Tecken på teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet

M Björk, Å Nikula, P Stensland & A Stridfält

Sammanfattning

I den här artikeln beskrivs och diskuteras teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet hos elever som deltar i ett utforskande arbete med mätning av sträckor i olika baser. Data kommer från en studie med 44 elever i årskurs 4 där Davydovs matematiska program för en lärandeverksamhet användes för design av undervisningen. Film, elevuppgifter och transkriptioner har analyserats kvalitativt och kategoriserats. Analysen visar tecken på teoretiskt tänkande i form av handlingar, exempelvis frågor om, och beskrivningar av relationer mellan positionerna till vänster och höger om radixpunkten (tecknet som skiljer heltalsdel och bråkdel). Resultatet redovisas under tre kategorier: (a) ***basens funktion för det värde som siffrorna anger i talet****, (b)* ***positionsväxling*** *och (c)* ***entalet som ett av en kvantitet****. Resultatet diskuteras i relation till tidigare forskning om elevers svårigheter med decimaltal.*

Nyckelord: rationella tal, lärandemodeller, lärandeverksamhet/learning activity, Davydovs matematiska program, teoretiskt tänkande

Marie Björk är doktorand inom forskarskolan Learning study. Hon är grundskollärare och specialpedagog och arbetar som specialpedagog på Sjöstadsskolan.*

Åsa Nikula är grundskollärare i matematik och NO för årk 1-7. Åsa arbetar sedan 2018 på Skarpatorpsskolan i Stockholm.

Anna Stridfält är grundskollärare i matematik och NO samt teknik i åk 1-9. Hon arbetar sedan 2018 på Glömstaskolan i Huddinge.

Paul Stensland är grundskollärare i matematik och NO i åk 4-6 vid Engelbreksskolan i Stockholm, (Sjöstadsskolan 2013-2017), och Ped. Magister (Finland).

** vid Specialpedagogiska institutionen på Stockholms universitetet.*

Abstract
This article describes and discusses emerging theoretical thinking about structures in the base system among pupils who participate in an exploratory work where they measure distances in different bases. Data comes from a study with 44 pupils in grade 4 where Davydov's mathematical program for a learning activity was used for the design of the teaching. Films, student assignments and transcripts have been analyzed qualitatively and categorized. The analysis shows signs of emerging theoretical thinking in the form of actions, such as questions about, and descriptions of relationships between the positions on the left and right of the radix point (the sign that distinguishes integer part and fractional part in the number). The result is reported under three categories: (a) the bases function to the digits´ value in the number, (b) position switching and (c) the unit as one of a quantity. The result is discussed in relation to previous research on pupils' difficulties with decimal numbers.

Keywords: Rational numbers, Learning models, Learning activity, Davydov's mathematical program, Theoretical thinking

Introduktion
Ämnet för denna artikel är elevers teoretiska tänkande om strukturer i bassystemet. Bakgrunden till detta intresse är elevers svårigheter med tiobassystemet som kommer till uttryck i forskning om elevers förståelse av rationella tal, det vill säga tal som kan uttryckas som en kvot mellan två heltal, a/b, där b inte är noll (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Rationella tal pekas ut som ett problematiskt område i olika forskningsöversikter, se exempelvis Lortie-Forgues, Tian och Siegler (2015), Ni och Zhou (2005) samt Tian och Siegler (2018), samtidigt som elevers kunskaper om rationella tal predicerar framgång för fortsatt kunskapsutveckling i matematik (Resnick, Rinne, Barbieri & Jordan, 2018; Siegler m.fl., 2012). När elever jämför rationella tal uttryckta i decimalform, fortsättningsvis kallade decimaltal, har de ibland svårt att förstå vad siffror till höger om decimaltecknet betyder. Detta förklaras med att de kunskaper elever har om heltal kan leda till felaktiga slutsatser om decimaltal (Resnick m.fl., 1989; Sackur-Grisvard & Léonard, 1985; Steinle, 2004). Exempelvis förekommer det att elever uppfattar 2,17 som ett större tal än 2,4 vilket kan bero på att elever utgår från kunskapen att heltalet 17 är större än heltalet 4 (Resnick m.fl., 1989; Sackur-Grisvard & Léonard, 1985). Problemet benämns *whole number bias* och definieras som "a robust tendency to use the single-unit counting scheme to intepret instructional data on fractions" (Ni & Zhou, 2005, s. 28). Whole number bias kan orsaka svårigheter för elever att förstå heltal som nedbrytbara enheter och som kontinuerliga eller sammanhängande, exempelvis att det finns tal mellan 0 och 1 (Ni & Zhou, 2005).

Det händer också att elever uppfattar tal med många decimaler som mindre än tal med få decimaler, som att 3,765 är mindre än 3,4 (Sackur-Grisvard & Léonard, 1985; Steinle, 2004). Denna uppfattning kan leda till att elever uppfattar exempelvis talet 2,7 som ett större tal än 2,326 vilket innebär att svaret blir rätt, men på felaktig grund. Problemet kan bero på svårigheter att koordinera två faktorer som bestämmer storleken på ett rationellt tal (Peled & Awawdy-Shahbari, 2009). Den ena faktorn är bråkenheten, vilken motsvarar tiondelar i talet 0,4 eller femtedelar i talet 3/5. Den andra faktorn är antalet enheter, exempelvis 4 tiondelar i 0,4 eller 3 femtedelar i 3/5 (Peled & Awawdy-Shahbari, 2009).

Elevers svårigheter gällande decimaltal är dock inte bara en fråga om samspel mellan deras tidigare kunskaper och ny kunskap utan också en fråga om hur kunskap och tänkande om tal utvecklas (Ni & Zhou, 2005). Enligt Vamvakoussi och Vosniadou (2010) behöver elever förstå naturliga och rationella tal på en konceptuell grund och som uppbyggda enligt samma strukturer.

Strukturerna för tiobassystemet kan beskrivas matematiskt utifrån den specifika basen tio (Kiselman & Mouwitz, 2008). Olika exponenter av tio gäller för de olika positionerna i talet, exempelvis betyder 362,35 i bas tio $3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$, vilket är det samma som $3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1/10 + 5 \cdot 1/100$. Tiobassystemet kan också beskrivas som ett bassystem bland andra, där basen bestämmer vad siffrorna i talet betyder, beroende av position. Talet 362,35 i en godtycklig bas (*b*), betyder $3 \cdot b^2 + 6 \cdot b^1 + 2 \cdot b^0 + 3 \cdot b^{-1} + 5 \cdot b^{-2}$. Enligt bassystemet betyder en siffra (*a*), till höger om radixpunkten[1] $a \cdot b^{-1}$. För exempelvis bas sju innebär det att siffrorna till höger om radixpunkten i talet 362,35 betyder $3 \cdot 7^{-1}$ och $5 \cdot 7^{-2}$, det vill säga $3 \cdot 1/7 + 5 \cdot 1/49$. För att förstå bassystemet som ett generellt system behöver elever således rent ämnesteoretiskt urskilja följande strukturella aspekter i bassystemet: (a) att potenser av en godtycklig bas bestämmer vad siffrorna i ett tal betyder, (b) att exponenten ökar med ett (1) från höger till vänster och är noll vid den första positionen till vänster om radixpunkten samt (c) att övergången till en ny enhet sker vid bastalet.

Mot bakgrund av att tidigare forskning om elevers problem med rationella tal, redovisad ovan, förefaller vara inramad i en undervisningstradition där i huvudsak tiobassystemet används, framträder följande frågor: Kan elevers svårigheter med decimaltal förklaras med att bas tio används utan att bassystemet tydliggörs, det vill säga att eleverna har svårt att urskilja strukturella aspekter i tiobassystemet? Kan förståelse av bassystemet som ett generellt system bidra till en ökad förståelse av tiobassystemet och decimaltal?

Forskare som Dienes (1959), Chambris (2018) och Howe (2015) hävdar att elever behöver utveckla teoretisk förståelse av tiobassystemets struktur. Enligt Dienes behöver elever teoretisk förståelse för hur variablerna bas och exponent bestämmer vad siffror i ett tal betyder. Elever behöver också förstå begreppet talenhet eller ”numeration unit” (Chambris, 2018, s 188) som ett generellt begrepp och inte begränsat till tiobasbitar, vilket kan förhindras om de endast möter additiva och multiplikativa beskrivningar av tal i tiobas, exempelvis $326 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1$. Vidare behöver elever utveckla förståelse av hur enheter bildas genom potenser av basen tio vilket också kan vara en grund för förståelse av decimaltal (Howe, 2015).

1 Benämningen ”radix point” (Van Verth & Bishop, 2008, s. 7), översatt till svenska radixpunkt, används här för det tecken som skiljer heltalsdelen från bråkdelen i ett tal eftersom benämnin-gen decimaltecken avser avskiljning av heltal och bråkdel, när bas tio används.

Vygotsky (1986) argumenterade redan på 1930-talet för att elever behöver utveckla en teoretisk förståelse av tiobassystemet som ett bassystem bland andra. Enligt Vygotsky är förmågan att omvandla ett tal skrivet i en bas till en annan bas ett kriterium för att elever förstår tiobassystemet som ett bassystem: ”As long as the child operates with the decimal system without having become conscious of it as such, he has not mastered the system, but is, on the contrary bound by it.” (Vygotsky, 1986, s 203). Utifrån Vygotskys kulturhistoriska perspektiv på lärande har Davydov (2008) utvecklat ett program för en matematisk lärandeverksamhet. En av utgångspunkterna i detta program är att elever redan under de första skolåren behöver förstå och kunna tänka teoretiskt om tal ”as a conceptual system” (Schmittau, 2004, s 39) samt att elever, innan de börjar arbeta med tal, ska ha identifierat begreppet enhet (innebörden av teoretiskt tänkande och lärandeverksamhet utvecklas nedan).

Fler forskare som har studerat elevers teoretiska förståelse av bassystemet, bygger sina studier på Davydovs (2008) matematiska program (ex. Venenciano, Slovin & Zenigami, 2015; Solvin & Dougherty, 2004). Venenciano mfl. (2015) visade hur teoretisk förståelse av heltal utvecklades hos elever som hade arbetat med strukturer i bassystemet. Eleverna i studien fick under det första skolåret arbeta med mätningar i olika baser där de var tvungna att skapa nya och större enheter. I årskurs två kunde eleverna visa talet 1 3 2 i bas fyra, med hjälp av modeller för enheter i bas fyra, i form av areor. Venenciano m.fl. argumenterar för att elever också skulle kunna utveckla större förståelse för rationella tal genom att arbeta med mätningar i olika baser. Enligt dem skulle eleverna kunna utveckla förståelse även för rationella tal vid mätning i olika baser, genom att erfara mindre enheter som delar (exempelvis tiondelar i bas tio eller tredjedelar i bas tre) och delar av delar (exempelvis hundradelar i bas tio eller niondelar i bas tre).

I en studie av Solvin och Dougherty (2004) undervisades elever under det första skolåret, utifrån Davydovs matematiska program. Eleverna fick arbeta med att identifiera begreppet enhet genom mätning i olika baser. I årskurs två intervjuades tio av eleverna om varför och när de behövde ta en större enhet i bruk om de räknade i en godtycklig bas, exempelvis när man går från 9 till 10 i bas tio eller från 2 till 10 (ett, noll) i bas tre. Resultatet visade att elevernas svar utvecklades från att innehålla exempel på hur man räknar i en specifik bas till att omfatta generella förklaringar till varför och när en större enhet tas i bruk, vilket exemplifieras med följande elevsvar: ”You can´t go to the base number. You can go up to one less” (Solvin & Dougherty, 2004, s 213). När samma frågor ställdes till elever (13 st i åk 4 till 7) som inte fått undervisning enligt Davydovs program visade det sig att endast en av eleverna kunde svara på frågorna. De beskrivningar som eleverna i experimentgruppen gav, av när och varför man går över till nästa enhet, kan ses som tecken på teoretiskt tänkande om bassystemet.

Utifrån dessa undervisningsexperiment med Davydovs matematiska program som visar att elever kan utveckla ett teoretisk tänkande om tal och relationer mellan tal, är det intressant att också i ett svenskt sammanhang pröva Davydovs program och då speciellt fokusera på vad som kan förstås som tecken på teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet, även då det gäller rationella tal.

Syfte

Syftet med föreliggande artikel är att beskriva och diskutera tecken på teoretiskt tänkande om bassystemet, bland svenska mellanstadieelever som deltagit i en undervisning utformad med inspiration av Davydovs matematiska program. Följande frågeställning är aktuell:

- Vad i elevernas resonemang och arbete med speciellt designade uppgifter kan ses som tecken på teoretiskt tänkande om bassystemet?

Teoretiskt tänkande

Idén att barn behöver utveckla teoretiskt tänkande som grund för fortsatt utveckling och lärande kommer som tidigare nämnts från Vygotsky (jfr Davydov, 1990; Vygotsky, 2011). I föreliggande artikel används Davydovs (2008) definition av teoretiskt tänkande som en process av reflektion, analys och planering. Målet med en sådan process beskrivs handla om att reproducera eller återskapa grundläggande principer och relationer inom ett fenomen eller ett begrepp: ”Theoretical thinking sets itself the goal of reproducing the essence of the object of study.” (Davydov, 2008, s 107). Teoretiskt tänkande skulle med denna definition kunna komma till uttryck genom reproduktion av grundläggande principer för bassystemet i form av relationer mellan bas, exponent och vad siffrorna betyder i talet.

Teoretiskt tänkande kan också komma till uttryck i form av reflektion över och kontroll av både egna och andras lösningar av olika problem (Bobos & Sierpinska, 2017). Vidare kan teoretiskt tänkande liknas ett tankeexperiment där centrala relationer och förhållanden inom ett specifikt ämnesinnehåll överförs till förhållanden som gör det möjligt att förstå grundläggande principer:

> The basis of theoretical thinking is the thought experiment, V.S. Bibler has singled out the following basic features of a thought experiment: 1) The object of cognition must be mentally transferred to conditions where it is easier to reveal its essence; 2) this object then undergoes further mental transformations; 3) this same experimental leads to a formation of a system of mental links in which the object is ”embedded”.
>
> (Davydov, 2008, s. 236).

Teoretiskt tänkande om bassystemet skulle därmed kunna handla om att överföra grundläggande principer för bassystemet till en grafisk modell i form av en tallinje eller tabell. Dessa grundläggande principer kan transformeras ytterligare, exempelvis genom att modellen används och utvecklas för att utforska relationen mellan bas och vad siffror både till höger och vänster om radixpunkten betyder.

Enligt Davydov (1990) kan teoretiskt tänkande särskiljas från empiriskt tänkande vad gäller grunderna för generaliseringar. Empiriska generaliseringar görs utifrån vad som vid direkt observation är lika för en viss typ av ämnesinnehåll och leder främst till utveckling av empiriska begrepp (Davyov, 1990, 2008). Teoretiska generaliseringar görs utifrån vilka principer och inre relationer som gäller för det ämnesinnehåll som studeras och kan bidra till att vetenskapliga begrepp utvecklas (Davydov, 1990). Ett exempel på en empirisk generalisering av tiobassystemet skulle kunna vara att ett tal kan beskrivas i form av ett antal hundratal, tiotal och ental. En teoretisk generalisering skulle kunna vara en beskrivning av relationen mellan bas och enheter i ett tal skrivet i en godtycklig bas. Teoretiska generaliseringar kan komma till uttryck i form av algebraiska uttryck men också som handlingar som gester, språk och rytmiska rörelser (Radford, 2010). De begrepp och modeller som utvecklas kan sedan användas för att förklara och arbeta med specifika exempel (Davydov, 1990). Enligt Davydov kan detta arbete beskrivas som en rörelse "from the abstract to the concrete" (Davydov, 1990, s 86) vilket i detta sammanhang kan vara att eleverna, från att ha identifierat strukturella aspekter i bassystemet, kan ge konkreta exempel i olika baser.

Material och metod

Datamaterialet kommer från en studie[2] med 44 elever i årskurs 4, ht-16 till vt-17. Datamaterialet består av filmer och ljudinspelning, från en serie av tre lektioner på sammanlagt cirka 180 minuter, transkriberat ord för ord. Artikelns författare, tre matematiklärare samt en doktorand har tillsammans planerat, genomfört och analyserat lektionerna. Informerat samtycke inhämtades från vårdnadshavare (jfr Vetenskapsrådets forskningsetiska principer, 2017).

Lärandeverksamhet (Davydov, 2008) användes som designprincip för undervisningen samt vid analys av teoretiskt tänkande bland eleverna. För en fullständig beskrivning av lärandeverksamhet se Eriksson (2017) som beskriver och diskuterar hur lärandeverksamhet kan användas som ett lärandeteoretiskt redskap eller Davydov (2008) som är en av de forskare vilka utvecklade lärandeverksamhet.

Lärandemodeller

I en lärandeverksamhet konstruerar och prövar elever tillsammans med läraren modeller, så kallade lärandemodeller (Davydov, 2008; Zuckerman & Obukhova, 2015). Dessa fungerar som redskap för att synliggöra och mediera relationer som inte är direkt observerbara hos ett ämnesinnehåll (Davydov, 2008). För att skapa lärandemodeller kan ritningar, grafer eller algebraiska uttryck användas (Davydov, 2008; Chaiklin, 2002; Radford, 2014). Eleverna använder de lärandemodeller som utvecklas tillsammans med läraren för att analysera liknande situationer eller olika varianter av det aktuella ämnesinnehållet (Davydov, 1990). Modellarbetet möjliggör för eleverna att tänka teoretiskt samtidigt som utvecklingen av lärandemodeller är en produkt av det teoretiska tänkandet (Chaiklin, 2002; Davydov, 2008). Modellarbetet kan därmed synliggöra elevers reflektion och analys över egna och kamraters argument samt över hur idéer och modeller fungerar. Elevers problemformuleringar, reflektioner, analy-

2 Denna studie presenteras närmare i en kommande artikel av M. Björk (artikel i manus).

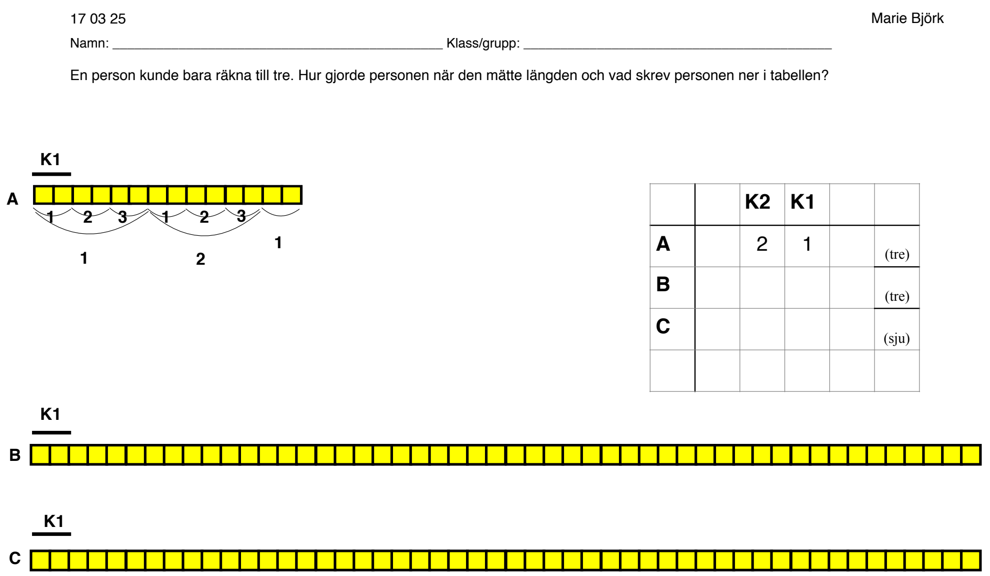
ser, prövande och värderingar i en lärandeverksamhet kan benämnas som ett teoretiskt arbete (Eriksson, 2017; H. Eriksson & I. Eriksson, 2016).

Grundstruktur för lektionen

Uppgifterna utvecklades med inspiration från en uppgift i en rysk lärobok i matematik skriven av Davydov och hans kollegor (Davydov m.fl., 2012, sid 52). Eleverna mätte sträcka A (jfr Davydov m.fl., 2012, sid 52) och därefter sträcka B och C. Uppgiften att mäta sträcka B i bas tre och sträcka C i bas sju var en vidareutveckling av uppgiften att mäta sträcka A (jfr Davydov m.fl., 2012, sid 52).

För att möjliggöra för alla elever att delta i diskussionen i helklass och visa sina försök att utforska uppgiften, användes Smart Board och dokumentkamera. Sträckornas längd angavs i en tabell, vilken fungerade som en lärandemodell där namn på enheterna, här benämnda K1, K2 och så vidare, fanns i tabellhuvudet (jfr Davydov m.fl., 2012, sid 52). Lektionen var iscensatt enligt följande:

1. Läraren berättade att en person som kunde räkna endast till tre hade mätt sträcka A och skrivit resultatet i en tabell (se figur 1). Eleverna diskuterade hur personen gjort. Eleverna prövade för första gången den andra lärandemodellen, bågmodellen.



Figur 1. *Uppgift 1.*

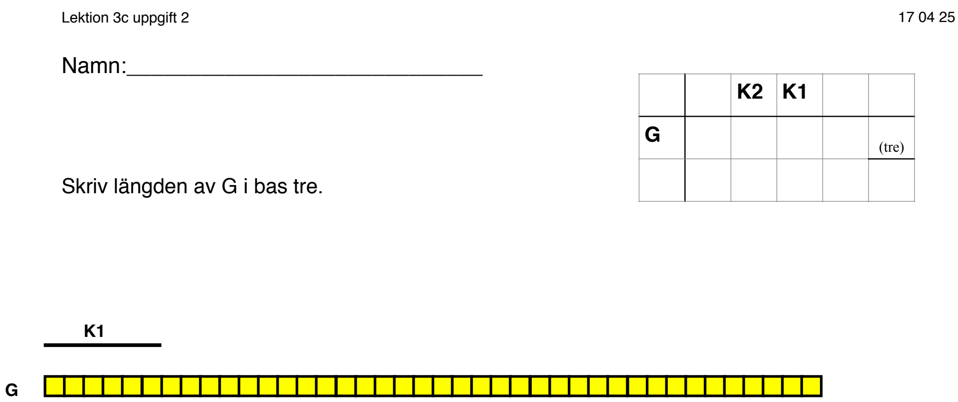
2. Sedan fick eleverna mäta sträcka B i bas tre. Avsikten var att eleverna skulle uppleva ett behov av en ny, större enhet.

3. Därefter skulle eleverna mäta sträcka C i bas sju. Avsikten var att skapa ett

behov att pröva bågmodellen i en ny situation. Den större enheten K3 behövde inte tas i bruk eftersom grupperingarna gjordes med bas sju vilket avsåg att utmana elevernas tidigare erfarenheter av att basen var tre.

4. I det följande gjordes en avstämning av hur eleverna skulle använda lärandemodellerna som de hittills arbetat med. Eleverna fick bevisa att uttrycken $1_{(sju)} = 1_{(tre)}$ och $1\ 2_{(sju)} > 1\ 2_{(tre)}$ stämde. ($1_{(sju)}$ betyder $1 \cdot 7^0$ och $1_{(tre)}$ betyder $1 \cdot 3^0$ och eftersom ett tal upphöjt till noll (0) är lika med ett (1) stämmer utsagan.) Den första utsagan var utformad för att undersöka hur eleverna uppfattade entalet (1), den enda enhet som är samma oavsett bas då alla tal upphöjda till noll är ett (1). Avsikten var att se hur eleverna beskrev vad siffran ett (1) betyder på respektive position.

5. Till sist skulle sträcka G mätas i bas tre (se figur 2). K1 var sex rutor lång i avsikt att det skulle uppstå ett problem med att den var för stor att använda för att mäta G exakt. En mindre enhet saknades för att kunna mäta sträckan. Sträcka G var också avpassad så att det inte krävdes några ental för att ange längden och att siffran noll skulle behövas på entalspositionen.


Lektion 3c uppgift 2 17 04 25

Namn:______________________________

Skriv längden av G i bas tre.

		K2	K1		
G					(tre)

Figur 2. *Uppgift 2.*

Uppgifterna var således upplagda i steg tänkta att möjliggöra en lärandeverksamhet där eleverna skulle engagera sig i ett teoretiskt arbete med strukturerna i bassystemet.

Analys av tecken på teoretiskt tänkande

För att identifiera och beskriva tecken på ett teoretiskt tänkande om bassystemet har datamaterialet analyserats kvalitativt i tre steg. Först tittade forskargruppen på filmmaterialet upprepade gånger. Följande analysfrågor användes: Vilka frågor ställer eleverna när de gör mätningarna? Hur använder eleverna lärandemodellerna? På vilket sätt beskriver eleverna bassystemet? Vilka matematiska förhållanden/aspekter kommer till uttryck i elevernas arbete med modellerna?

Det transkriberade materialet lästes upprepade gånger av forskargruppen för att i detalj kunna analysera vad eleverna sa och gjorde. Principerna för lärandeverksamhet användes i analysen på så sätt att forskargruppen fokuserade på elevernas frågor, prövande och argumentation med lärandemodellerna, bågmodellen och tabellen. För att identifiera elevernas handlingar, exempelvis hur de använde gester och lärandemodellerna var det ibland nödvändigt att titta på filmen igen. Tretton excerpt i det transkriberade materialet svarade mot analysfrågorna. Dessa lades in i ett dokument tillsammans med bilder från filmen och kompletterandes med sammanfattande rubriker samt beskrivningar som svarade mot analysfrågorna. Efter ett flertal omläsningar av de tretton excerpten och upprepade diskussioner i forskargruppen växte slutligen tre kategorier av tecken fram utifrån hur de hörde samman vad gällde matematiska förhållanden och aspekter. Kategorierna benämndes och sammanställdes i ett dokument.

Slutlig analys av transkripten gjordes med stöd av Davydovs definition av teoretiskt tänkande som något som kan komma till uttryck i form av reflektion, analys och planering samt reproduktion av grundläggande principer för ett specifikt ämnesinnehåll. Elevernas reflektion och prövande av muntliga och skriftliga algebraiska uttryck för relationer mellan enheterna (K0, K1, K2 osv) och positionerna i tabellen, analyserades som tecken på teoretiskt tänkande. Elevernas frågor bedömdes också som tecken på teoretiskt tänkande.

Resultat

I resultatet presenteras tre kategorier av tecken på teoretiskt tänkande om bassystemet, som kommer till uttryck i elevernas resonemang och arbete med lärandemodellerna: (a) *basens funktion för det värde som siffrorna anger i talet*, (b) *positionsväxling* och (c) *entalet som ett av en kvantitet*. Inom varje kategori redovisas ett antal tecken på teoretiskt tänkande. De exempel på vad eleverna säger som har haft en speciell betydelse för identifiering av tecken är markerade med fetad text i excerpten nedan. Elevernas namn är fingerade och namnen på forskargruppens deltagare är markerade med L1, L2, L3 respektive L4.

Kategori (a) - Basens funktion för det värde som siffrorna anger i talet

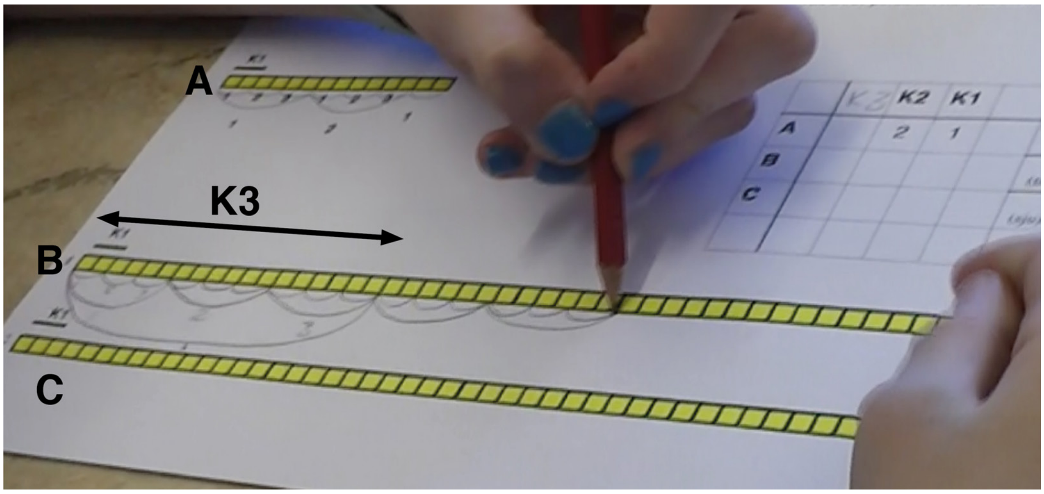
I denna kategori ingår fyra tecken på teoretiskt tänkande: (1) Eleverna gör en generalisering av relationen mellan bas och gruppering till successivt större enheter, (2) Eleverna generaliserar basens funktion att gruppera till samtliga enheter i talet, (3) Eleverna resonerar om oändlig utveckling av enheter åt både höger och vänster, samt (4) Eleverna transformerar bågmodellen och skapar mindre enheter genom division med bastalet.

Relationen mellan bas och gruppering till successivt större enheter

Ett tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när eleverna reflekterar och gör en generalisering över relationen mellan bas och gruppering till successivt större enheter i bas tre.

När eleverna ska mäta sträcka B (se figur 3), frågar Ulrika om det går att använda bågmodellen för att skapa en större enhet precis som vid mätningen av sträcka A (excerpt 1, rad 1). Hennes fråga och svepande gest över bågarna visar att hon reflekterar över att en ny, större enhet kan konstrueras genom gruppering med basen. Elsas grupp ”la till K3 också” (excerpt 1 rad 2), vilket visar att de gör en generalisering av hur nya och successivt större enheter kan skapas i bas tre. Modellen utvecklas genom att en ny, större båge som omfattar tre stycken K2 ritas i bågmodellen (se pil i figur 3). Eleverna uttrycker den generella relationen mellan bas tre och vad siffrorna i talet betyder genom ett muntligt och skriftligt algebraiskt uttryck: ”tre stycken K2:or blev en K3:a” (excerpt 1, rad 2 och 4 samt figur 4). Att den nya enheten namnges i stigande ordning till K3 och skrivs in i tabellhuvudet till vänster om K2 visar hur enheterna (K1, K2 och K3) relateras till positioner i talet (se figur 4).

Ulrikas beskrivning ”om man tar in dom här till en så kan man ju räkna att det blir som en etta, alltså en K3 eller nått…” (excerpt 1 rad 3) visar att hon gör en generalisering av att den nya enheten K3 symboliseras med siffran ett i talet.



Figur 3. *Elsas grupp visar hur en ny enhet, K3 består av tre K2.*

Excerpt 1

1. Ulrika: **Kan man göra såna här stora** [gör en svepande rörelse över fler K1:or] **som här?** [pekar på sträcka A där K2 som motsvarar längden av tre K1]

………

2. Elsa: **Vi la till K3:or också och då tänkte vi att tre stycken K2:or blev en K3:a.**

……..

3. Ulrika: Vi har ju gjort nästan likadant. Personen kan ju inte räkna mer än till hit [pekar efter den tredje K2-bågen]. **Men om man tar in dom här till en så kan man ju räkna att det blir som en etta, alltså en K3, eller nå …** Jag menar att de inte kan räkna till mer än tre, alltså måste man ha något annat att få dom att räkna till, som de har gjort här [pekar på bågarna under sträcka A]. De har satt in tre i en för att man ska kunna räkna till mer. Så

sätter man in den här för att kunna räkna längre.

....

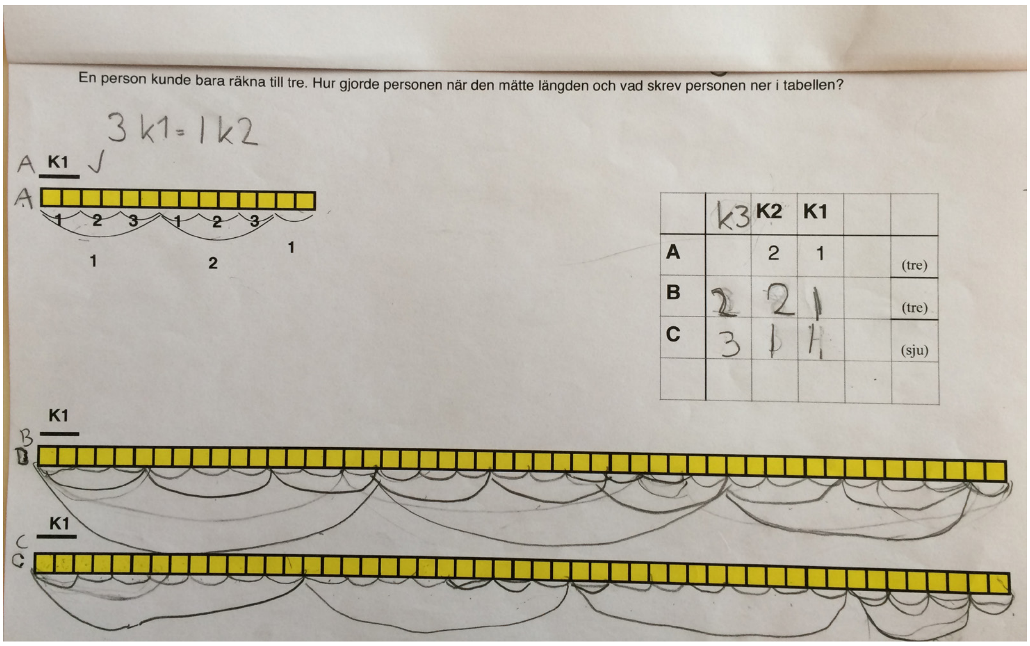
4. Ester: Äum... jag tänkte just på det Ulrika sa, att tre stycken K2 är en K3 [pekar med pennan längs de tre första K2- bågarna] en, två, tre. (se fig. 3)

Dessa exempel visar på ett teoretiskt tänkande med en början i att Ulrika ställer en reflekterande fråga eller hypotes över hur principen för bassystemet skulle kunna användas för att skapa en större enhet. Eleverna transformerar modellen från att bara gälla för enheterna E1 och E2 så att den gäller för den större enheten K3 genom att generalisera relationen mellan bas och successivt större enheter. Detta kommer till uttryck med bågmodellen och muntliga algebraiska uttryck.

Gruppering görs med samma bas till samtliga enheter i talet

Ett annat tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när eleverna reflekterar, analyserar och gör generaliseringar över att samma bas används vid gruppering till samtliga enheter i ett tal.

När sträcka C ska mätas anger några av eleverna längden till 3 4 (tre, fyra), vilket är korrekt. Sedan ändrar de sig till 3 1 1 (tre, ett, ett) eftersom några kamrater skrivit så (se figur 4). Detta startar en process där eleverna kontrollerar och diskuterar basens funktion genom att använda bågmodellen. Med siffran 3 i talet 3 1 1 avser eleverna tre stycken K2 i sjubassystemet, efterföljande siffra ett (1) avser en K2 i trebassystemet och den sista ettan i talet avser en K1. Eleverna tror således att enheter från olika baser, i det här fallet bas tre och sju, kan adderas för att ange sträckans längd.



Figur 4. Eleverna bygger ut bågmodellen och tabellen med K3.

Några andra elever argumenterar för att det inte är korrekt att skriva 3 1 1 (tre, ett, ett) eftersom siffror i ett tal representerar enheter som är grupperade med samma bas. De gör en generalisering av relationen mellan gruppering av enheter och bas genom att relatera till att enheten K2 grupperas med bas sju vid mätning av sträcka C och med bas tre för sträcka A och B: ”på den sista behöver du ju sju, på de andra två behöver du tre.” (excerpt 2, rad 8). Eleverna transformerar därefter bågmodellen så att den gäller för bas sju. Detta kan ses som tecken på teoretiskt tänkande om den inre strukturen i bassystemet, det vill säga att samma bas användas vid gruppering till *samtliga* enheter i talet. Ulrikas förklaring ”det kan vara … hur mycket som helst som kallas K2” och Hans beskrivning av hur K2 bildas beroende av bas ”För att du kan räkna till olika mycket” (excerpt 2, rad 10) är ytterligare exempel på generalisering över att samma bas används vid gruppering till samtliga enheter i ett tal (se excerpt 2, rad 15).

Excerpt 2

1. Fredrik: Vi tänkte att man måste ha K1:or för att bygga K2:or och K2:or för att bygga K3.
2. L4: Okej, hur många K1 behövs för att bygga K2? En K2. [betonar ordet en]
3. Elsa: Sju.
4. L4: Sju stycken?
5. Fler elever säger tre.
6. Ulrika: Det beror på vilken!
7. Fler elever säger ja!
8. Hans: Det beror på vilken uppgift det är, på den sista behöver du ju sju, på de andra två behöver du tre.
9. L4: aha, varför då?
10. Hans: **För att du kan räkna till olika mycket.**
11. L4: Min följande fråga är: Är K2 den samma om vi kan räkna till tre eller till sju?
12. Fler elever svarar ja.
13. L1: Är alltså K2 samma längd?
14. Fler elever säger nej.
15. Ulrika: Fast jag tycker det. För man byter inte direkt namn på hur många det är. Om jag har en längd, alltså en K2 kanske, så är det en K2. Det är hur man räknar på sen, om jag kanske räknar två K2… det här är bara ett exempel … som en K3:a. Man byter inte namn på vilken, hur stor längd det är. **Om det kan vara… hur mycket som helst som kallas K2. Det är inte så att det blir något annat. Det beror på hur många man har i en. Jag kan ju bestämma att jag har sju K … eller typ tio K1:or i en K2:a.**

Fredrik argumenterar för att sträcka C inte kan anges som 3 1 1 i bas sju eftersom den då skulle vara väldigt lång (se excerpt 3). Eftersom siffran 3 i talet 3 1 1 betyder $3 \cdot 7^2 (3 \cdot 7 \cdot 7)$ betyder 3 1 1 i bas sju $3 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 3 \cdot 7 \cdot 7 + 7 + 1$ om man översätter längden till bas tio. Genom att referera till principerna för bassystemet motiverar han att tre K3 skulle ge ett *mycket* större tal än tre K2. Fredrik tar också hjälp av platserna i tabellen i sin argumentation (se figur 5).

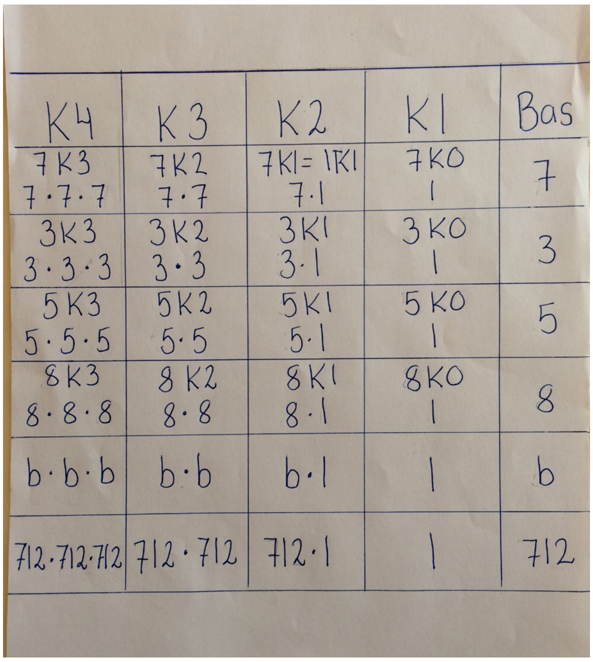
Excerpt 3

1. Fredrik: **För att K3:an, dom har liksom olika platser i tabellen va, en K3:a är ju liksom sju K2:or och det blir väldigt mycket längre än tre K2.** [betonar ordet väldigt]

Ovanstående exempel på tecken för teoretiskt tänkande om bassystemet kommer till utryck i form av transformationer av bågmodellen från att den gäller för bas tre till bas sju samt i form av muntliga algebraiska uttryck för relationen mellan K3 och K2.

Oändlig utveckling av enheter åt både höger och vänster

Ett tredje tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när eleverna tillsammans med läraren, men stöd av en tabell ritad på tavlan resonerar om hur nya enheter som är större och mindre, kan utvecklas i det oändliga (se figur 5).



K4	K3	K2	K1	Bas
7K3 7·7·7	7K2 7·7	7K1 = 1K1 7·1	7K0 1	7
3K3 3·3·3	3K2 3·3	3K1 3·1	3K0 1	3
5K3 5·5·5	5K2 5·5	5K1 5·1	5K0 1	5
8K3 8·8·8	8K2 8·8	8K1 8·1	8K0 1	8
b·b·b	b·b	b·1	1	b
712·712·712	712·712	712·1	1	712

Figur 5. *Rekonstruktion av tabell ritad på tavlan.*

När läraren och eleverna tillsammans fyller i en tabell som visar relationerna mellan enheterna K1, K2, K3 och K4 i olika baser (se figur 5), frågar Ulrika om man kan ”fortsätta hur långt som helst” åt vänster (excerpt 4, rad 1). Hon jämför med tiobassystemet och förklarar att det kommer ”någonting” efter tusentalet (excerpt 4, rad 3). Detta kan ses som tecken på ett teoretiskt tänkande eftersom hon beskriver en grundläggande struktur för bassystemet där nya enheter tar i anspråk i en oändlig utveckling åt vänster och att detta gäller för alla baser.

Excerpt 4

1. Ulrika: **Skulle man kunna fortsätta med K5, alltså K6, K7 hur långt som helst?**
2. Elsa: Förra gången hade vi ju inte K4 som vi har skrivit på modelltavlan. Då hade vi inte K4, vad jag såg i alla fall, och det står inte med på den andra tabellen [syftar på tabellen i uppgiften] och jag tror att man kan fortsätta så långt, för det fanns ju minst K4 och nu har ju ni skrivit dit K4 efter en.
   ……
3. Ulrika: Jag tror det för efter tusental så kommer ju … nånting … jag vet inte riktigt … nånting kommer …

Läraren riktar elevernas uppmärksamhet mot spalten för K1 i tabellen som först är tom och frågar eleverna vad K1, i bas sju är (se figur 5). Eleverna diskuterar hur K1 bygger på en enhet till höger om K1 som inte finns med i tabellen. Ulrika använder namnet K0 för denna enhet ”det som är innan K1” (excerpt 5, rad 2 och 4). Elsa vidareutvecklar Ulrikas uttalande genom att föreslå att om det finns K0 borde det finnas ”K-ett-minus” (excerpt 5, rad 6), vilket i tiobassystemet skulle motsvara hundradelar. Elsa reflekterar därmed över hur storleken på enheterna minskar successivt åt höger i bassystemet.

Elsa gör en jämförelse med utvecklingen till vänster i positionssystemet och söker där igenom ett sätt att uttrycka den oändliga utvecklingen av mindre enheter. Hennes fråga efter det största talet som finns visar att hon söker efter ett sätt att beskriva den oändliga utvecklingen av allt mindre enheter genom att använda den motsatta utvecklingen av successivt större enheter. Eftersom Elsa först förklarar att ”det bara fortsätter” (excerpt 5, rad 7) kan elevernas användning av det specifika talet ”googolplex” (excerpt 5, rad 9) tolkas som ett uttryck för att de avser en oändlig utveckling av allt mindre enheter, åt höger i positionssystemet.

Excerpt 5

1. L4: Vad är K0 i så fall?
2. Ulrika: **Det är innan K1.**
3. L4: Va?
4. Ulrika: Det är det som är innan K1.
5. L4: Innan K1. Du tänker att man skulle ha något här? [pekar till höger om spalten för K1]
6. Elsa: Äää…asså…det här var ganska konstigt…det är typ … **om det finns K0 så borde det ju finnas K-ett- minus.**

……

7. Elsa: Ja, att det kan finnas från … jag vet inte … från innan … asså från första … Det kanske blir lite svårt då … men det kommer ju att finnas … äää … asså **om man kommer flera** … det finns ju … det är ju som att alla … **jag vet inte vad det högsta talet är direkt men det finns ju K på det där högsta talet** … K … kanske … vad är högsta talet, jag vet inte? Vilket

är det högsta som finns, liksom?

8. Love: En googolplex.. [Några elever fnissar.]

……

9. Elsa: Ja, kanske en googo… Nej! en K- googolplex.. [skratt] Det är ju lite konstigt att det bara fortsätter.

Eleverna reflekterar också över hur allt mindre enheter utvecklas enligt ett generellt system där basen bestämmer vad siffrorna betyder i talet beroende av vilken position de står på. När eleverna ska ange längden av G (se figur 6), reflekterar de först över hur K1 byggs upp av ett antal Ko för att sedan gå vidare med resonemang om hur Ko, det vill säga den första positionen till höger om radixpunkten, är uppbyggd av ett antal ”K-minusett”. Elsa säger ”det beror på vilket bassystem” (excerpt 6, rad 1), vilket innebär att hon vet att hon behöver veta basen eftersom den styr relationen mellan K1 och Ko.

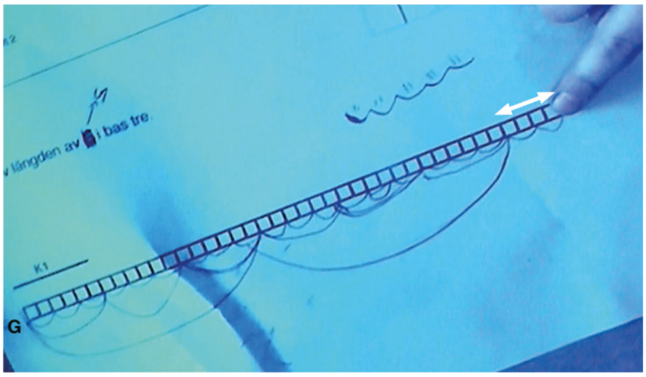
Excerpt 6

1. Elsa: **Det beror på vilket bassystem …**
2. L4: Vi pratar trebassystem.
3. L2: Trebas.
4. Elsa: Jaha, okej, tre.

När Elsa får information om att det är bas tre som gäller, använder hon den informationen för att beskriva att tre ”K-minus-ett” motsvarar Ko. Elsa använder således kunskapen om den generella relationen mellan entalet och den mindre enheten som har sin position till höger om radixpunkten i ett tal.

Mindre enheter skapas genom division med bastalet

Ett fjärde tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när eleverna transformerar bågmodellen så att den kan användas för att uttrycka en enhet som är mindre än entalet K1, vilken de kallar Ko.



Figur 6. *Mindre enheter skapas genom division med bastalet.*

Eftersom K1 är sex rutor lång och det inte finns någon enhet som passar att mäta den sista biten med (se figur 6), uppstår ett problem som leder till att eleverna analyserar och reflekterar över att ”det blev annat” (excerpt 7, rad 3). Behovet av en ny enhet leder till att eleverna analyserar relationen mellan entalet K1 och en mindre enhet, vilken konstrueras genom division med bastalet.

Excerpt 7

1. Fredrik: Det fanns fyra över så det blev ...
2. Sara: Alltså fyra rutor ...
3. Fredrik: Ja fyra rutor, **så det blev annat ...**

Till uppgiften att mäta sträcka G finns en tabell där enheterna K1 och K2 är skrivna i tabellhuvudet (se figur 9). Eleverna döper den nya, mindre enheten till Ko och skriver Ko i tabellhuvudet. Jesper kontrollerar att Ko har längden två rutor (se excerpt 8).

Excerpt 8

1. Jesper: **Kolla för Ko, tror jag, är två såna här rutor för det finns det tre på en sån här sexa.**
2. L2: Det finns det tre på en sexa, hur menar han då?
3. Jesper: Ja, men alltså på sex rutor då är det tre stycken såna här...

Eleverna reflekterar över och kontrollerar hur basen kan användas för att dividera entalet K1 till en mindre enhet, Ko. Relationen mellan entalet och de påföljande mindre enheterna, i det här fallet ”tretalet”, motsvarande tiondelen i bas tio, är en grundläggande egenskap för bassystemet. Eleverna reproducerar på så sätt den generella relationen mellan entalet och enheten till höger om radixpunkten, det vill säga att mindre enheter skapas genom division med bastalet. Detta görs med stöd av bågmodellen och tabellen (se figur 9).

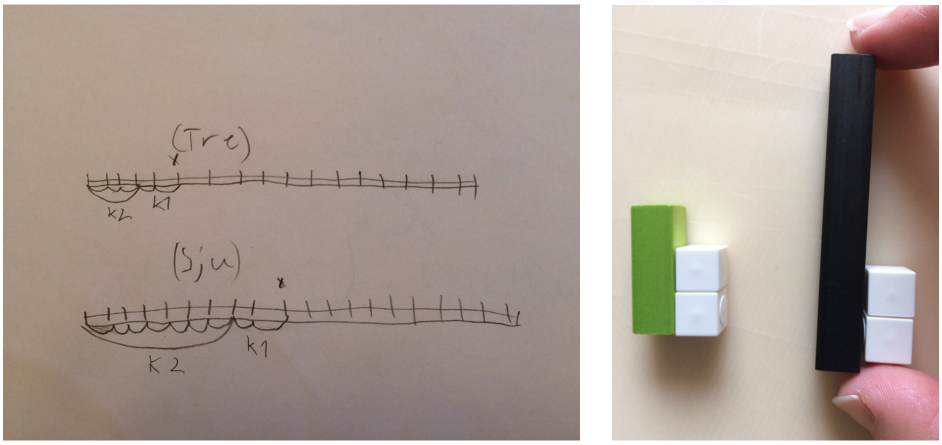
Kategori (b) - Positionsväxling

I denna kategori ingår två tecken på elevernas teoretiskt tänkande: (1) Eleverna kontrollerar och reflekterar över hur en ny position tas i anspråk när basen är nådd, samt (2) Eleverna gör en generalisering av att positionsväxlingen, görs vid bastalet.

En ny position tas i anspråk när basen är nådd

Ett tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när eleverna kontrollerar och reflekterar över hur en ny position tas i anspråk när basen är nådd.

När eleverna ska förklara varför uttrycken $1_{(sju)} = 1_{(tre)}$ och $1\ 2_{(sju)} > 1\ 2_{(tre)}$ stämmer överför de den generella strukturen för bassystemet till fler olika modeller (se figur 7 och 8). Genom att använda basen bygger de ”tretalet” respektive ”sjutalet” med tre respektive sju ental. Därmed synliggör de att basen måste vara nådd innan en ny position tas i anspråk.

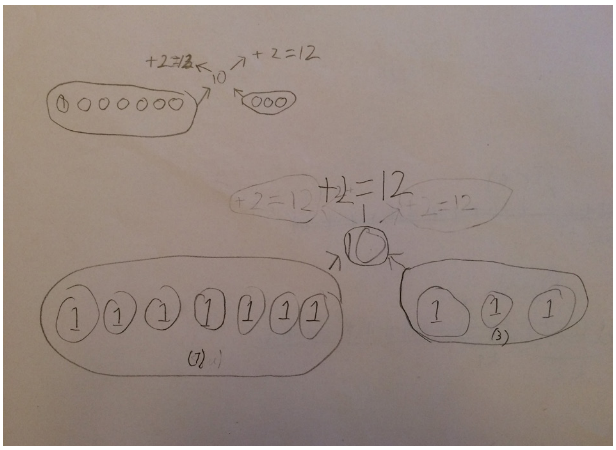


Figur 7. *Lärandemodeller för att visa 1 2 (ett, två) i olika baser.*

Eftersom eleverna inte har ord för den större enheten K2 så kallar de den ibland för ”tiotal”. Loves beskrivning av att ”man kommer upp till sju i sjubassystemet” och hans bild (se figur 8) samt förklaring att det är ”mer … i sjuans bassystem än i treans” (excerpt 9, rad 1 och 2) visar ett teoretiskt tänkande om att växlingen till en större enhet sker när basen är nådd. Love använder både bågmodellen, Cuisenairestavar och en egen ritad modell för att utforska och beskriva relationen mellan entalet och nästkommande position (se figur 7 och 8).

Excerpt 9

1. Love: **Ettorna är ju alltid lika mycket alltså** [pekar på entalen som är grupperade sju stycken i cirkeln]. **Jag tänker att när man kommer upp till sju i sjubassystemet så skulle det bli ett tiotal och sen plussar man på två**, är det två så det blir tolv [pekar där han skrivit på bilden (se figur 8)].
2. Love: Och om man skulle ta tre stycken, enligt ett trebassystem [pekar på cirkeln där tre ettor är inringade] så skulle det bli tio också och sen så blir det samma sak här uppe. **Fast då är det mer** … mer … om det här är kronor … **i sjuans bassystem än i treans** … [pekar på de inringade ettorna på bilden (se figur 8)]



Figur 8. *Loves ritning.*

Elevernas utforskande och kontroll av hur en ny position tas i anspråk när basen är nådd utgör ett återskapande av bassystemet på så sätt att en ny enhet definieras, i olika baser. Med stöd av Davydovs beskrivning av teoretiskt tänkande som ett återskapande av grundläggande principer kan detta bedömas som ett teoretiskt tänkande om bassystemet.

Positionsväxling görs vid bastalet

Ytterligare ett tecken på teoretiskt tänkande i relation till kategorin *positionsväxling* kommer till uttryck när eleverna gör en generalisering av att positionsväxlingen, görs vid bastalet när man räknar.

Elsa kontrollerar kamraternas förslag att blanda enheter från bas tre och sju genom att med stöd av bågmodellen visa att det inte går att ”lägga över” (excerpt 10, rad 1) till nästa position direkt efter tre, om man räknar i bas sju. Ivar gör jämförelsen med hur man räknar i tiobassystemet för att förklara att man inte kan göra övergången vid tre om det är bas sju som gäller. Eftersom han inte har något ord för K2 i bas sju säger han ”... om man räknar till sju så skulle man få ett tiotal ...” (excerpt 10, rad 6).

Excerpt 10

1. Elsa: Det går ju inte! [med höjd röst] **Alltså om man har tre i sju så kan man inte lägga över det till ... för det är ju inga ...**
2. Ivar: Alltså om man har sjuans bassystem och sen så räknar man till sju och så får man tio och räknar man till tre så får man tjugo. Det är inte rätt, det är konstigt ...
3. L1: Hur tänkte du där? Kan du säga det igen. I sjuans bassystem menar du att man räknar upp till sju men hur menar du att man får tio? Hur menar du då?
4. Ivar: Vi har ju tians bassystem ...
5. L1: Vill du jämföra? Ja, för vi har ju tio i bassystemet, och sen då?
6. Ivar: Jag tänkte att man kanske ... **om man räknar till sju så skulle man få ett tiotal ...**

Detta resonemang visar hur Elsa och Ivar med stöd av bågmodellen utvecklar en generalisering av att det sker en övergång till en ny enhet vid bastalet, vilket är en grundläggande egenskap för bassystemet.

Kategori (c) - Entalet som ett av en kvantitet

I denna kategori ingår tre tecken på elevernas teoretiska tänkande: (1) Eleverna reflekterar över hur entalet byggs av mindre enheter, till antal bestämt av bastalet, (2) Eleverna reflekterar över att position ett alltid är lika med ett (1) och anger antal ental, (3) Eleverna använder radixpunkten för att markera entalets position.

Entalet byggs av ett antal mindre enheter, till antal bestämt av bastalet

Det första tecknet i den här kategorin kommer till uttryck när eleverna reflekterar över hur entalet byggs av ett antal mindre enheter, till antal bestämt av bastalet.

I följande exempel resonerar eleverna om hur mindre enheter anger ett antal bråkdelar av entalet. Tillsammans med läraren analyserar eleverna hur olika enheter relaterar till varandra med hjälp av den stora tabellen på tavlan (se figur 5). Jesper frågar vad K0 ska vara ”om K1 är ett”(excerpt 11, rad 1). Frågan leder till en diskussion om vad K0 ska vara om K1 är ett och eleverna försöker hitta en multiplikation med basen sju som ger produkten 1. De inser att det inte kan vara noll eftersom ”om man typ tar en miljard gånger noll så blir det ändå noll” (excerpt 11, rad 5).

Excerpt 11

1. Jesper: **Vad ska K0 vara om K1 är ett?**
2. Ivar: Sju nollor kan väl inte bli ett?
3. Ulrika: Men alltså…
4. L1: Sju nollor kan inte bli ett, nej…
5. Ivar: **Så oavsett om man typ tar en miljard gånger noll så blir det ändå noll.**
6. L1: Det är så du tänker. Det blir ett problem där tänker du?
7. Sara: **Jag tycker att det ska vara noll komma ett.**

Resonemanget definieras som ett teoretiskt tänkande om basens funktion för relationen mellan entalet och den mindre enheten till höger om radixpunkten. Saras förslag att K0 är 0,1 analyseras som ett tecken på teoretiskt tänkande om att entalet i alla baser är uppbyggt av ett antal mindre enheter, till antal bestämt av bastalet. Sara anger talet 0,1 som ett uttryck för en mindre enhet.

Position ett är alltid lika med ett (1) och anger antal ental

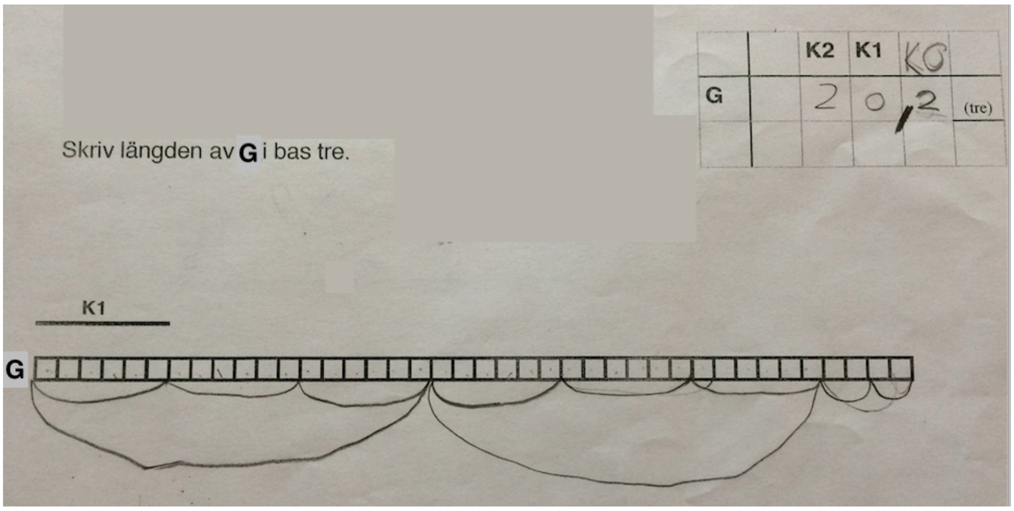
Ett annat tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när eleverna reflekterar över att position ett alltid är lika med ett (1) och anger antal ental.

Eleverna jämför talet 1 2 (ett, två) i bas tre och sju och förklarar att ”Ettorna är ju alltid lika mycket” (excerpt 9, rad 1). Eleverna ritar en bild över hur ettorna i talen motsvaras av olika många ental och Love reflekterar över att detta förhållande bestäms av vilken bas som gäller (se figur 8 och excerpt 9, rad 2). Bilden visar hur många ental som används för att växla in positionen till vänster om entalet. Love ringar in dessa ental och anger basen längst ner i ringen. På så vis prövar eleverna den generella strukturen som gäller för relationen mellan entalet och den större enheten vid bas sju.

Radixpunkten används för att markera entalets position

Ett tredje tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när läraren och eleverna diskuterar var radixpunkten ska placeras i talet.

När eleverna ska ange längden på sträcka G (se figur 9) uppstår först inget behov av en radixpunkt eftersom talet är inskrivet i en tabell där enheterna är angivna i tabellhuvudet. Eleverna diskuterar radixpunktens placering först efter att läraren frågar om det skulle behövas ”något” i talet för att man ska förstå att den sista 2:an inte är ett ental. På denna fråga svarar eleverna att det behövs ett decimalkomma. När läraren frågar om det ska placeras efter den första svarar eleverna nej och när läraren frågar om det ska placeras efter nollan svarar eleverna ja.



Figur 9. *Radixpunkten används för att markera entalets position.*

Sammanvägt visar arbetet med bågmodellen tecknen på teoretiskt tänkande om bassystemet i form av hur entalet kan urskiljas som ett av en specifik kvantitet, uppbyggt av ett antal mindre enheter som anges till antal på höger sida om entalet.

Diskussion

Studiens är genomförd med utgångspunkt från Davydovs (2008) definition av teoretiskt tänkande och resultatet begränsas därmed av denna definition. Tecken på teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet kommer till uttryck när eleverna arbetar med att mäta olika sträckor i olika baser. Utifrån hur dessa tecken liknar varandra vad gäller matematiska förhållanden och aspekter, framträder tre kategorier av tecken: (a) basens funktion för det värde som siffrorna anger i talet, (b) positionsväxling, och (c) entalet som ett av en kvantitet. Genom kategoriseringen beskrivs det matematiska innehållet i elevernas teoretiska tänkande. De tre kategorierna överensstämmer på många sätt med de strukturella aspekter i bassystemet som elever sannolikt behöver urskilja, redovisade ovan.

I det följande diskuterar vi hur resultatet kan ställas i relation till tidigare forskning om vad som är betydelsebärande för att elever ska förstå decimaltal. För att underlätta läsningen är tecknen i det följande kursiverade.

En fördjupad beskrivning av elevers förståelse

Resultatet kan bidra till att fördjupa beskrivningar av hur elever förstår tal. Vi menar att tecken på teoretiskt tänkande om bassystemet kan komplettera forskning där svårigheter med decimaltal beskrivs som bristande förståelse av likheter och skillnader mellan naturliga och rationella tal (jfr Lortie-Forgues m.fl., 2015). I elevernas kollektiva arbete med lärandemodellerna framträder ett nätverk av tecken på teoretiskt tänkande som kan bidra till bilden av hur elever förstår tal. När eleverna exempelvis diskuterar relationerna mellan enheterna frågar Ulrika ”skulle man kunna fortsätta med K5, alltså K6, K7 hur långt som helst?”. Därefter gör eleverna en *generalisering av relationen mellan bas och gruppering till successivt större enheter*. De *resonerar om den oändliga utvecklingen av enheter också gäller åt höger i bassystemet*. Detta kommer till uttryck när Elsa konstaterar ”….om det finns K0 så borde det ju finnas K-ett-minus”. Ett annat tecken som ger exempel på hur elever kan förstå bassystemet är *elevernas reflektion över hur entalet byggs av mindre enheter till antal bestämt av bastalet.* Detta sker när eleverna konstaterar att K0 inte kan vara noll om K1 är ett, i sjubas, ”Så oavsett om man typ tar en miljard gånger noll så blir det ändå noll”. Dessa tre tecken indikerar att eleverna utvecklar en förståelse av naturliga och rationella tal som uppbyggda enligt samma struktur, vilket enligt Vamvakoussi & Vosniadou (2010) är en grund för förståelse av decimaltal.

Även *elevernas transformering av bågmodellen för att skapa mindre enheter* kan ge en kompletterande bild av hur elever kan förstå bassystemet som en generell struktur både till höger och vänster om radixpunkten. Med stöd av bågmodellen förklarar Jesper att K0, det vill säga enheten som motsvarar tiondelen i ett tiobassystem, är en tredjedel av entalet. Därmed rekonstruerar han strukturen för bassystemet ”Kolla för K0, tror jag, är två såna här rutor för det finns det tre på en sån här sexa”. Detta ses som ett teoretiskt tänkande om tal som kontinuerliga och nedbrytbara enheter vilket enligt Ni och Zhou (2005) beskrivs som en grund för att förstå decimaltal.

Det krävs ett tämligen omfattande arbete av eleverna för att utveckla generaliseringar av hur allt mindre enheter utvecklas i det oändliga. Detta väcker frågan om hur elever som vi undervisar förstår heltal, vad gäller inbyggda och generella strukturer. De svårigheter som enligt tidigare forskning uppstår, kanske beror på att eleverna inte har utvecklat förståelse för bassystemet som sådant, vilket är en förståelse som Vygotsky (1968) argumenterade för. Kanske beror svårigheterna snarare på en outvecklad förståelse för strukturer både till höger och vänster om radixpunkten, än på så kallad whole number bias (jfr Ni & Zhou, 2005)? Resultatet i form av tecken på elevers teoretiska tänkande om bassystemet kan ge nya dimensioner av hur elevers kunnande kan komma till uttryck men och bidra till nya frågor. Resultatet kan också användas som ett redskap i undervisningen för att studera och förstå elevers uppfattningar av strukturer i bassystemet.

Enheter och positioner

Begreppet enhet och hur enheter relaterar till positioner i bassystemet framträder särskilt i elevernas teoretiska tänkande om strukturer i bassystemet. Det teoretiska tänkandet växer fram på så sätt att eleverna först relaterar enheter till basen i form av grupperingar. Sedan utvecklar eleverna relationen mellan enheter och positioner i form av en *generalisering av att samma bas används vid alla positioner i talet.* Detta kommer till uttryck när eleverna undersöker om det går att använda enheter skapade från två olika baser för att mäta sträcka C. Under arbetet med bågmodellen utvecklar eleverna en *generalisering av att samma bas används vid alla positioner i talet*. Eleverna diskuterar vilken bas de ska använda vid grupperingarna till enheter som de behöver för att ange längden av sträcka C. Tecken på teoretiskt tänkande kommer till uttryck när Hans generaliserar: ”Det beror på vilken uppgift det är, på den sista behöver du ju sju, på de andra två behöver du tre”. Eleverna koordinerar enheterna i bas tre och sju samt antal av dessa enheter, vilket Peled och Awawdy-Shahbari (20009) beskriver som en viktig förståelse av decimaltal. Detta tecken på teoretiskt tänkande indikerar att eleverna först uppfattade enheterna som lösa bitar grupperade enligt olika baser. I stället för att utgå från principerna för bassystemet kombinerade eleverna enheterna ungefär som man gör då man mäter tid i sekunder och hundradels sekunder. Vi menar att beskrivningen av detta tecken, det vill säga att eleverna utvecklar *generaliseringar av att samma bas används vid alla positioner i talet*, kan ge stöd i analys av hur elever förstår strukturerna i bassystemet. Förstår de exempelvis tiondelar och hundradelar utifrån hur de relaterar till varandra och bas tio eller som bitar som adderas?

Chambris (2018) lyfter fram att elever behöver förstå begreppet ”numeration unit” (s 188) som ett generellt begrepp och inte begränsat till tiobas-bitar. Därför är elevernas förståelse av begreppet enhet särskilt viktig att bevaka. Elevernas *transformering av bågmodellen för att kunna skapa mindre enheter genom division med basen* och deras *reflektioner över hur entalet byggs av mindre enheter till antal bestämt av bastalet* kompletterar bilden av hur begreppet enhet kan förstås av elever. När tecknen kommer till uttryck framgår också att eleverna söker efter en generell benämning som fungerar för de olika enheterna. Det märks när Love *reflekterar över hur en ny position tas i anspråk när basen är nådd*. I avsaknad av ett namn på motsvarande tiotal i sjubassystemet använder han benämningen *tiotal*: ”Jag tänker att när man kommer upp till sju i sjubassystemet så skulle det bli ett tiotal”. Sannolikt skulle en generell benämning för de olika enheterna, exempelvis ”talenhet” bidra till att eleverna lättare kunde resonera om de generella strukturerna i bassystemet.

Resultatet ger anledning till fortsatt diskussion och frågor om vilket kunnande elever ges möjlighet att utveckla i den undervisning som planeras och genomförs i avsikt att utveckla elevernas kunnande om tal. Det som Davydov (2008) beskriver som ett empiriskt kunnande vilket relaterar till yttre strukturer för tal, exempelvis att ett tal består av ett antal ental, tiotal etc eller ett teoretiskt kunnande som relaterar till de inre strukturer som talet är uppbyggt av. Vad som är avgörande för iscensättning av en undervisning som ger eleverna möjlighet att utveckla teoretiskt tänkande om bassystemet behöver dock undersökas i vidare studier med fler elever, i olika årskurser.

Referenser

Bobos, G. & Sierpinska, A. (2017). Measurement Approach to Teaching Fractions: A Design Experiment in a Pre-service Course for Elementary Teachers. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, vol. 18, nr. 2, ss. 203–239.

Chaiklin, S. (2002). A developmental teaching approach to schooling. I G. Wells & G. Claxton (red.). *Learning for life in the 21st century.* Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 97, nr. 2, ss. 185–207.

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study.* New York: Nova Science Publishers, Inc. (Publicerades i original 1986)

Davydov, V.V., Gorbov, S.F., Mikulina, G.G. & Saveleva, O.V. (2012). *Matematika 2.* Moscow: VitaPress.

Dienes, Z. P. (1959). The teaching of mathematics-III: The growth of mathematical concepts in children through experience, *Educational Research*, vol. 2, nr. 1, ss. 9–28.

Eriksson, H. & Eriksson, I. (2016). Matematik som teoretiskt arbete – utveckling av matematiska modeller för rationella tal i årskurs 4. *Forskning om undervisning och lärande*, vol. 4, nr. 1, ss. 6–24.

Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en Learning study. I I. Carlgren (red.). *Undervisningsutvecklande forskning: exemplet Learning study.* ss. 61–84 Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Howe, R. (2015). The most important thing for your child to learn about arithmetic. I X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (red.). *Proceedings of the twenty-third ICMI study: Primary mathematics study on whole numbers*, ss. 107–114. China: University of Macao.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?, *Developmental Review,* vol. 38, ss. 201–221.

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, vol. 40, nr. 1, ss. 27–52.

Peled, I. & Awawdy-Shahbari, J. (2009). Journey to the past: Verifying and modifying the conceptual sources of decimal fraction knowledge, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, vol. 9, nr. 2, ss. 73–85.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, vol. 30, nr. 2, ss. 2–7.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, vol. 26, nr. 2, ss. 257–277.

Resnick, L.B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, nr. 1, ss. 8–27.

Resnick, I., Rinne, L., Barbieri, C. & Jordan, N. C. (2019). Children's reasoning about decimals and its relation to fraction learning and mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology,* vol. 111, nr. 4, ss. 604–618.

Sackur-Grisvard, C. & Leonard, F. (1985). Intermediate cognitive organization in the process of Learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, vol. 2, ss. 157–174.

Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education*, vol.19, nr. 1, ss. 19–43.

Slovin, H. & Dougherty, B. J. (2004). Children′s conceptual understanding of counting. I *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, ss. 209–216. Bergen: International Group for the Psychology of Mathematics.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy M. I. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, vol. 23, nr. 7, ss. 691–697.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers.* (Diss.) Melbourne: Department of Science and Mathematics Education. The University of Melbourne.

Tian, J. & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review*, vol. 30, nr. 2, ss. 351–372.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, vol. 28, nr. 2, ss. 181–209.

Van Verth, J.M. & Bishop, L. M. (2008). *Essential mathematics for games and interactive applications: A programmer's guide, Second Edition.* San Francisco: CRC Press.

Venenciano, L., Slovin, H. & Zenigami, F. (2015). Learning place value through a measurement context. I X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (red.). *Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 23. Primary Mathematics Study on Whole Number*, ss. 575–582. China: University of Macau

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press. (Original publicerat 1934)

Vygotsky, L. (2011). The dynamics of the schoolchild's mental development in relation to teaching and learning. *Journal of Cognitive Education and Psychology*. vol. 10, nr. 2. [Översättning av Alex Kozulin]

Zuckerman, G.A. & Obukhova, O.L. (2015). Developing writing competencies through education in elementary school. *Russian Education & Society*, vol. 57, nr. 9, ss. 794–815.