhet, och använde egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att skapa nya objekt. Slutsatserna blev dock felaktiga i relation till problemformuleringen, eftersom storleken på talet relaterades till helheten 1 i stället för till olika helheter som problemformuleringarna kräver.

Denna typ av felaktig slutsats – där talet relateras till helheten 1 i stället för olika helheter – illustreras i elevlösning 3 i figur 3. I elevlösning 3 har eleven representerat talen med symboler och block, där blockmodellen används för att jämföra talens storlek. Eleven har ritat två lika stora block, där respektive block motsvarar helheten 1. Eleven delar sedan in respektive block i efterfrågade bråkdelar (vi bortser här ifrån att elevens ena block ser ut att representera $\frac{2}{3}$ snarare än $\frac{1}{3}$). Eleven jämför sedan storleken, utan att reflektera över att det var bråkdelarna $\frac{2}{5}$ och $\frac{1}{3}$ som enligt uppgiften skulle vara lika stora, och inte helheterna. Metoden att relatera talen till helheten 1, oavsett vilken information som hade getts i problemformuleringen förekommer oftare bland yngre än äldre elever i det analyserade datamaterialet.

Figur 3

Elevlösning 3, årskurs 8, uppgift 1



En annan metod för att jämföra talen inom handlingskategorin *använda*, som främst förekommer bland elever i årskurs 8 i vårt datamaterial, var att de använde egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att skapa nya objekt. Eleverna omvandlade talen, representerade med symboler, till gemensam nämnare och jämförde sedan talens storlek, men utan att relatera talen till olika helheter. Eleverna drog slutsatsen att det tal som var störst, efter omvandling till minsta gemensamma nämnare, utgjorde svaret på frågan. Detta illustreras i elevlösning 4 i figur 4.

Figur 4

Elevlösning 4, årskurs 8, uppgift 1

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{15} \quad \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15} \quad \frac{3}{3} = 4b$$

$$\frac{6}{15} = 4A \quad \frac{5}{15} = 4B$$

$$\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$$

Svar: 4A ($\frac{6}{15}$)

I båda metoderna – jämförelse av grafiska representationer som relaterar till helheten 1 och omvandling till gemensam nämnare – är det talens absoluta storlek som jämförs snarare än talens relativa storlek i förhållande till olika helheter. Denna absoluta storlek grundar sig i tanken om att helheten är 1.

Grupp 3: Elever som skapar representationer, jämför och relaterar till olika helheter genom att anta ett givet värde

Till skillnad från elever i grupp 2 löste elever, vars lösningar ingår i grupp 3, uppgifterna och drog korrekta slutsatser i relation till det matematiska problemet. Inom handlingskategorin *identifiera* hade de urskilt de principer och egenskaper som elever i grupp 1 hade gjort, och de gjorde liksom eleverna i grupp 2 olika typer av jämförelser. Men till skillnad från elever i grupp 2 relaterade de sina tal i bråkform till olika helheter, innan jämförelserna gjordes.

Eleverna i grupp 3 synliggjorde i sina lösningar relationen mellan bråkdelarna och de korresponderande helheterna grafiskt eller symboliskt, eller både och, så att det framgick att helheterna var olika. Eleverna använde och växlade mellan flera olika representationer så som symboler, skriftspråk och grafiska representationer i form av olika geometriska figurer och blockmodeller.

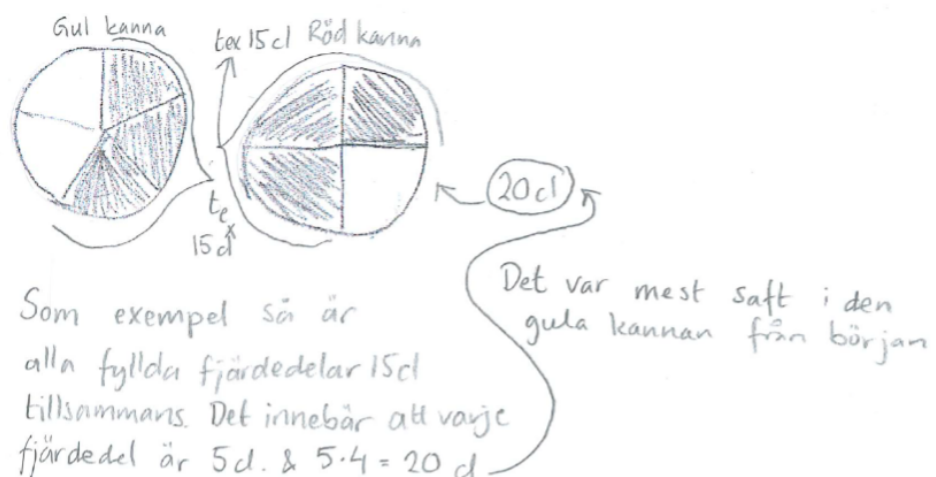
Vad gäller relationen mellan del och helhet urskilde eleverna att talen kan relatera till helheter med olika givna värden. De urskilde också principen att talen kan jämföras först när talen fått en gemensam referenspunkt i form av ett värde eller en enhet som inte behöver vara 1, alternativt ett värde på respektive bråkdel som gör att helheten är skild från 1. Denna princip nyttjades av eleverna när de använde egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att skapa nya objekt.

Eleverna i den här gruppen förstod att de kunde anta ett godtyckligt värde på den givna bråkdel, exempelvis en mängd, längd eller volym. Till exempel kunde en andel motsvara 5 elever, 1

km, 5 cl eller utgöra en area med ett bestämt mått. Detta värde använde de sedan för att beräkna den korresponderande helheten i båda talen genom att multiplicera värdet med antalet bråkdelar i respektive tal. Därefter kunde de två olika helheterna jämföras, och eleverna kunde dra slutsatser om det givna matematiska problemet. Detta gjorde att jämförelserna blev korrekta.

Elevlösning 5 i figur 5, är ett exempel på en elev som antog ett godtyckligt värde, som den sedan använde för att göra beräkningar. I lösningen kombinerade eleven en grafisk representation av talen med en symbolisk, men använde huvudsakligen symboler för att göra jämförelser som löste problemet. Eleven antog att den mängd som är gemensam är 15 cl. Elevlösning 5 visar också att eleven förstår att detta värde är godtyckligt, då eleven skriver "tex 15 cl". Därefter beräknades vad varje bråkdel var värd, i detta fall 5 cl, eftersom tre fyllda delar tillsammans innehåller 15 cl. Slutligen multiplicerades respektive bråkdel med antalet bråkdelar i varje helhet. Eleven kom då fram till att helheten i den röda kannan som består av fjärdedelar, behöver vara $4 \times 5 \text{ cl} = 20 \text{ cl}$, vilket är mindre än innehållet i den gula kannan. I lösningen är det inte synligt om eleven gjort beräkningen $5 \times 5 \text{ cl} = 25 \text{ cl}$ för att dra slutsatsen att 25 cl är mer än 20 cl.

Figur 5



Elevlösning 5, årskurs 8, uppgift 2⁵

Grupp 4: Elever som skapar representationer, jämför och relaterar till olika helheter utan att anta ett givet värde

Elever, vars lösningar ingår i grupp 4, urskilde samma principer och egenskaper som elever i grupp 3 urskilde. Däremot hade de inom handlingskategorin *identifiera* också urskilt att tal i bråkform har proportionella egenskaper och principen och att bråkdelarna kan relatera till vilka värden eller enheter som helst och ändå jämföras. I relationen mellan del och helhet urskilde eleverna att talen kan relatera till olika helheter utan att ge helheten ett egenbestämt men givet värde.

Detta medför, i handlingskategorin *använda*, att när eleverna som tillhör grupp 4 använde egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att skapa nya objekt, löste de uppgifter

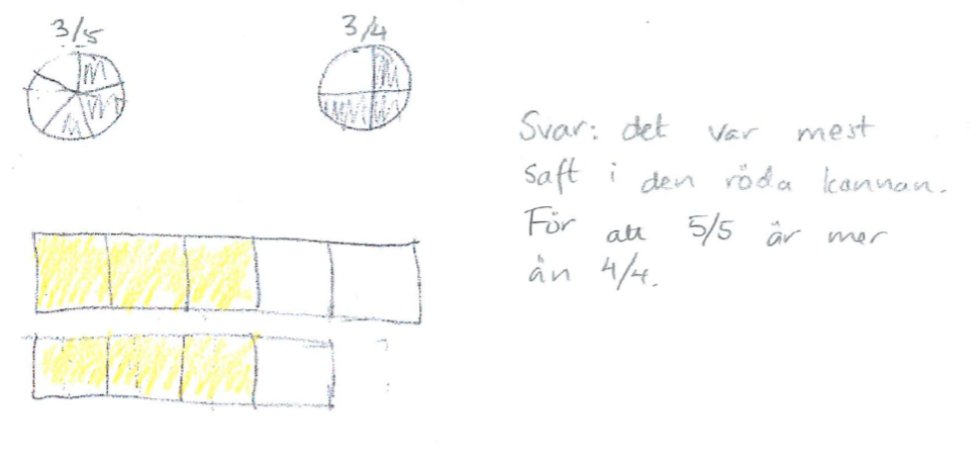
5 Uppgift 2: På ett kalas finns två olika stora kannor saft. Efter en stund innehåller kannorna lika mycket saft. I den gula är det då kvar $\frac{3}{5}$ och i den röda $\frac{3}{4}$. I vilken kanna fanns det mest saft från början?

utan att behöva relatera helheten till en specifik mängd, längd eller volym som de själva hade bestämt. I stället förde eleverna resonemang om relationen mellan bråkdelarna och deras korresponderande helheter med hjälp av grafiska representationer. I dessa elevlösningar antogs inga värden för att beräkna bråkdelarnas relativa storlek, utan i stället fördes generella resonemang baserade på talens proportionella egenskaper. Relationen mellan de två talen är proportionell i betydelsen att de bråkdelar som har samma storlek kan manipuleras utifrån ett ett-till-ett-förhållande. Det fanns förståelse för denna relation och dess oberoende av absolut storlek. Det gjorde det möjligt för eleverna att dra slutsatser om de två helheter som korresponderar med bråkdelarna. Eleverna i denna grupp använde sig huvudsakligen av symboler och grafiska representationer (blockmodeller).

I elevlösning 6 i figur 6, visade eleven först med symboler och grafiska representationer vilka bråkdelar som är aktuella. Genom blockmodellen med färglagda gula rutor visade eleven att $3/4$ och $3/5$ var lika mycket, då dessa hade getts samma storlek i båda blocken. Det var tre bråkdelar i båda exemplen, och eftersom det är samma mängd saft kan eleven dra slutsatsen att det krävs ytterligare två femtedelar för att skapa en helhet i det övre blocket, medan det endast krävs ytterligare en fjärdedel för att skapa helheten i det nedre blocket. Härifrån drog eleven slutsatsen att figuren med femtedelar utgjorde en större figur som helhet än fjärdedelarna, vilket betyder att det är den större av de två saftkannorna. Ingenstans i lösningen hade eleven angett ett värde på delarna eller helheten, utan förde i stället ett generellt resonemang om hur bråkdelarna förhåller sig till varandra och respektive helhet.

Figur 6

Elevlösning 6, årskurs 5, uppgift 2



Not. Av texten kan utläsas att eleven har blandat ihop vilken av saftkannorna som innehöll respektive mängd, det vill säga den kannan som var röd i uppgiften blir gul i elevens beskrivning och tvärtom. Det påverkar dock inte elevens resonemang.

Sammanfattning av kunskapsprogression om tal i bråkform som delar av helhet

I tabell 3 sammanfattas resultatet. Den identifierade kunskapsprogressionen presenteras mellan grupperna av elever, som befinner sig på respektive nivå, i relation till respektive handling.

Tabell 3

Sammanfattning av progression mellan de fyra grupperna i relation till olika handlingar

Handlings-kategorier	Handlingar	Progression
Identifiera	Urskilja egenskaper och principer	Grupp 1 Urskiljer: - att bråkdelar behöver vara lika stora - att antalet delar i en grafisk illustration är beroende av nämnaren i talet. Grupp 2 Urskiljer det grupp 1 urskiljer, och: - att tal i bråkform utgör delar av en helhet som kan representeras grafiskt. - att tal i bråkform behöver relateras till en helhet, relaterar till helheten 1 - att representationen kan användas för att jämföra talens absoluta (snarare än relativa) storlek. Grupp 3 Urskiljer det elever i grupp 1 och 2 urskiljer, och: - att talens storlek kan relateras till olika helheter. - att olika helheter och dess delar kan jämföras så länge en gemensam referenspunkt pekats ut eller skapats i form av ett värde eller en enhet. Grupp 4 Urskiljer det elever i grupp 3 urskiljer, och: - talets proportionella egenskaper. - att helheterna kan ges vilka värden eller enheter som helst och ändå jämföras.
	Urskilja relationer mellan begrepp och dess representationer	Grupp 1 Urskiljer: - grafiska och symboliska representationer av samma tal i bråkform Grupp 2 Urskiljer det som elever i grupp 1 urskiljer, och: - relationen mellan del och helheten 1 Grupp 3 Urskiljer: - flera olika representationer av samma tal i bråkform - relationen mellan del och en helhet med olika möjliga värden Grupp 4 Urskiljer: - flera olika representationer av samma tal i bråkform - relationen mellan del och helhet utan givet värde
Använda	Använda och växla mellan representationer.	Grupp 1 - Översätter symboliska representationer till grafiska. - Använder cirklar för att representera tal i bråkform grafiskt. Grupp 2 - Använder och växlar mellan flera olika representationer för att lösa problem. - Använder cirklar och/eller blockmodeller för att representera tal i bråkform grafiskt. Grupp 3 - Använder och växlar mellan flera olika representationer för att lösa uppgifter. - Använder olika geometriska figurer och/eller blockmodeller för att representera tal i bråkform Grupp 4 - Använder och växlar huvudsakligen mellan symboler och grafiska representationer - Använder huvudsakligen blockmodeller och matematiska symboler som representationer
	Använda egenskaper, principer och relationer mellan begrepp för att manipulera och/eller skapa nya objekt	Grupp 1 - Jämför inte relationer mellan objekt. Grupp 2 - Jämför olika tal i bråkform genom att först relatera dem till helheten 1. Grupp 3 - jämför olika tal i bråkform genom att relatera dem till ett eget valt värde tex. antal/mängd/längd/volym. Använder dessa värden för att göra beräkningar för att svara på frågan. Grupp 4 - Jämför olika tal i bråkform utifrån generella principer

Diskussion

Trots att forskning om matematikundervisning länge har förespråkat undervisning som skapar möjligheter för eleverna att utveckla begreppslig kunskap (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996; Kazemi & Stipek, 2001; Star & Stylianides, 2013), är det vanligt att lärare har olika uppfattningar av vad begreppslig kunskap är (Richland m.fl., 2012). Denna varierande kunskapsnivå, menar Richland med flera (2012), leder till att många lärare får svårt att designa och bedriva undervisning som syftar till att utveckla elevers begreppsliga kunskap.

Studiens syfte var att utveckla empiriskt grundad kunskap om hur elevers progression inom begreppslig kunskap kan se ut, när det gäller tal i bråkform som delar av helhet. Utifrån detta syfte är en viktig aspekt av studiens analys att den bygger på elevers lösningar av uppgifter, som inte är typiska för svensk undervisning om tal i bråkform. Uppgifterna i studien kräver något mer än att eleverna väljer och tillämpar en procedur, vilket är det mest typiska. Dessa atypiska uppgifter skapar en situation där frågor kan ställas om i vilken utsträckning den begreppsliga kunskap som eleverna visar upp är beroende av att de möter uppgifter de inte känner igen. Snarare än att minska tillförlitligheten i beskrivningen av progressionen, menar vi dock att det var de atypiska uppgifterna som gjorde det möjligt att överhuvudtaget identifiera elevernas begreppsliga kunskap i skriftliga lösningar. Crooks och Alibalis (2014) beskrivningar av forskningens olika definitioner av begreppslig kunskap, bygger alla på något som ligger bortom elevers val och tillämpade av bekanta procedurer. Det innebär att det är först när eleverna ställs inför något annat än de vanliga uppgifterna som deras begreppsliga kunskap blir synlig (se till exempel Jäder & Johansson, 2025).

Resultatet beskriver en kunskapsprogression om tal i bråkform som delar av helhet. Resultatet visar att de elever som befann sig på en nivå för en handling, också befann sig på samma nivå för andra handlingar. Utifrån detta kan tre progressionslinjer utläsas som rör

1. elevers flexibilitet i tillvägagångssätt
2. relationen mellan delarna och helheten
3. representationer av tal i bråkform

Resultatdiskussionen är strukturerad utifrån de tre progressionslinjerna.

1. *Flexibilitet i tillvägagångssätt*

Resultatet beskriver fyra olika grupper av lösningar. Dessa grupper används för att illustrera den progression i begreppslig kunskap som har identifierats i studien. Grupperna kan sägas representera en utveckling av tillvägagångssätt, som går från användning av enbart procedurer till en kombination av procedurella metoder och begreppslig kunskap. Elever vars lösningar återfinns i någon av de första två grupperna tog sig an problemuppgifterna genom att leta efter något de kände igen, en egenskap eller procedur de kunde efterlikna. Utifrån sina tidigare erfarenheter skapade de representationer eller skapade representationer och jämförde dessa som ett första steg. Härifrån kom de emellertid inte vidare. Eleverna har sannolikt inte ställts inför atypiska matematikuppgifter där bråkdelar av olika storlek ska jämföras eller manipuleras på något sätt. Elever i grupp 1 och 2 verkar då sakna eller ha otillräckliga strategier eller procedurer för att lösa uppgifterna.

Det vi utifrån vår data kan dra slutsatser om är att eleverna, som endast skapade en representation, stannade i handlingskategorin *identifiera*, och hade svårt att använda sina kunskaper om tal i bråkform i nya situationer. Elever som skapade representationer och jämförde dessa, gjorde ansatser till att *använda* sina kunskaper om tal i bråkform. Men även dessa elever tog sig

an uppgifterna procedurellt och letade efter strategier som de kände igen, till exempel att göra om talen till bråkform med en gemensam nämnare eller jämföra arean av de färgade cirkelsektorerna. Tendensen att arbeta procedurellt som en ingång till uppgiften är i sig inte ett tecken på att det inte skulle handla om begreppslig kunskap. Som Star (2007) har argumenterat för, är det svårt att helt skilja procedurell kunskap från begreppslig kunskap. Det finns, utifrån hur vi har analyserat elevernas lösningar, flera tecken på att elever urskilde principer (jfr Crooks och Alibalis, 2014, General Principle Knowledge) som de sedan använde, även om de med dessa inte kom så långt som man skulle önska.

Elever som skapade representationer, jämförde och relaterade till olika helheter (med eller utan givet värde) tog sig i mindre utsträckning än övriga elever an uppgifterna procedurellt. Detta visas exempelvis genom att de kunde relatera tal i bråkform till olika helheter, som de själva valde utifrån uppgiftens kontext, eller utan att ge helheterna ett värde. När elever i studien kombinerade procedurella tillvägagångssätt med sin begreppsliga kunskap ledde det till att de ställde effektiva frågor. Då blev resonemangen också mer korrekta och metoderna som användes mer generellt gångbara.

2. Relationen mellan delarna och helheten

För att förstå tal i bråkform behöver elever förstå att bråkdelen i talet relaterar till en helhet (Charalambous & Pitta-Panzi, 2007). Eleverna i grupp 1, som skapade representationer, hade urskilt att bråkdelen behöver vara lika stora. Men de relaterade inte bråkdelen till en helhet, och kom därför inte vidare i uppgiftslösningen. Liksom Strother och medförfattare (2016) påvisade i sin studie, visade vår studie att, för de elever som skapade representationer och jämförde, blev en annan helhet än 1 till ett bekymmer för dem. Det är tydligt att dessa elever antog 1 som helheten, till vilket bråkdelen ska relateras. Att färglägga en av tre cirkelsektorer innebär att eleverna har färglagt $\frac{1}{3}$ av helheten 1. Detta räcker emellertid inte i dessa atypiska matematikuppgifter, där uppgifterna bygger på principen att bråkdelen inte har några egna värden. I stället relaterar de till helhetens värde, som i dessa uppgifter *inte* är 1.

Eleverna verkade sakna kunskap både inom General Principle Knowledge, Connection Knowledge och Symbol Knowledge. Eleverna i grupp 3, som skapade representationer, jämförde och relaterade dessa till olika helheter, verkar däremot ha förstått att, även om den grafiska representationen är en till antalet (en cirkel, en rektangel, ett block), kan denna enhet representera en större mängd, längd eller volym. En rektangel kan motsvara 20 cl eller 25 klasskamrater, även om rektangeln är en till antalet. De elever vars lösningar ingår i grupp 3 väljer *lämpliga* enheter som gör det möjligt att sätta ihop helheter, utöver att på egen hand tilldela delarna enheter. De förstår att de kan ta vilket värde som helst och de väljer då ett som är lätt att arbeta med.

I grupp 4 för eleverna samma resonemang som eleverna i grupp 3 men utan att anta värden på de olika bråkdelen. I stället för dessa elever resonemang med hjälp av bråkdelenas proportionella egenskaper. Det är kanske det mest typiska exemplet i studien på det som benämns Knowledge of Principles Underlying Procedures, det vill säga kunskap om de matematiska principer som ligger till grund för olika procedurer. Här utgår eleverna från att relationerna mellan de olika helheterna och dess delar är proportionella, det vill säga om man skalar upp figuren i storlek eller sätter ett större värde på helheten, så bevaras relationerna mellan delarna. Eleverna i grupp 4 ger uttryck för att de också förstod att de kan välja vilket värde som helst, så länge de skalar upp på samma sätt i sina två helheter. Eftersom proportionerna består kunde eleverna uttala sig om sambandet mellan två helheter, oavsett om helheterna motsvaras av 30 eller 300, och oavsett om storheten är volym eller antal. Resonemanget kunde förlängas, så att eleverna inte behövde någon enhet utan kunde resonera på ett generellt plan i termer av lika, större eller mindre.

3. Representationer av tal i bråkform

En annan viktig aspekt för att förstå och kunna använda tal i bråkform är förmågan att urskilja, använda och växla mellan olika representationer av tal i bråkform (Yetim & Alkan, 2013). Det gäller exempelvis grafiska modeller, matematiska symboler, skriftspråk, konkret material och verkliga händelser (jfr Behr m.fl., 1992). Ahl och Helenius (2021) har identifierat en bristande variation av representationsformer av tal i bråkform i svenska läromedel. De menar att det, oavsett årskurs, finns en överrepresentation av grafiska representationer av tal i bråkform. Med tanke på detta är det föga förvånande att samtliga elever i studien använde grafiska representationer i sina lösningar av uppgifterna.

Av resultatet av denna studie framgår dock en skillnad i vilken typ av grafiska representationer som eleverna använde. Strother och medförfattare (2016) menar att blockmodeller och tallinjer ökar elevernas möjlighet att jämföra bråkdelar. Däremot riskerar godtyckliga geometriska figurer eller uppsättningar av föremål att leda till missförstånd och felaktiga beräkningar och jämförelser av tal i bråkform hos eleverna. I elevsvaren i vår studie förekom ofta cirklar som representation, men bland de elever som inte kom vidare i problemlösningen användes uteslutande cirklar som representationsform. Detta kan tolkas som att eleverna har både Symbol Knowledge och Connection Knowledge, men att dessa är begränsade och att denna begränsning är en av de faktorer som hindrar eleverna från att komma vidare.

Elever i övriga grupper använde också blockmodeller och de elever som förde generella resonemang gjorde oftast det med hjälp av blockmodeller. Utifrån resultatet kan vi inte sia om huruvida eleverna som stannade vid att skapa representationer hade kunnat lösa uppgifterna om de hade använt blockmodeller. Resultatet tyder ändå på att blockmodellen är en lämplig representation för att ta sig an atypiska uppgifter av det slag som eleverna mötte i denna studie.

Studiens teoretiska betydelse

Studien ger två teoretiska bidrag, dels en sammanställning av handlingskategorier och handlingar som har identifierats genom tidigare forskning (se tabell 2), dels de empiriskt grundade progressionsnivåerna som relaterar till tidigare forskning (se tabell 3). Inför studiens genomförande sammanställdes tidigare forskning om vad begreppslig kunskap inom bråk kan vara. De sex typerna av begreppslig kunskap som Crooks och Alibali (2014) har presenterat och som låg till grund för den sammanställning som återfinns i tabell 2, utgjorde en viktig utgångspunkt för både ramverket och analysen av studiens elevlösningar. Utifrån studiens resultat – det vill säga de handlingar som har identifierats i elevernas skriftliga lösningar – har empiriskt grundade beskrivningar av hur kunskapsprogression kan se ut inom respektive handling adderats till tidigare forskning. Ramverken kan användas dels för att förstå vad begreppslig kunskap kan innebära, dels som teoretisk utgångspunkt i vidare forskning där elevers begreppsförmåga analyseras för andra matematiska områden.

Studiens didaktiska betydelse

Empiriskt grundade beskrivningar av hur progression kan se ut inom ett visst kunskapsområde kan användas både i framtida forskning och som underlag för planering av undervisning och bedömning av elevers nivå (Ball, 2007; Schoenfeld, 2014; Säfström, 2017). Studiens resultat är ett exempel på en sådan beskrivning av kunskapsprogression, när det gäller tal i bråkform som delar av helhet. Kunskapsprogressionen bygger på att vi ser kunskapen som begreppslig och som manifesteras och därmed blir synlig i handlingar. De progressionslinjer och de nivågrupperingar som återfinns i studien kan vägleda lärare, både i planering och analys av undervisningen och för att ge formativ feedback om tal i bråkform (jfr Ball, 2007; Schoenfeld, 2014; Säfström, 2017).

Resultatet i studien påvisar en progression i kunskap när det gäller tal i bråkform som delar av helhet. Det kan jämföras med vad exempelvis Steffe (2001, 2010) benämner som *hypothetical learning trajectories* för samma begrepp, men som inte har en konstruktivistisk utgångspunkt.

Vår studie har dels fokuserat på vad som är observerbart i elevernas skriftliga lösningar, dels på vad som skiljer de observerbara handlingarna åt. Detta gör vi utan att koppla dessa till elevers mer omfattande kognitiva scheman, som också kopplar samman tal i bråkform med andra närliggande begrepp från till exempel aritmetik eller geometri. Beskrivningarna för respektive grupp, sammanfattade i tabell 3, skulle kunna hjälpa lärare att identifiera vilka handlingar som är aktuella för eleverna, vilka handlingar eleverna manifesterar i sina lösningar och vilka handlingar som kan vara aktuella i nästa steg, i undervisningen såväl som för enskilda elever.

I detta sammanhang är det värt att notera att de grupper av elevlösningar som har bedömts vara på nivå för en handling i analysen, visade sig också vara på samma nivå för andra handlingar. En sammanslagning av handlingar kan underlätta vid planering av undervisning som syftar till att möjliggöra för elever att ta sig till nästa nivå.

Fortsatt forskning

Vår studie ger exempel på hur progression i elevers begreppsliga kunskap kan beskrivas för ett specifikt matematikområde. Fokus har legat på elevers handlingar, såsom till exempel *identifiera* eller *använda*. Utifrån resultatet väcks nya frågor om både progression i begreppslig kunskap inom andra matematiska områden, och om begreppslig kunskap i form av handlingar. Fortsatta studier inom andra matematiska områden skulle kunna ge värdefulla kunskapsbidrag när det gäller elevers specifika ämneskunskande i matematik, medan studier med fokus på andra sätt att identifiera progression skulle kunna ge värdefulla insikter om hur begreppslig kunskap kan definieras, upptäckas och kategoriseras. Handlingskategorin *resonera*, som valdes bort i denna studie, är också värd att uppmärksammas i framtida studier, där ljuset riktas mot elevers möjligheter att uttrycka matematiska resonemang i skriftliga lösningar.

Tack

Studien är genomförd som en del av ett ULF-projekt. Specifikt handlar delprojektet om förbättrad matematikundervisning utifrån begreppsförmåga – utveckling av undervisningsaktiviteter som leder till ökad begreppsförmåga hos svenska elever. Projektet är finansierat av ULF Örebro samt av deltagande lärares huvudmän. Författarna riktar ett stort tack till dessa. Författarna vill också rikta ett stort tack till de elever som har medverkat i projektet.

Referenser

- Ahl, L. M. & Helenius, O. (2021). Ett ramverk för progression. *Nämnamnaren*, 2, 39–44.
- Ball, D. L. & Peoples B. (2007). Assessing a student's mathematical knowledge by way of interview. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Assessing mathematical proficiency* (s. 213–268). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378>
- Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning : A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 296–333). Macmillan.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver E. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 91–125). Academic Press. <https://doi.org/10.1037/13620-004>
- Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2017). Developmental changes in the whole number bias. *Developmental Science*, 21(2), 1–13. <https://doi.org/10.1111/desc.12541>

- Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper (Red.), *APA handbook of research methods in psychology: Vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (s. 57–71). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/13620-004>
- Carlgren, I. (2023). Vad kan den som kan? – (ämnes)kunnande som centralt forskningsobjekt i ämnesdidaktisk forskning. *Forskning om undervisning och lärande*, 11(3), 6–23. <https://doi.org/10.61998/forskul.v11i3.18034>
- Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293–316. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81–89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1
- Crooks, N. M. & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344–377. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001>
- de Jong, T. & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist*, 31(2), 105–113. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3102_2
- Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V. Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4, 1–11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>
- Getenet, S. & Callingham, R. (2017). Teaching fractions for understanding: Addressing inter-related concepts. I A. Downton, S. Livy & J. Hall (Red.), *40 years on: We are still learning! Proceeding of the 40th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (s. 277–284). MERGA.
- Greeno, J. G. (1993). For research to reform education and cognitive science. I L. A. Penner, G. M. Batsche, H. M. Knoff & D. L. Nelson (Red.), *The challenge in mathematics and science education: Psychology's response* (s. 153–192). American Psychological Association.
- Hackenberg, A. J. & Sevinc, S. (2022). Middle school students' construction of reciprocal reasoning with unknowns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 65, 1–20. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100929>
- Hatano, G. & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. I H. W. Stevenson, H. Azuma & K. Hakuta (Red.), *Child development and education in Japan* (s. 262–272). Freeman.
- Helenius, O., Rystedt, E. & Trygg, L. (2021). Representation, uttrycksformer och begrepp. Lärportalen. [elektronisk resurs]
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–27). Erlbaum.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Jäder, J. & Johansson, H. (2025). Exploring students' conceptual understanding through mathematical problem solving: students' use of and shift between different representations of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, 1–18. <https://doi.org/10.1080/14794802.2025.2456840>
- Jäder, J., Lithner, J. & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1120–1136. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826>

- Kazemi, E. & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, 102(1), 59–80. <https://doi.org/10.1086/499693>
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. I R. A. Lesh (Red.), *Number and Measurement: Papers from a research workshop* (s. 101–144). ERIC/SMEAC.
- Ladegaard Pedersen, P. & Bjerre, M. (2021). Two conceptions of fraction equivalence. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 135–157. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7>
- Löwing, M. (2016). *Diamant - diagnoser i matematik: ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys*. Acta universitatis Gothoburgensis.
- Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M. P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(3), 244–259. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.04.008>
- Nagy, C. (2017). *Fler bråk i matematikundervisningen*. [Licentiatavhandling, Göteborgs universitet]. <http://hdl.handle.net/2077/54705>
- Neuman, D. (1993). Early conceptions of fractions: A phenomenographic approach. I I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (Red.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. III* (s. 170–177), University of Tsukuba.
- Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M. & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. I A. Norton & M. W. Alibali (Red.), *Constructing number. Research in Mathematics Education* (s. 135–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_7
- Petersson, J. (2015). Från brakljud till bråkbegrepp. *Nämna*, (1), 14–18.
- Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5–38. <https://doi.org/10.1007/BF00163751>
- Richland, L. E., Stigler, J. W. & Holyoak, K. J. (2012). Teaching the conceptual structure of mathematics. *Educational Psychologist*, 47(3), 189–203. <https://doi.org/10.1080/00461520.2012.667065>
- Sadler, D. R. (2009). Transforming holistic assessment and grading into a vehicle for complex learning. I G. Joughin (Red.), *Assessment, learning and judgement in higher education* (s. 1–19). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8905-3_4
- Schoenfeld, A.H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher*, 43(8), 404–412. <https://doi.org/10.3102/0013189X14554450>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A. & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122–133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004>
- Singh, P., Hoon, T. S., Nasir, N. A., Han, C. T., Rasid, S. M. & Hoong, J. B. Z. (2021). Obstacles faced by students in making sense of fractions. *The European Journal of Social & Behavioural Science*, 30(1) 34–51. <https://doi.org/10.15405/ejsbs.287>
- Skolverket. (2022). *Läroplan för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet (Lgr22)*.
- Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132–135.

- Star, J. R. & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169–181. <https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784828>
- Steffe, L. P. (2001). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 267–307. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00075-5](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00075-5)
- Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0591-8>
- Strother, S., Brendefur, J. L., Thiede, K. & Appleton, S. (2016). Five key ideas to teach fractions and decimals with understanding. *Advances in Social Sciences Research Journal*, 3(2), 132–137. <https://doi.org/10.14738/assrj.32.1832>
- Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E. A., Ufer, S. & Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: large-scale assessment and classroom assessment*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7>
- Säfström, A. I. (2017). Progression i högre utbildning. *Högre Utbildning*, 7(1), 56–75. <https://doi.org/10.23865/hu.v7.955>
- Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 141–164. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9269-y>
- Tossavainen, A. & Helenius, O. (2024). Student teachers' conceptions of fractions: A framework for the analysis of different aspects of fractions. *Mathematics Teacher Education and Development*, 26(1), 1–20
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. [Doktorsavhandling, Utrecht University]
- Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed*.
- Wellberg, S., Briggs, D. C. & Student, S. R. (2023). *Big ideas in the understanding of fractions: A learning progression*. Center for Assessment, Design, Research and Evaluation (CADRE), CU Boulder School of Education.
- Yetim, S. & Alkan, R. (2013). How middle school students deal with rational numbers? A mixed method research study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 9(2), 213–221. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2013.9211a>

Författarpresentationer

Anna Teledahl

Anna Teledahl är lektor i matematikdidaktik vid enheten för matematik vid Örebro universitet. Hon undervisar blivande förskollärare, grundlärare och ämneslärare i matematik och matematikdidaktik. Hon är utbildad lärare och har arbetat 15 år som Ma/No-lärare i årskurserna 7–9. Anna disputerade 2016 och hennes huvudsakliga forskningsintresse är elevers skriftliga kommunikation i matematik.

Frida Harvey

Frida Harvey är adjunkt och doktorand i matematikdidaktik vid Örebro universitet. Hon undervisar blivande förskollärare och grundlärare i matematik och matematikdidaktik. Hon är utbildad lärare i matematik och idrott och har tidigare arbetat som matematiklärare och matematikutvecklare i årskurserna 3–6. Fridas doktorandstudier är fokuserade på matematiklärares kollegiala lärande.

Magnus Esbjörner

Magnus Esbjörner är legitimerad lärare i matematik och förstelärare. Han undervisar i grundskolan i Örebro kommun och har tidigare arbetat som lärarutbildare vid Örebro universitet. Magnus är särskilt intresserad av samtalets roll i matematikundervisningen.

Samuel von Malortie

Samuel von Malortie är legitimerad lärare i matematik för årskurs 4–9 och har undervisat högstadieselever sedan examen 2009. Samuel är särskilt intresserad av matematikdidaktik och hur undervisning kan väcka nyfikenhet och intresse för matematik hos elever. Bråkundervisning, primtal och algebra är områden som engagerar lite extra, men i grunden finns ett brett intresse för elevers lärande och utveckling inom hela matematikämnet.

Bilaga 1

De fem atypiska matematikuppgifter som eleverna i projektet fick arbeta med

När Ida kommer till hållplatsen har hon avverkat $\frac{1}{2}$ av sin skolväg. När Carl kommer dit har han avverkat $\frac{2}{3}$. De åker med samma buss till skolan. Vem av dem har längst skolväg?

När Ida har ätit $\frac{2}{5}$ av sin chokladkaka och Carl har ätit en $\frac{1}{4}$ av sin då har de båda 50 g kvar. Vilken av dem har störst chokladkaka från början?

På ett kalas finns två olika stora kannor saft. Efter en stund innehåller kannorna lika mycket saft. I den gula är det då kvar $\frac{3}{5}$ och i den röda $\frac{3}{4}$. I vilken kanna fanns det mest saft från början?

I klass 4a har $\frac{2}{5}$ av klassen ett husdjur. I 4b har $\frac{1}{3}$ husdjur. Det finns lika många husdjur i båda klasserna. I vilken klass går det flest elever?

Pappa Kent tankar för $\frac{2}{3}$ av sina pengar. När han har tankat har han 80 kr kvar. Hur mycket pengar hade han från början?