

# Att utveckla god taluppfattning hos alla elever i förskoleklass – en interventionsstudie i matematik

K Westerholm & J Samuelsson

## Sammanfattning

*Flera studier visar att elever i socioekonomiskt svaga miljöer presterar signifikant sämre vid skolstart vad gäller taluppfattning än elever i starkare socioekonomiska miljöer. Syftet med följande studie var att utveckla och pröva ett interventionsprogram; TUFF (TalUppFattningFörskoleklass), för att stötta elever i förskoleklass i deras utveckling av grundläggande taluppfattning. Studien genomfördes med elever i en socioekonomiskt svag miljö med en hög andel elever med svenska som andra språk. Resultatet av studien visar att interventionsprogrammet TUFF, kan stötta förskoleklass elever i socioekonomiskt svaga miljöer i deras utveckling av grundläggande matematik. Vår studie visar att skillnaden gällande kunskaper inom grundläggande taluppfattning mellan elever i en socioekonomiskt svag miljö jämfört med elever i en starkare socioekonomisk miljö, har minskat efter att eleverna i den socioekonomiskt svaga miljön har undervisats enligt TUFF-programmet.*

**Nyckelord:** taluppfattning, intervention, direkt instruktion, undervisningsprogram



*Kristin Westerholm är speciallärare i matematik och undervisar på lärarutbildningarna vid Linköpings universitet. Hon är även doktorand vid Stockholms universitet med inriktning mot matematikdidaktik och specialpedagogik.*



*Joakim Samuelsson är professor i pedagogik med inriktning mot matematikdidaktik vid Linköpings universitet. Han undervisar på lärarprogrammet och bedriver forskning om undervisning och lärande i matematik, från förskola till gymnasieskola.*

K Westerholm & J Samuelsson

## Abstract

*Several studies show that children in weak socioeconomically areas perform significantly lower than children in stronger socioeconomically areas regarding number sense, when starting school. The gap does not decrease during the school years. The aim of the following study was to develop and test an intervention program to support preschool class children's basic mathematical ability. The study was carried out in socioeconomically weak environments with a high proportion of pupils with Swedish as a second language. In order to answer the research questions, we used a quasi-experimental longitudinal design. The result of the study shows that teaching program TUFF can support preschool children in socioeconomically weak environments in developing basic mathematical ability. By participating in mathematical education with this teaching program, these children were able to reach the same level of mathematical ability when starting school, as peers in stronger socioeconomically environment who didn't work with the material but participated in regular mathematical education.*

**Keywords:** Number sense, Intervention, Direct instruction, Teaching program

## Introduktion

I denna artikel presenteras resultatet från en studie om hur elever i förskoleklass i en svag socioekonomisk miljö kan undervisas i grundläggande taluppfattning för att nå samma kunskapsnivå vid skolstarten som jämnåriga elever i starkare socioekonomiska miljöer. Tidigare studier har visat att barns prestationer redan i tre- till femårsåldern har stort prediktionsvärde för senare utbildning, yrke och inkomst även när bakgrundsvariabler hålls konstanta (Duncan, Dowsett, Classens, Magnuson, Huston, Klebanov & Japel, 2007; Chetty, Friedman, Hilger, Saez, Whitmore, Schanzenbach & Yagan, 2010). Den starkaste prediktorn tycks vara barnens matematikkunskaper, eller mer precist deras taluppfattning (National Research Council, 2009). Taluppfattning handlar i dessa åldrar om att ha kunskap om hela tal, relationen mellan tal och enkla operationer (Jordan m.fl., 2012). Studier har också visat att sambandet mellan barns taluppfattning i förskolan (femåringar) och deras matematikkunskaper i slutet av tredje klass är relativt starkt (Jordan, Kaplan, Ramineni & Locuniak, 2008). I en studie av Watts, Duncan, Siegler och Davis-Kean (2014) visas att barns taluppfattning i åldern fyra och ett halvt till sju år är mycket starkt kopplad till prestationer i matematik vid 15-årsåldern. Särskilt tycks förmåga att jämföra tals värde, förmåga att lägga till och subtrahera små kvantiteter, samt förmåga att lösa problem i olika sammanhang predicera framtida matematikkunskaper.

Elever med en utvecklad taluppfattning är också mer benägna att använda adaptiva räknestrategier än elever med en svagare taluppfattning (Jordan m.fl., 2008; Locuniak & Jordan, 2008). Det innebär att de kan anpassa sina räknestrategier till nya uppgifter och situationer. Liknande resultat har observerats i longitudinella studier, det vill säga: från förskola, femåringar till första klass, vilka också visar att barn som i förskolan kan identifiera siffror och tal samt genomföra enkel räkning (Cirino, 2011; Clarke & Shinn, 2004; Lembke & Foegen, 2009) utvecklar sitt matematikkunnande

mer än de som inte behärskar detta. Resultaten av ovanstående forskning visar på vikten av tidiga insatser för att stötta elevers tidiga lärande i matematik.

Det finns studier som visar att elever i socioekonomiskt svaga miljöer presterar signifikant sämre vid skolstarten, gällande taluppfattning, än elever i starkare socioekonomiska miljöer (se t.ex. Clements & Sarama, 2008) och att avståndet mellan elevernas kunskapsnivåer inte minskar under skolåren (National Mathematics Advisory Panel, 2008). En amerikansk studie har visat att elever i sådana områden löper dubbelt så stor risk att behöva gå om en klass och en och en halv gång så stor risk att utveckla matematiksvårigheter (Duncan & Brooks-Gunn, 2001). Att hjälpa dessa elever att nå likvärdiga resultat, gällande taluppfattning, som elever i en starkare socioekonomisk miljö framstår idag som en mycket viktig uppgift för matematikundervisningen i förskoleklassen. Målet med denna studie var att pröva en intervention för att stötta elevers utveckling av taluppfattning (jfr Jordan, Glutting, Dyson, Hassinger-Das & Irwin, 2012) i socioekonomiskt svagare miljöer. Jordan och hennes kollegor har visat lovande resultat i en amerikansk kontext. I den amerikanska kontexten är den språkliga bakgrunden mer homogen än i motsvarande kontext i Sverige (Svensson Källberg, 2018).

### **Syfte och frågeställningar**

Syftet med artikeln är att undersöka effekten av ett interventionsprogram (TUFF, TalUppFattningFörskoleklass), som tidigare prövats i en annan kontext (Jordan m.fl., 2012), för att stötta förskoleklasselävers utveckling av taluppfattning, i socioekonomiskt svaga miljöer med hög andel elever med svenska som andraspråk.

I relation till detta övergripande syfte vill vi ge svar på följande frågor

1. I vilken utsträckning utvecklas förskoleklasselävers taluppfattning, i skolor i socioekonomiskt svaga miljöer med hög andel elever med svenska som andraspråk, om de deltar i TUFF-programmet under sista terminen i förskoleklass?
2. I vilken utsträckning har kunskapsnivån, relaterad till taluppfattning i början av årskurs 1, utvecklats hos elever i socioekonomiskt svaga miljöer som deltagit i interventionsprogrammet TUFF jämfört med elever i socioekonomiskt medelstarka miljöer som fått ordinarie undervisning i förskoleklass?

### **Taluppfattning**

I tidiga år, två- till femårsåldern, lär sig många barn att snabbt avgöra antal som är förknippade med små kvantiteter, så kallad verbal subitiserings (Le Corre & Carey, 2007), medan de använder uppräkningsmetod med hjälp av räkneramsan för att bestämma exakt värde av större kvantiteter (Baroody, 1987; Gelman & Gallistel, 1978). Barnen kan också jämföra de relativa storheterna i tal (Case & Griffin, 1990) och utföra enkla aritmetiska beräkningar (Ginsburg & Russell, 1981; Jordan, Huttenlocher & Levine, 1992). De förstår också att varje räkneord kan beskriva en kvantitet som är en mer än den föregående ( $n$ ,  $n + 1$ ,  $(n + 1) + 1$ , etc.) (Le Corre & Carey, 2007).

K Westerholm & J Samuelsson

Mer avancerad taluppfattning förvärvas senare och huvudsakligen genom formell undervisning (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Detta innebär att eleverna lär sig relationen mellan och inom tal, och utvecklar en principiell förståelse för platsvärde och betydelsen av räkneoperationer (Fuson, Grandau & Sugiyama, 2001).

Trots relativt starka vetenskapliga resultat, gällande hur ovanstående kunskaper utvecklas, uppträder individuella skillnader i symbolisk taluppfattning hos barn i två- till femårs åldern (Jordan m.fl., 1992; Klibanoff, Levine, Huttenlocher, Vasilyeva & Hedges, 2006; National Research Council, 2009). Dessa skillnader är förknippade med barnens tidigare erfarenheter och inlärningsmöjligheter samt deras kognitiva förmåga. Barn som växer upp i en svagare socioekonomisk miljö har svagare matematikkunskaper när de börjar i förskolan i USA jämfört med barn från starkare socioekonomiska miljöer (Starkey, Klein & Wakeley, 2004) och det är fyra gånger mer sannolikt att de visar låg eller ingen utveckling vad gäller taluppfattning under det år som föregår skolstarten (Jordan, Kaplan, Locuniak & Ramineni, 2007; Jordan, Kaplan, Oláh & Locuniak, 2006).

### ***Interventioner och tidig taluppfattning***

Det finns idag ett antal interventionsprogram i matematik som har prövats med syfte att stötta elever från socioekonomiskt svaga miljöer. Resultaten från dessa studier visar entydigt att tidig taluppfattning kan utvecklas genom målmedveten undervisning (Griffin, 2004; Dobbs, Doctoroff, Fisher & Arnold, 2006; Klein & Starkey, 2004). En viktig princip som framförs är att interventioner ska genomföras tidigt, då en avgörande och kritisk punkt i elevers matematikutveckling är när de ska gå från att möta en informell (vardaglig) matematik till en formell matematik (matematik som relaterad till den vetenskapligt korrekta matematiken) (Baroody, Eiland & Thompson, 2009; Clements & Sarama, 2007; Jordan m.fl., 2007; Purpura, Baroody & Lonigan, 2013). Tidiga interventioner kan stötta eleverna att förbättra sina kunskaper i den informella matematiken så att de lyckas i övergången till den formella matematiken (Baroody, Thompson & Eiland, 2007). Centralt för en lyckad övergång från informell till formell matematik är att läraren ger eleverna möjlighet att koppla den informella matematiken till skrivna symboler, det räcker då inte med att kunna skriva siffror, utan undervisningen måste också rikta uppmärksamheten mot vad tal betyder och innebär (Aunio & Räsänen, 2015; Baroody m.fl., 2009; Clements & Sarama, 2007).

För att kunna stötta elevers tidiga aritmetiska utveckling på ett adekvat sätt måste analyser av vad som särskilt orsakar skillnader i elevers aritmetiska utveckling göras. Aktuell forskning tyder på att barns mentala tallinjerepresentation är en kausalt bidragande faktor till tidig aritmetisk utveckling (Booth & Siegler, 2008). Ett flertal studier visar också att det finns samband mellan en mental representation av tallinjen och en rad olika matematiska förmågor som hantering av talfakta, aritmetisk uppskattning, räkning inom basal addition och subtraktion, beräkning med flersiffriga tal, lösning av textuppgifter i matematik och utveckling av räknestrategier (Booth & Siegler, 2008; Geary, Bailey & Hoard, 2009; Jordan m. fl., 2006; Jordan, Glutting & Ramineni, 2012; Ramani & Siegler, 2008). Ramani och Siegler (2008) menar att

med tanke på den mentala tallinjens betydelse för utveckling av taluppfattning och aritmetik så bör förskolan bedriva verksamhet där barnet ges optimala möjligheter att utveckla en funktionell mental representation av tallinjen. Det framgår i tidigare studier att brädspel som innehåller tal och framförallt brädspel som representerar tal i visuell-linjär form stimulerar utvecklingen av förskoleklasslevers mentala tallinje (Ramani & Siegler, 2008).

Elofsson med kollegor (2017) har bidragit till en ökad förståelse kring barns tidiga utveckling i matematik genom att undersöka hur barn som spelar olika numeriska spel, utvecklar sitt kunnande i matematik, samt genom att undersöka skattningsmönster som elever uppvisar när de placerar tal på en tallinje. Barn i fem- och sexårsålder deltog i två spelinterventionsstudier. Studierna undersökte effekter av att spela a) linjära numeriska brädspel, b) cirkulära numeriska brädspel och c) icke-linjära numeriska spel. Analyserna av barnens resultat på olika numeriska uppgifter före och efter interventionen visar att numeriska spel stödjer deras utveckling av kunskaper om tal och relationer mellan tal. Vidare visar resultaten att barns utveckling av olika kunskaper i matematik påverkas olika beroende på vilket numeriskt spel som används. Resultaten visar också att det finns en större heterogenitet i fem- och sexåriga barns representationer av tal på tallinjer än vad tidigare studier har visat med andra typer av analyser. Flera olika skattningsmönster urskildes. De visade också att det finns en relation mellan barns kunskaper om tal och hur de representerar tal på tallinjer samt att barn påverkas av uppgiftsspecifika aspekter när de skattar tal på tallinjer.

Flera studier visar således värdet av att utveckla kunskaper om tal i två- till femårsåldern. Exempelvis slår National Research Council (2009) fast att: "De flesta program för barn i förskoleåldern fokuserar lite på matematik och har låg kvalitet" (s. 339, vår översättning). Många av dessa program bidrar således inte till en kompensation för elever i behov av insatser som särskilt stöttar deras utveckling av taluppfattning. Tidigare studier har visat att dessa elever utvecklas bäst genom intensiv (minst 30 minuter per session) instruktion i små grupper om tre till sex elever (Gersten m.fl., 2007). För att stötta utveckling av taluppfattning hos elever i svaga socioekonomiska miljöer utvecklade Jordan med kollegor (2012) en gruppintervention. Matematikfokus låg på nyckelkompetenser som är viktiga för att eleverna ska lyckas i den fortsatta matematiken, nyckelkompetenser som om de inte lärs kan resultera i matematiksvårigheter. Eleverna arbetade med antal, relationer mellan tal och operationer med tal.

Det finns också ett antal andra interventionsstudier som har genomförts på skolor som inte specifikt kan räknas som skolor i svaga socioekonomiska miljöer. På förskolenivå har Clements och Sarama (2008) utvecklat och testat effektiviteten av att arbeta med tiobasmaterial, ett manipulativt material som illustrerar olika tal. Studien visade att efter ett 26-veckors interventionsprogram hade eleverna som undervisats med tiobasmaterial utvecklat sin taluppfattning mer än eleverna i kontrollgruppen.

Baroody, Eiland och Thompson (2009) genomförde en interventionsstudie där barn i förskolan instruerades i tio veckor, tre gånger i veckan, i små grupper med manipuleringar och spel som fokuserade på grundläggande begrepp, verbal räkning, objekträkning och numeriska relationer. I en andra fas slumpades barnen till en av



tre grupper för ytterligare undervisning tio veckor: halvstrukturerad upptäcktsinläring; strukturerat lärande och tydlig instruktion och slumpmässig övning. Alla elever utvecklade sina matematikkunskaper. Frånvaron av en jämförelsegrupp gör att det är svårt att avgöra huruvida vinsterna berodde på normal utveckling eller interventionerna. Det fanns inga tillförlitliga gruppskillnader i specifika färdighetsområden.

Ytterligare en interventionsstudie med fokus på utveckling av grundläggande taluppfattning i förskoleklass har genomförts av Sterner, Wolff och Helenius (2019). Detta interventionsprogram syftade till att utveckla elevernas grundläggande taluppfattning inom tal, resonemang om tal och representationer av tal. Eleverna gavs genom en strukturerad och explicit undervisning en möjlighet att resonera om tal, representera tal, jämföra likheter och skillnader i sina lösningar av matematiska problem samt utmanades vidare i sitt lärande. Det matematiska innehållet i interventionsprogrammet var; sortering, klassificering och mönster, tal, räkning och mönster, del-del-helhet och talraden. Träningen genomfördes i den ordinarie undervisningen, 30 minuter dagligen under en tioveckorsperiod. Undervisningsstrukturen följde ett mönster där samma matematiska innehåll återkom i flera teman, i olika kontexter och genom olika representationer. Varje tema behandlades genom 6 faser; 1) ramsräkning, 2) läraren presenterar ett problem, med konkret material, som eleverna arbetar tillsammans med, 3) eleverna arbetar med ett liknande problem i par, 4) helklassdiskussion om likheter och skillnader mellan deras olika lösningar, 5) eleverna dokumenterar sina lösningar genom ritningar, 6) uppföljande aktivitet där elevernas dokumentation utgör basen för en vidare diskussion om det matematiska innehåll som behandlats. Resultatet visade att interventionsgruppen presterar bättre på eftertestet än kontrollgruppen, däremot visar inte resultatet på uppföljningstestet någon skillnad på prestation.

I en forskningsöversikt av Mononen, Aunio, Koponen och Aro (2014) visas att det finns få studier som fokuserar på elever i förskoleklass, fem till sex år. De menar att det finns ett behov av att skapa interventionsprogram som kan stötta lärarna i undervisningen i övergången mellan informell och formell matematik. Vi konstaterar att det finns goda skäl att konstruera och pröva interventionsprogram i matematik i förskoleklass då förmågor i matematik tycks ha ett starkt prediktionsvärde för framtida studieprestationer. Samtidigt är det viktigt att pröva dessa interventioner i socioekonomiskt svaga områden för att studera om dessa elever kan ges en likvärdig skolstart vad gäller vilka kunskaper i matematik de har med sig in skolan.

En slutsats av ovanstående studier indikerar att ett fokuserat interventionsprogram skulle kunna generera positiva effekter på elevers matematikkunnande. I denna studie användes interventionsprogrammet TUFF som är en bearbetad version av Jordan med kollegors (2012) gruppintervention. TUFF är anpassat för svensk undervisningskontext. Anpassningen innebar till exempel att övningar med mynt togs bort och att skrivövningar som inte ansågs motsvara undervisningsnivå i förskoleklass i Sverige togs bort. Jordan med kollegors gruppintervention, liksom vår studie med TUFF, tar sin utgångspunkt i undervisningsmodellen "Direct instruction" (Stein, m.fl., 2006). Konsekventa representationer (runda papperslappar färgade i svart, svarta prickar

och fingrar) användes eftersom tidigare studier har visat att små barn ofta fokuserar på perceptuella variabler i uppgifter snarare än på relevant numerisk information i matematikrelaterade aktiviteter (Rousselle, Palmaers & Noël, 2004).

## Metod

I studien ingår två grupper, a) TUFF-gruppen, med förskoleklass elever i en skola i ett socioekonomiskt svagt område (40 elever) med hög andel elever med svenska som andraspråk och b) kontrollgruppen, förskoleklass elever i en skola i en socioekonomiskt medelstark miljö där alla elever har svenska som första språk (36 elever). Med stöd av kommunens statistik gällande olika områdens socioekonomiska villkor valdes dessa skolor ut. Vid uppföljningen hade åtta elever från TUFF-gruppen (samtliga med svenska som första språk) och en elev från kontrollgruppen flyttat till en annan skola.

För att kunna besvara forskningsfrågorna använde vi en kvasiexperimentell longitudinell design (jfr Shadish m.fl., 2002). TUFF-programmet genomfördes under tolv veckor från januari till och med mars (2019). Det var sammanlagt 24 lektioner à 30 minuter. Varje vecka genomfördes två till tre lektioner, i halvklass (tio elever) av fyra förskoleklasslärare som hade tränats att genomföra interventionerna. I kontrollgruppen hade eleverna matematikundervisning som vanligt, tre gånger per vecka.

Eleverna testades vid tre tillfällen, före interventionen, direkt efter interventionen och sex månader efter interventionens slut, det vill säga under höstterminen i årskurs 1. Varje testperiod var cirka två veckor. För- och eftertestet, i relation till interventionen, genomfördes av personer som inte hade deltagit i interventionerna, för att undvika biaseffekter, det vill säga att testledaren blir mer välvilligt eller negativt inställd till elevens svar beroende på tidigare erfarenheter av eleven. Testet i årskurs 1 genomfördes av klassläraren. Alla tre testen genomfördes muntligt.

### *Principer för TUFF-interventionen*

Interventionsprogrammet TUFF tar, vilket tidigare har skrivits, sin utgångspunkt i undervisningsmodell "direct instruction" (Stein m.fl., 2006). Jordan med kollegor (2012) har visat att denna typ av undervisning har positiv effekt för förskoleklass elevers utveckling av taluppfattning i socioekonomiskt svaga miljöer. Vi tog hänsyn till följande principer:

- Träningen av nya färdigheter varvades med träning av färdigheter eleverna redan behärskade.
- Träningen av svårare färdigheter varvades med träning av lättare färdigheter.
- Eleverna gjordes medvetna om sina egna framsteg, för att öka motivationen.
- Varje lektion innehöll alltid en variation av färdigheter, former av träning och svårighetsgrader (Stein m.fl., 2006)

För att följa ovanstående principer beskrevs varje lektion på detaljnivå, både vad gäl-

ler matematiskt innehåll och hur övningarna skulle genomföras. Lärarens uppdrag var att följa lektionens manus. Även gester och vad läraren skulle betona genom att peka skrevs fram i manus. I manuset fanns även instruktioner om hur läraren skulle hantera eventuella felaktiga svar från eleverna. Läraren uppmanades att alltid uppmärksamma och korrigera ett felaktigt svar och att hantera det genom att säga: "Det var ett bra försök men det rätta svaret är..." Därefter fick eleven en ny möjlighet att upprepa det korrekta svaret. Vid möten med lärarna under interventionen och efter interventionen uppgav de att de följt manus. Endast vid två tillfällen modifierade de övningarna. När eleverna räknade tillsammans och en elev inte visste vilket tal den skulle säga skulle läraren ha sagt talet, och därefter låtit eleverna upprepa sina svar i två steg bakåt på talraden för att eleven skulle få en ny chans att säga rätt tal. Istället för att låta eleverna upprepa sina svar så var det läraren som upprepade svaren och på det sättet stöttade eleven. Om talet som saknades var 5, sa läraren "3, 4" och gav sedan eleven möjlighet att svara igen. Lärarna noterade också att det blev svårt att genomföra vissa övningar där eleverna skulle rita. För att undvika detta problem ritade läraren och modellerade därmed hur man kunde göra och tänka.

Det matematiska innehållet presenterades enligt ett hierarkiskt mönster. Startpunkten var talområdet 0-2, detta utökades sedan succesivt med ett tal i taget. I de sista 3 lektionerna tränades en generalisering för högre talområde. Eftersom talområdet, i de flesta övningar, utökades med ett tal i taget så var varje lektion både en repetition av tidigare talområde, men också en utökning till nästa tal i talraden.

Lektionens aktuella talområde tränades genom flera olika övningar. Övningarna hade en tydlig struktur och genomfördes i en given ordning under lektionerna. De var, med ett undantag, utformade som muntliga övningar, med eller utan laborativt material. Vissa övningar återkom varje lektion med den enda förändringen att ett tal lades till.

### ***Matematiskt innehåll i TUFF-programmet***

Samtliga övningar i interventionen går att sortera under innehållsrubrikerna: *kunskap om hela tal, relationer mellan tal och operationer med tal.*

#### **Kunskap om hela tal**

Övningar inom området tal gav eleverna möjlighet att utveckla sin förmåga att hantera och representera tal på flera olika sätt. I materialet representeras tal som siffer-symbol, som grupper av antal men också som en punkt på en tallinje. Kardinalitet, det vill säga förmågan att förstå att det sista talet som benämns också anger antalet i mängden som de räknat, tränas återkommande. Subitisering, att snabbt kunna uppfatta en mängd, är en annan aspekt av tal som tränades.

Varje lektion inleddes med ramsräkning. Träningen började inom talområde 0-10 och utökades successivt till talområde 0-100. Eleverna övade på talramsans från talet 1 men också med start mitt i talområde 0-100. Kardinalitet tränades genom att eleverna fick representera ett givet tal med fingrar eller med markörer i en färdig 10-ram. Det är en rektangulär ram indelad i 2 rader med 5 rutor i varje rad. I vissa tränings-



moment poängterades att eleverna "så fort som möjligt" skulle visa till exempel 3 fingrar eller lägga 3 markörer. Subitisering, tränades genom att eleverna fick se kort med maximalt 5 cirklar på. Eleverna skulle sedan snabbt avgöra vilket antal cirklar som visades. Denna övning gjordes även med tal över 5 och då användes fingrar (hel hand+fingrar) eller 10-ram för att stötta elevernas förmåga att uppskatta antal.

### **Relationer mellan tal**

Övningar inom området relationer mellan tal innebar till exempel att eleverna tränade på att kunna avgöra vilket tal som är störst och minst. Ordinalitet, att veta i vilken ordning talen ska presenteras på tallinjen, är en aspekt av relationer mellan tal som övades. Vidare tränades hur tal, antal och symbol förändras med 1 för varje steg på heltalslinjen.

Eleverna tränade på att använda begreppen större än och mindre än genom att jämföra mängder av cirklar på subitiseringskort eller med sifferkort. De övade också på dela upp tvåsiffriga tal med hjälp av entals- och tiotalsklossar. Även vid detta moment uppmärksammades eleverna på tal före och efter. Utöver detta tränades också 10-skutt från ett givet tal mitt på tallinjen.

Inom området relationer mellan tal övades addition och subtraktion genom arbete med beräkningar i en berättad kontext, men också genom övningar som fokuserade träning i att addera och subtrahera med flyt inom talområde 0-5.

### **Operationer med tal**

Operationer med tal är det tredje delområdet som bearbetades i TUFF-programmet. Operationer med tal handlar om att kunna hantera tal vid beräkningar, vid symboliskt skrivna talkombinationer och vid beräkningar i en berättad kontext.

Operationer med tal bearbetades på huvudsakligen tre sätt. Träningen infördes redan vid den första lektionen, då med bearbetning av talet 2. Eleverna tränades på att hitta talkamrater inom talet 2, lösa beräkning i en berättad kontext med talet 2 och repetera talkombinationer med talet 2. Träningen återkom sedan i samtliga lektioner med anpassning till nya tal. En annan övning som gjordes involverade en 10-ram (se beskrivning ovan). Eleverna representerade olika tal genom att placera röda markörer i rutorna, de fyller den översta raden först för att visa talet 5 och räknar sedan vidare på raden under. Detta är en övning som ger eleverna en möjlighet att utveckla förmågan att räkna "störst först", istället för att addera "från början".

## ***Kontrollgruppens matematikundervisning***

### **Principer för matematikundervisningen i kontrollgruppen**

I kontrollgruppen hade eleverna matematikundervisning åtminstone 3 ggr per vecka. Planeringen för matematikundervisningen hade utgått ifrån boken "Tänka, räkna, resonera". I boken "Tänka, räkna, resonera" föreslår författarna att undervisningen ska innehålla sex faser a) Räkneramsor, framlänges och baklänges, b) inledande gruppaktivitet, ett problem, c) eleverna arbetar sedan med liknande problem i par, d)

klassdiskussion där lärare och elever diskuterar hur de löst problemet, vilka för och nackdelar de ser med olika angreppssätt, e) eleverna dokumenterar hur de gjort, f) elevernas dokumentation (ofta en bild) fungerar som utgångspunkt för det fortsatta lärandet.

### Matematiskt innehåll i kontrollgruppen

I kontrollgruppen lade de ett stort fokus på att räkna framåt och bakåt i talramsan. De tränade på att räkna till hundra tillsammans (jfr tal/talrad). Matematiken hade haft många inslag av praktisk matematik där eleverna fått arbeta med tal genom att agera tallinje, använda markörer och olika material för att illustrera mönster (jfr relationer mellan tal). Matematikproblemen hade bearbetats genom att eleverna tänkt och räknat i huvudet och på fingrarna men även ritat upp på tavlan och förklarat (jfr operationer med tal). En dag i veckan hade de gått till skogen, där de arbetat med materialet "Mattepromenader". Eleverna hade vid dessa tillfällen övat på såväl operationer med tal och relationer mellan tal, vilket överensstämmer med det innehåll som interventionsskolan arbetat med.

I vilken grad lärarna fullt ut följt materialet har vi ingen data på, det är dock klart att lärarna använde detta material för att genomföra matematikundervisningen i förskoleklass.

### Matematikmått

I för- och eftertestet som eleverna gjorde i anslutning till interventionen prövades deras taluppfattning. Nedanstående förmågor är delområden som kan relateras till taluppfattning (Jordan m.fl., 2012).

- Räkneförmåga - *peka och räkna/talrad (3 poäng+talradens längd)*
- Känna igen tal - *namnge tal representerade med siffror; 2, 4, 9, 13, 37, 82, 124 (7 poäng)*
- Jämföra tal - *vilket tal är störst/minst, kommer efter 7, närmast 5 i talraden? (7 poäng)*
- Icke verbal räkning – *testledaren visar ett antal prickar, gömmer sedan prickarna under handen, därefter lägger testledaren till en eller flera prickar under handen. Eleven ska sedan peka på rätt antal prickar på ett papper där fyra svarsalternativ presenteras. (4 poäng)*
- Räknehändelser – *beräkning i berättad kontext "Albin har 4 kriter och får 3 till" (5 poäng)*
- Beräkningsuppgifter – *numerisk uppgift 2+1, 3+4, 7-1, 6-2 (6 poäng)*

Sammanlagt kunde alltså eleverna erhålla 32 poäng på för- respektive eftertestet samt visa hur långt de kunde räkna (vi stoppade vid 100).

Vid uppföljningstestet i oktober i årskurs 1 användes *Nationella bedömningsstöd i*

*matematik* (Skolverket, 2019). Materialet är ett stöd för lärarna i arbetet med att tidigt identifiera elever som är i behov av extra anpassningar eller särskilt stöd. Materialet används också för att identifiera elever som behöver extra utmaningar för att nå så långt som möjligt. Varje uppgift har en låg (L), medel (M) och hög (H) nivå. I vårt fall gav vi de som presterade lågt 1 poäng, medel 2 poäng och högt 3 poäng per uppgift. Den första uppgiften i testet var talraden. Den användes inte i den sammanlagda beräkningen av prestation utan lyftes ur av oss för att kunna jämföra med deras ramsräkning på eftertestet i förskoleklass. Inom följande områden prövades eleverna.

- Räkneförmåga – *talraden, börja på 9, räkna nedåt från 10 (12 poäng)*
- Jämföra tal – *vilket tal kommer efter 7, 10, kommer före 5, 9 (6 poäng)*
- Känna igen tal – *namnge tal 0-10, ej i ordning (3 poäng)*
- Antalskonstans – *att veta att det är lika många kuber oavsett deras spridning (3 poäng)*
- Subitiserat – *att se att det är 6 prickar på en tärning (3 poäng)*
- Begrepp – *fler/färre; att kunna addera/subtrahera till ett givet antal klossar 6+2, 6-1 dela upp; 5 föremål i 2 högar, hälften/dubbelt; dela 8 kuber i två lika stora mängder, vad är hälften av 10? (9 poäng)*

Sammanlagt kunde eleverna erholda 36 poäng samt visa hur långt de kunde räkna (vi stoppade vid 115).

### **Analys**

För att besvara forskningsfrågorna har ett antal kvantitativa analyser genomförts. Vi inledde med att göra ett oberoende t-test på utvalda matematikmätt för att se om det fanns någon skillnad mellan grupperna före interventionen sattes in och efter att interventionen var genomförd. Avslutningsvis genomfördes en oberoende t-test på resultaten i de olika grupperna avseende prestationer på det genomförda testet i årskurs 1. Värdet som presenteras på t-testet är en indikator på om det finns statistiska skillnader i materialet. Ju längre värdet är från 0, desto större sannolikhet att skillnaden mellan grupperna är statistiskt säkerställd. Elevernas utveckling på grupp-nivå har studerats genom upprepad mätning och analyserats med ett ANOVA -test<sup>1</sup>. Med stöd ANOVA har vi kunnat avgöra vilken förändring TUFF-programmet haft på elevernas utveckling av matematikkunnande i TUFF-gruppen jämfört med matematikutvecklingen i kontrollgruppen. F-värdet<sup>2</sup> som presenteras illustrerar skillnaden mellan grupperna. Ett p-värde <0,05 anses visa att det finns en statistiskt signifikant

<sup>1</sup> ANOVA, ANalysis Of VAriance, används för att studera skillnader i utveckling mellan två grupper.

<sup>2</sup> En större skillnad mellan gruppernas test-värden ger ett större F-värde som liksom t-värdet ovan är en indikator på om det finns en statistisk skillnad mellan grupperna. I relation till varje test presenteras ett p-värde vilket illustrerar sannolikheten för att det finns skillnad mellan grupperna.

K Westerholm &amp; J Samuelsson

skillnad. Cohens  $d^3$  beräknades för alla signifikanta skillnader. Värdet illustrerar vilken effekt interventionen har haft, det vill säga hur bra interventionen fungerat. Ett värde upp till 0,2 räknas som låg effekt, mellan 0,2 och 0,5 medeleffekt och 0,5 till 0,8 som hög effekt.

## Resultat

Resultaten redovisas i två delar. Del 1 visar medelvärde och standardavvikelser för varje grupp på förtest, eftertest och uppföljande test i årskurs 1. Del 2 visar den utveckling som skett i de deltagande grupperna.

### *DEL 1 - Testresultaten vid olika mättilfällen*

Vi inleder med att presentera hur eleverna i kontrollgruppen samt eleverna på TUFF-gruppen presterade innan TUFF-programmet startade. Ett oberoende t-test genomfördes för att se om det fanns någon statistiskt signifikant skillnad mellan grupperna på de olika matematikmåten (se tabell 1 nedan). Kontrollgruppens resultat visade sig vara signifikant bättre i tre fall. Testet visade att kontrollgruppen hade bättre resultat på uppgifter som handlade om att jämföra tal, lösa uppgifter som var formulerade som räknehändelser samt på taluppfattningstestet som helhet<sup>4</sup>. Övriga resultat visade ingen statistiskt signifikant skillnad mellan grupperna. Beräkning av Cohens  $d$  indikerar att det är en liten skillnad mellan grupperna på räknehändelser medan det är medelstor effekt på skillnaden vad gäller taluppfattning totalt och att jämföra tal (se fotnot 3).

**Tabell 1.** Medelvärde och standardavvikelse på förtestet i kontrollgruppen och TUFF-gruppen. Signifikanta skillnader mellan grupperna är markerade i fetstil.

Testvariabler	Skola (Kontroll, N=36)		Skola (TUFF, N=40)	
	M	SD	M	SD
Räkneförmåga	3.0	0.0	2.97	0.15
Känna igen tal	4.64	1.68	4.50	1.84
<b>Jämföra tal</b>	<b>6.03</b>	<b>1.23</b>	<b>5.02</b>	<b>1.90</b>
Icke verbal räkning	3.47	0.69	3.15	1.12
<b>Räknehändelser</b>	<b>3.67</b>	<b>1.28</b>	<b>2.97</b>	<b>1.69</b>
Beräkningsuppgifter	3.83	2.41	3.05	1.88
<b>Taluppfattning (tot)</b>	<b>24.64</b>	<b>5.28</b>	<b>21.67</b>	<b>5.97</b>

I tabell 2 redovisas resultaten efter interventionsveckorna. Vi kan konstatera att de elever som deltagit i TUFF-gruppen presterar på en högre nivå än kontrollgruppens

3 Cohens  $d$  är ett mått som visar vilken effekt interventionen haft på elevernas utveckling.

4 Kontrollgruppens resultat var signifikant bättre på följande uppgifter jämföra tal  $t(74) = -2.70$ ,  $p = .009$ ,  $d = .63$ ; räknehändelser  $t(74) = -1.99$ ,  $p = .049$ ,  $d = .46$ ; taluppfattning (tot)  $t(74) = -2.17$ ,  $p = .033$ ,  $d = .50$ .

elever på alla matematikmätt. Det är signifikanta skillnader mellan elevgrupperna på alla mått utom vad gäller räkneförmåga (där alla klarade alla uppgifter)<sup>5</sup>.

**Tabell 2.** Medelvärde och standardavvikelse på eftertestet i kontrollgruppen och TUFF-gruppen. Signifikanta skillnader mellan grupperna är markerade i fetstil.

Testvariabler	Skola (Kontroll, N=36)		Skola (TUFF, N=40)	
	M	SD	M	SD
Räkneförmåga	3.0	0.0	3.0	0.0
<b>Känna igen tal</b>	<b>4.94</b>	<b>1.73</b>	<b>5.62</b>	<b>1.63</b>
<b>Jämföra tal</b>	<b>5.94</b>	<b>1.66</b>	<b>6.60</b>	<b>0.81</b>
<b>Icke verbal räkning</b>	<b>3.44</b>	<b>0.65</b>	<b>3.80</b>	<b>0.56</b>
<b>Räknehändelser</b>	<b>3.86</b>	<b>1.07</b>	<b>4.58</b>	<b>0.90</b>
<b>Beräkningsuppgifter</b>	<b>3.97</b>	<b>1.34</b>	<b>4.90</b>	<b>1.50</b>
<b>Taluppfattning (tot)</b>	<b>25.17</b>	<b>4.17</b>	<b>28.5</b>	<b>3.62</b>

Sex månader efter att interventionen genomförts gjordes ett fördröjt eftertest, med bedömningsstödet för årskurs 1 (Skolverket 2019). Resultaten visar att eleverna på de båda skolorna presterar på likvärdig nivå på alla våra matematikmätt (se tabell 3).

**Tabell 3.** Medelvärde och standardavvikelse på bedömningsstödet i årskurs 1 i kontrollgruppen och TUFF-gruppen. Inga signifikanta skillnader mellan grupperna.

Testvariabler	Skola (Kontroll, N=35)		Skola (TUFF, N=32)	
	M	SD	M	SD
Räkneförmåga	2.39	0.57	2.48	0.61
Jämföra tal	2.34	0.57	2.12	0.76
Känna igen tal	2.45	0.56	2.68	0.47
Antalskonstans	2.00	0	2.03	0.59
Subitiserar	2.88	0.32	2.66	0.52
Begrepp	1.85	0.80	2.12	0.73
Taluppfattning (tot)	27.54	5.32	27.81	6.71

Sammanfattningsvis tyder mycket på att TUFF-programmet har haft effekt på elevernas grundläggande taluppfattning. I vilket avseende eleverna i TUFF-gruppen utvecklats signifikant bättre än kontrollgruppen och med vilken effekt beskrivs i nästa avsnitt.

<sup>5</sup> TUFF-gruppens resultat var signifikant bättre på följande uppgifter känna igen tal (se tabell 2). Jämföra tal  $t(74)=2.23$ ,  $p=.029$ ,  $d=.51$ ; Icke verbal räkning  $t(74)=2.55$ ,  $p=.013$ ,  $d=.59$ ; Räknehändelser,  $t(74)=2.83$ ,  $p=.002$ ,  $d=.65$ ; Beräkningsuppgifter  $t(74)=3.15$ ,  $p=.006$ ,  $d=.72$ ; Taluppfattning (tot)  $t(74)=3.73$ ,  $p<.001$ ,  $d=.86$ .



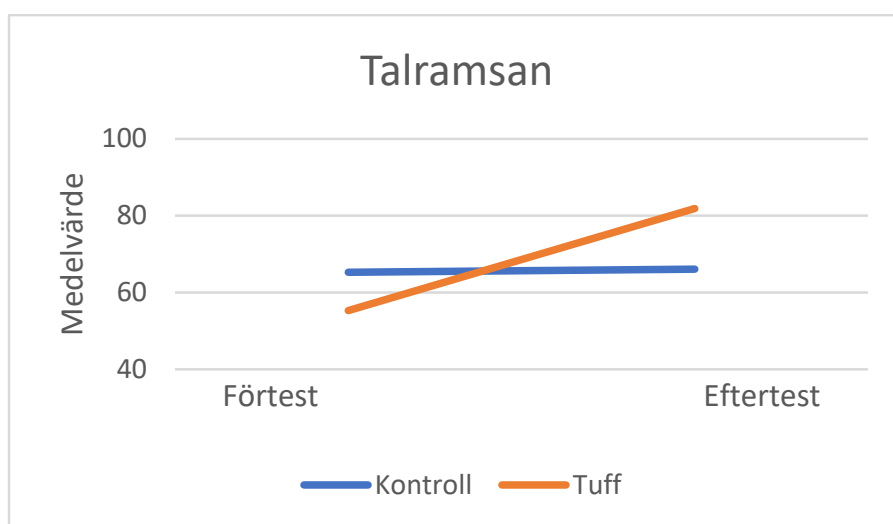
K Westerholm & J Samuelsson

## DEL 2 -Utveckling under interventionsperioden

Utvecklingen under interventionsveckorna visar att eleverna i TUFF-gruppen haft en signifikant bättre utveckling inom flera matematikområden jämfört med kontrollgruppen. Vi kunde konstatera signifikant bättre utveckling för TUFF-gruppens elever avseende räkneförmåga utifrån talramsans, att känna igen tal, att jämföra tal, icke verbal räkning, räknehändelser, beräkningsuppgifter och på hela taluppfattningstestet.

### Utveckling av talramsans

Inledningsvis analyserades elevernas utveckling av talramsans det vill säga, hur långt de kunde räkna före och efter interventionsperioden (se figur 1). På förstestet kunde vi notera att eleverna i kontrollgruppen kunde räkna i snitt till 65 medan eleverna i TUFF-gruppen kunde räkna till 55 vid förstestet. Denna skillnad var dock inte statistiskt signifikant, däremot visade det sig att eleverna i TUFF-gruppen utvecklades signifikant bättre än kontrollgruppen mellan för- och eftertest<sup>6</sup>.

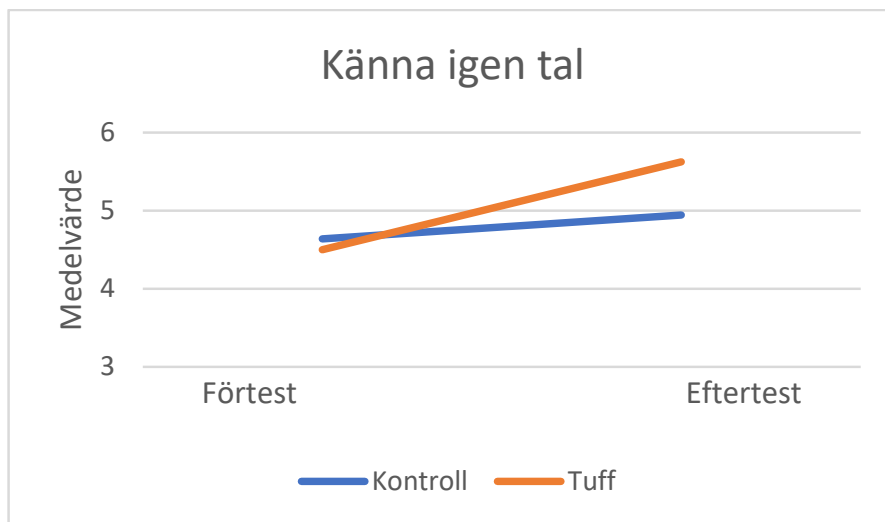


Figur 1. Utveckling av talramsans från förstestet till eftertestet på kontroll- och TUFF-gruppen.

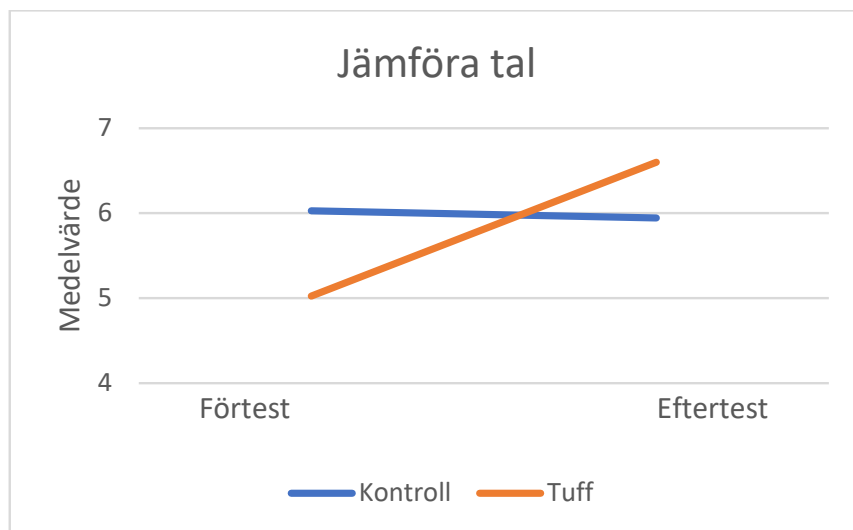
<sup>6</sup> Interaktionseffekt av tid och grupp: Utveckling av talramsans  $F(1,74)=13.08$ ,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.15$ . Analysen visade också en huvudeffekt av tid  $F(1,74)=14.76$ ,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.16$  men ingen huvudeffekt för grupp.

### Att känna igen och jämföra tal

Två matematikmått handlade dels om att känna igen tal (figur 2), dels om att jämföra tal (figur 3). I båda fallen konstaterades att TUFF-gruppen hade haft en bättre utveckling på uppgifter som handlade om att känna igen tal och jämföra tal<sup>7</sup>.



Figur 2. Utveckling av att känna igen tal från förtestet till eftertestet i kontroll- och TUFF-gruppen.



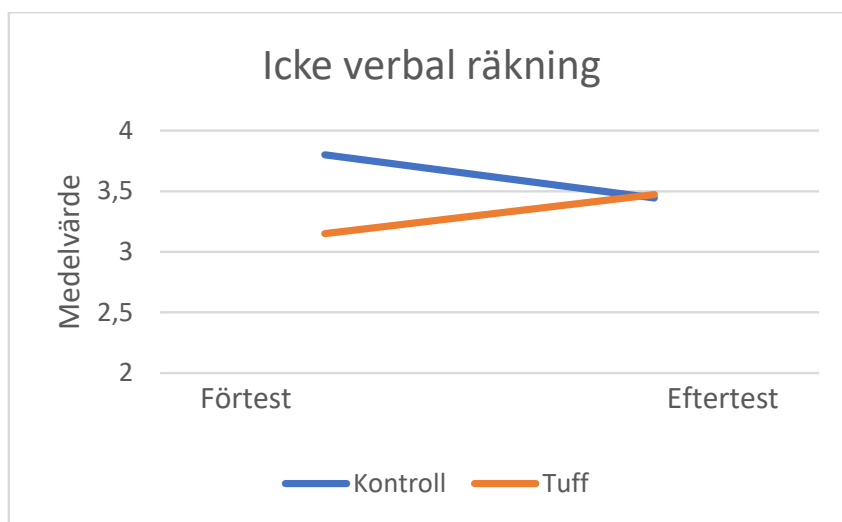
Figur 3. Utveckling av att jämföra tal från förtestet till eftertestet i kontroll- och TUFF-gruppen.

<sup>7</sup> Interaktionseffekt av tid och grupp: Känna igen tal (1,74)=10.01,  $p=.002$ ,  $\eta^2=.12$ , och jämföra tal (1,74)=15.51,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.17$ . Analysen visade också en huvudeffekt av tid, känna igen tal (1,74)=30.52,  $p=.001$ ,  $\eta^2=.29$ , jämföra tal(1,74)=21.08,  $p=.001$ ,  $\eta^2=.14$ . Däremot fick vi ingen effekt av grupp.

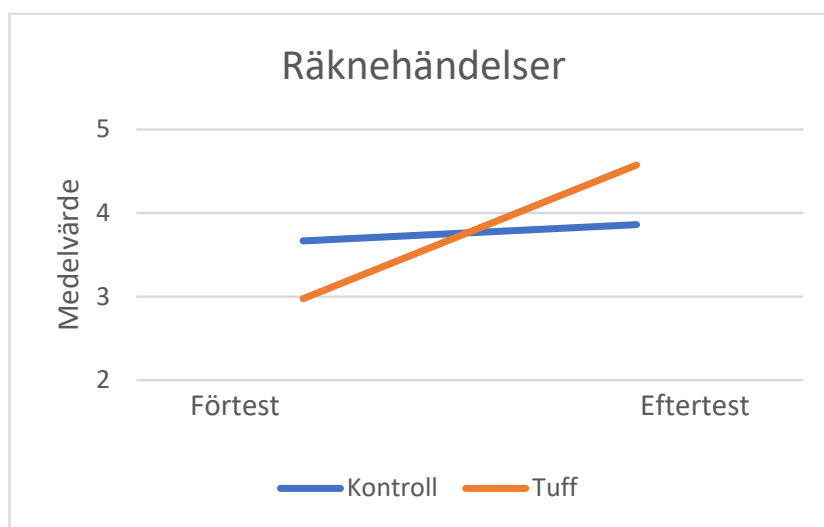
K Westerholm & J Samuelsson

### Att genomföra beräkningar

Tre olika matematikmätt berörde elevernas förmåga att genomföra beräkningar, icke verbala beräkningar (figur 4), räknehändelser (figur 5) och beräkningsuppgifter (figur 6). I alla tre fallen visade eleverna i TUFF-gruppen på en signifikant bättre utveckling än kontrollgruppen<sup>8</sup>.

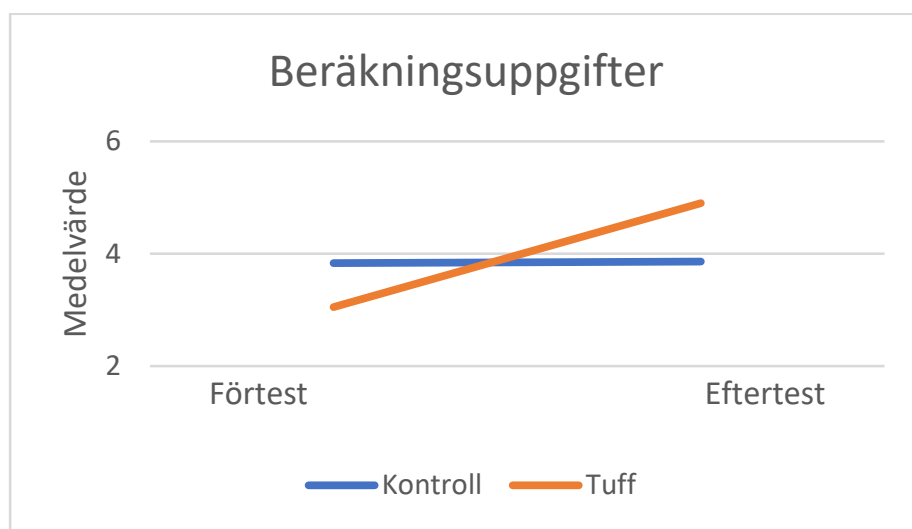


Figur 4. Utveckling av icke verbal räkning från förtestet till eftertestet på kontroll- och TUFF-gruppen.



Figur 5. Utveckling av förmågan att kunna lösa räknehändelser från förtestet till eftertestet i kontrollgruppen och TUFF-gruppen.

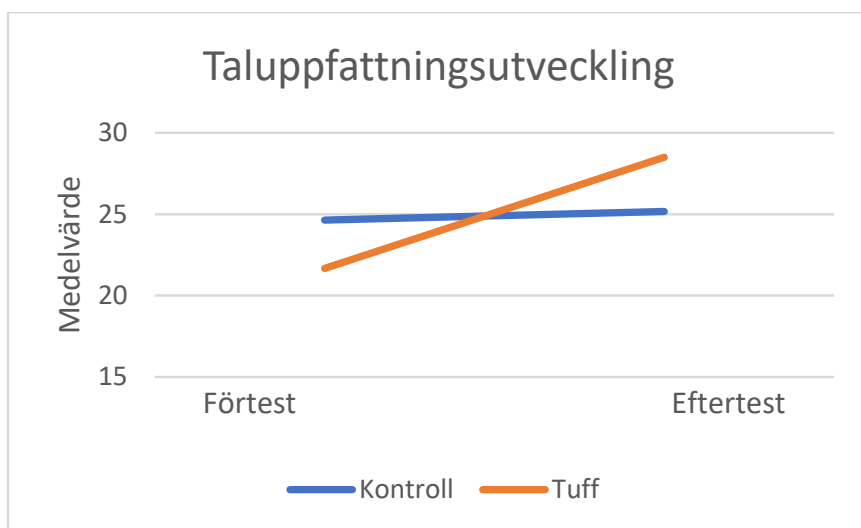
<sup>8</sup> Interaktionseffekter av tid och grupp: Icke verbala beräkningar (1,74)=7.61,  $p=.007$ ,  $\eta^2=.09$ , räknehändelser (1,74)=16.17,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.18$  och beräkningsuppgifter (1,74)=19.48,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.21$ . I relation till dessa mått fick vi också en huvudeffekt av tid, icke verbala beräkningar (1,74)=5.45,  $p=.013$ ,  $\eta^2=.08$ , räknehändelser (1,74)=26.37,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.26$  och beräkningsuppgifter (1,74)=48.72,  $p<.001$ ,  $\eta^2=.40$ , men inte av grupp.



**Figur 6.** Utveckling av beräkningsuppgifter från förtestet till eftertestet i kontrollgruppen och TUFF-gruppen.

#### Övergripande utveckling av taluppfattning

Studeras utvecklingen vad gäller elevernas taluppfattning, det vill säga totala resultatet på förtestet och eftertestet kan konstateras att TUFF-gruppen haft en signifikant bättre utveckling vad gäller elevernas taluppfattning under perioden som interventionen genomförts<sup>9</sup>.



**Figur 7.** Utveckling av taluppfattning från förtestet till eftertestet i kontrollgruppen och TUFF-gruppen.

<sup>9</sup> Interaktionseffekt:  $F(1,74)=54.9$ ,  $p<.001$ ,  $\eta^2 =.425$

K Westerholm & J Samuelsson

Sammanfattningsvis visar våra resultat att utvecklingen i de båda grupperna varit olika. TUFF-gruppens elever har utvecklats signifikant mer under interventionsperioden jämfört med kontrollgruppen på i stort sett alla matematikmätt.

## Diskussion

Skolan ska vara likvärdig och alla elever har rätt till en utbildning av hög kvalitet. För att möta alla elever kan skolor ha olika pedagogiska inriktningar vad gäller det som fokuseras på i undervisningen och hur undervisningen bedrivs. I denna studie har vi prövat interventionsprogrammet TUFF för att se hur det kan stötta utvecklingen av taluppfattning hos förskoleklass elever, i socioekonomiskt svaga miljöer med hög andel elever med svenska som andraspråk. TUFF-gruppens utveckling av taluppfattning har också jämförts med en kontrollgrupps utveckling av taluppfattning under interventionsperioden.

Ett argument för att genomföra denna studie var att tidigare studier har visat att elever i socioekonomiskt svaga områden presterar signifikant lägre vid skolstarten vad gäller taluppfattning än elever i medelstarka socioekonomiska områden (Clements & Sarama, 2008). Vid förtest kunde vi konstatera att eleverna i TUFF-gruppen redan i början av vårterminen i förskoleklass presterade på en signifikant lägre nivå än eleverna i kontrollgruppen. Resultatet av studien visar att interventionsprogrammet TUFF, kan stötta förskoleklass elever i socioekonomiskt svaga områden i deras utveckling av grundläggande matematik. Genom att elever i ett sådant område har undervisats enligt TUFF-programmet har skillnader gällande taluppfattning kunnat minska, jämfört med elever i ett medelstarkt socioekonomiskt område som deltagit i ordinarie matematikundervisning. Ett liknande resultat presenterades av Jordan med kollegor (2012). Föreliggande studie replikerar således deras resultat för interventionsprogrammet i en svensk kontext. Trots relativt starka universella utgångspunkter, om hur ovanstående kunskaper utvecklas, uppträder alltså individuella skillnader i symbolisk taluppfattning redan i förskoleklass. Tidigare studier har visat att det till och med kan vara stora skillnader redan i förskolan, vilket har sin förklaring i elevernas tidigare erfarenheter och inlärningsmöjligheter samt deras kognitiva förmåga (Jordan m.fl., 1992; Klibanoff, Levine, Huttenlocher, Vasilyeva & Hedges, 2006; National Research Council, 2009).

Det finns flera skäl till att denna utveckling har skett, skäl som har stöd i tidigare forskning. Vi vill argumentera för att ett huvudskäl är den målmedvetna undervisningen. Tidigare studier visar entydigt att målmedveten undervisning har positiv påverkan på elevernas utveckling av tidig taluppfattning (Griffin, 2004; Dobbs, Doctoroff, Fisher & Arnold, 2006; Klein & Starkey, 2004). Ett annat skäl är att aktiviteterna har bedrivits utifrån principer från undervisningsmodellen "Direct instruction" där träning av nya färdigheter varvas med träning av färdigheter som eleverna sedan tidigare behärskar, svårare färdigheter varvas med lättare färdigheter. För att öka motivationen görs eleverna också medvetna om sina egna framsteg. Dessa principer har tidigare visat sig ha god effekt för att eleverna ska lära matematik (Stein m.fl., 2006). Ett ytterligare skäl till att interventionsprogrammet TUFF har varit lyckat kan



förklaras av att innehållet har varit hierarkiskt uppbyggt och inneburit en progression som har underlättat för elevernas lärande. Detta har även tidigare studier visat (Ramani & Siegler, 2008). Ett fjärde skäl till den positiva utvecklingen kan vara den strukturerade undervisningen med fokus på de centrala delarna i taluppfattning. Interventionsprogrammet TUFF som utvecklades och studerades i föreliggande studie har visat sig gynnsamt för såväl den icke-verbala taluppfattningen som för kunskap om matematiska symboler. Detta resultat är positivt för den fortsatta matematikutvecklingen då vi vet att icke-verbal taluppfattning är grundläggande för att lära sig det symboliska talsystemet samtidigt som igenkänning av siffror och tal återspeglar förståelsen av ord relaterade till tal och skriftliga symboler (National Research Council, 2009). Ett femte skäl som kan förklara framgången med programmet är det konsekventa användandet av representationer (fingrar, prickar, talrad, klossar). Genom att använda samma representationer undvek vi problematiken att eleverna ofta fokuserar på perceptuella variabler i uppgifterna snarare än på relevant numerisk information i de matematikrelaterade aktiviteter (jfr Rousselle, Palmaers & Noël, 2004).

Tidigare studier har också visat att det är av stor vikt att genomföra en tidig intervention när elever genomgår en avgörande och kritisk period i sin matematikutveckling (Baroody, Eiland & Thompson, 2009; Clements & Sarama, 2007; Jordan, 2007; Purpura, Baroody & Lonigan, 2013). I förskoleklassen handlar det om att gå från att möta en informell matematik till en formell matematik. Interventionsprogrammet TUFF har i detta fall stöttat övergången från den informella till den formella matematiken (jfr Baroody, Thompson & Eiland, 2007). Lärarna har genom undervisningen lyckats skapa en bra övergång från informell till formell matematik och de har därmed gett elever möjlighet att koppla den informella matematiken till skrivna symboler, men de har också synliggjort vad tal betyder och innebär (Aunio & Räsänen, 2015; Baroody m.fl., 2009; Clements & Sarama, 2007). Lärarna i kontrollgruppen följde ett läromedel och planerade upp undervisningen med stöd av detta. Att den gruppen inte når riktigt samma resultat kan bero på att ovanstående diskuterade aspekter har förekommit i undervisningen men i något svagare form än i TUFF-programmet. I vilken utsträckning lärarna följde läromedlet har vi ingen data på. Lärarna menade dock att de har bedrivit matematikundervisning som de brukar med utgångspunkt i det läromedel de hade. De elever som gick i TUFF-grupp kan därmed sägas ha jämförts med elever som fick en ordinarie undervisning.

### ***Begränsningar och fortsatt forskning***

Det finns ett antal begränsningar med att genomföra denna typ av studie. Då studien är kvasiexperimentell har den genomförts på ett mycket begränsat antal elever. Det är därför svårt att generalisera till en större population. För att kunna göra det krävs en storskalig studie. Dock menar vi att studien som har gjorts ger starka indikationer på att TUFF-programmet har en positiv effekt på elevernas taluppfattning.

En annan fråga som måste diskuteras vid den här typen av interventionsstudier är hur väl lärarna har följt programmet. I denna studie har lärarna följt ett manus men har ibland frångått manus då eleverna arbetade med talraden och vid aktiviteter där

eleverna skulle rita. Dessa avsteg från manus menar vi inte bör ha påverkat undervisningen i någon större grad även om det för vissa elever hade underlättat förståelsen om de också hade fått rita själva. Resultatet på räkneuppgifterna och talkombinationerna vittnar om att undervisningen så som den genomförts har fungerat.

En tredje faktor som alltid bör diskuteras vid interventionsstudier är den så kallade Hawthorneffekten, det vill säga att elevernas utveckling kan ha påverkats positivt av den uppmärksamhet som forskningsprojektet har gett dem. I vårt fall visste eleverna att de var involverade i ett särskilt projekt. I gruppen av elever fanns det säkert dom som påverkades positivt av det. För flera av de duktigare eleverna blev däremot denna typ av undervisning tråkig då de inte fick utmaningar vilket resulterade i en negativ inställning till projektet.

En fjärde faktor som kan ses som begränsande för studiens trovärdighet är att det skedde ett relativt stort bortfall i TUFF-gruppen till årskurs 1. Detta bestod av åtta elever med svenska som sitt första språk, åtta elever som i denna klass hade höga resultat på testet. I det fördröjda eftertestet vid start av årskurs 1 presterar TUFF-gruppens elever på en lite högre nivå än kontrollgruppen. Det är ingen orimlig tanke att tro att TUFF-gruppens resultat skulle varit ännu bättre om dessa flickor varit kvar på skolan.

Förutom att pröva programmet i en större skala vore det intressant att se vilken effekt programmet kan ha gällande taluppfattning, hos elever som presterar på en låg nivå i bedömningsstödet i årskurs 1 på hösten.

## Referenser

- Aunio, P. & Räsänen, P. (2016). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, vol. 24, nr 5, ss. 684-704.
- Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.18, nr 2, ss. 141-157.
- Baroody, A. J., Eiland, M. & Thompson, B. (2009). Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development*, vol. 20, nr 1, ss. 80-128.
- Booth, J. L. & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, vol. 79, nr 4, ss. 1016-1031.
- Case, R. & Griffin, S. (1990). Child cognitive development: The role of central conceptual structures in the development of scientific and social thoughts. I: C. A. Hauert (red.). *Advances in psychology-Developmental psychology: Cognitive, perception-motor, and neurological perspectives*. Amsterdam: North Holland.
- Chetty, R., Friedman, J. N., Hilger, N., Saez, E., Whitmore, D., Schanzenbach, K. & Yagan D. (2010). \$320,000 Kindergarten teachers. *Phi Delta Kappan*, vol. 92. nr 3, ss. 22-25.
- Cirino, P. T. (2011). The interrelationships of mathematical precursors in kindergarten. *Journal of Experimental Child Psychology*, vol. 108, nr.4, ss. 713-733.
- Clarke, B. & Shinn, M. R. (2004). A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement. *School*

- Psychology Review*, vol. 33, nr 2, ss. 234–248.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Education Research Journal*, vol. 45, nr 2, ss. 443–494.
- Dobbs, J., Doctoroff, G. L., Fisher, P. H. & Arnold, D. H. (2006). The association between preschool children's socio-emotional functioning and their mathematic skills. *Applied Developmental Psychology*, vol. 27, nr 1, ss. 97–108.
- Duncan, G. J. & Brooks-Gunn, J. (2001). Poverty, welfare reform, and children's achievement. I B. Biddle (red.) *Social class, poverty and education: Policy and practice*. New York, NY: Routledge-Falmer, ss. 49–76.
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Classens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P. & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, vol. 43, nr 6, ss. 1428–1446.
- Elofsson, J., Gustafsson, S., Samuelsson, J. & Träff, U. (2016). Playing number board games supports 5-year-old children's early mathematical development. *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 43, nr 2, ss. 134–147.
- Fuson, K. C., Grandau, L. & Sugiyama, P. A. (2001). Achievable numerical understandings for all young children. *Teaching Children Mathematics*, vol. 7, nr 9, ss. 522–526.
- Geary, D. C., Bailey, D. H. & Hoard, M. K. (2009). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: the number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, vol. 27, nr 3, ss. 265–279.
- Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gersten, R., Baker, S. K., Shanahan, T., Linan-Thompson, S., Collins, P. & Scarcella, R. (2007). *Effective literacy and English language instruction for English learners in the elementary grades: a practice guide* (NCEE 2007-4011) Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.
- Ginsburg, H.P. & Russell, R.L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, vol. 46, nr 6, ss. 1–69.
- Griffin, S. (2004). Building number sense with Number Worlds: A mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, vol. 19, nr 2, ss. 173–180.
- Jordan, N. C., Huttenlocher, J. & Levine, S. C. (1992). Differential calculation abilities in young children from middle- and low-income families. *Developmental Psychology*, vol. 28, nr 4, ss. 644–653.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N. & Ramineni, C. (2007). Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*, vol. 22, nr 1, ss. 36–46.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth

K Westerholm & J Samuelsson

- in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, vol. 77, nr 2, ss. 153–175.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. & Locuniak MN. (2008). Development of number combination skill in the early school years: When do fingers help? *Developmental Science*, vol. 11, nr 5, ss. 662–668.
- Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B. & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: a randomized controlled study. *Journal of Educational Psychology*, vol. 104, nr 3, ss. 647–660.
- Klein, A. & Starkey, P. (2004). Fostering preschool children's mathematical knowledge: Findings from the Berkeley math readiness project. I: D. H. Clements, J. Sarama & A. M. DiBase (red.). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (ss. 343–360). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates..
- Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M. & Hedges, L. V. (2006). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "Math Talk". *Developmental Psychology*, vol. 42, nr 1, ss. 59–69.
- Le Corre, M. & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, vol. 105, nr 4, ss. 395–438.
- Lembke, E. & Foegen, A. (2009). Identifying early numeracy indicators for kindergarten and first-grade students. *Learning disabilities research & practice*, vol. 24, nr 1, ss. 12–20.
- Locuniak, M. N. & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*, vol. 41, nr 5, ss. 451–459.
- Mononen, R., Aunio, P., Koponen, T. & Aro, M. (2014). A review of early numeracy interventions for children at risk in mathematics. *International Journal of Early Childhood Special Education*, vol. 6, nr 1, ss. 25–54.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: the final report of the national mathematics advisory panel*. Washington, D.C: U.S. Department of Education.
- National Research Council (2009). *Mathematics learning in early childhood: paths toward excellence and equity*. Washington, D.C: The National Academies Press.
- Purpura, D. J., Baroody, A. J. & Lonigan, C. J. (2013). The transition from informal to formal mathematical knowledge: mediation by numeral knowledge. *Journal of Educational Psychology*, vol. 105, nr 2, ss. 453–465.
- Rousselle, L., Palmers, E. & Noël, M-P. (2004). Magnitude comparison in preschoolers: What counts? Influence of perceptual variables. *Journal of Experimental Child Psychology*, vol. 87, nr 1, ss. 57–84.
- Ramani, G. B. & Siegler, R.S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, vol. 79, nr 4, ss. 375–394.
- Shadish, W. R., Cook, T. D. & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experi-*

- mental designs for generalized causal inference*. Houghton: Mifflin and Company Skolverket (2019). *Nationellt bedömningsstöd i taluppfattning årskurs 1-3*. Stockholm: Fritzes.
- Starkey, P., Klein, A. & Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, vol. 19, nr 1, ss. 99–120.
- Stein, M., Kinder, D., Silbert, J. & Carnine, D. (2006). *Designing effective mathematics instruction: A Direct Instruction approach* (4th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall/Merrill.
- Sterner, G., Wolff, U. & Helenius, O. (2019). Reasoning about representations: effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, vol. 64, nr 5, ss. 782–800.
- Svensson Källberg, P. (2018). Identity formations as mathematical learners in the context of transition. *NOMAD: [Nordic Studies in Mathematics Education]*, vol. 23, nr 3-4, ss. 39–59.
- Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S. & Davis-Kean, P. E. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, vol. 43, nr 7, ss. 352–360.