Vol 12, Nr 2, 2024

FORSKUL

FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

Tema:

Matematikinterventioner i förskola och förskoleklass

LÄRAR-stiftelsen

Skriften ges ut av Lärarstiftelsen i samarbete med Sveriges lärares vetenskapskapliga råd och Lärarförlaget.
Grafisk form: Ahead Publishing.
Kontakt med redaktionen sker genom info@forskul.se eller redaktionsekreterare Anna Sandström, anna.sandstrom@forskul.se.
Bidrag till kommande nummer är mycket välkomna! Se författarinstuktioner under Medverka.
Nästa nummer beräknas utkomma i oktober 2024.

Forskul indexeras av Directory of Open Access Journals (DOAJ), Norwegian Register for Scientific Journals (Norska listan), finska indexeringen över vetenskapliga tidskrifter (Publikationsforum, Juzo-ID 79722) och Crossref.

Forskning om undervisning och lärande, ISSN 2001-6131

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024

Innehåll

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 4–7
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Tema: Matematikinterventioner i förskola och förskoleklass

Gästredaktionell kommentar 2024:2

Camilla Björklund[1]* & Hanna Palmér[2]

[1] Göteborgs universitet

[2] Linnéuniversitetet

*Korresponderande författare:
Camilla Björklund
camilla.bjorklund@ped.gu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 4–7.
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23905
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Artiklarna i detta temanummer har ursprung i en workshop, som hölls 2023 med fokus på forskning om interventioner i och implementering av matematikundervisning i förskola och förskoleklass. Vid denna workshop träffades forskargrupper för erfarenhetsutbyte och diskussioner om metodologiska utmaningar (och möjligheter), samt om teoretiska dilemman i matematikdidaktisk forskning, som inkluderar interventioner och implementering. Samtidigt som det i de nordiska länderna finns mycket forskning som inkluderar interventioner och implementering av matematikundervisning i förskola och förskoleklass, är det en känd utmaning att positiva effekter från interventioner tenderar att ebba ut över tid och vid implementering kan det vara svårt att bibehålla de ursprungliga didaktiska intentionerna. Trots goda intentioner att utveckla praktiken fortsätter på så sätt undervisningen att genomföras på samma sätt som den tidigare har gjorts. Nyare forskning pekar dock på flera aspekter som inverkar på interventioners effekter på lång sikt och framgång i implementering, där inte minst lärarnas medverkan och påverkan på projektens metoder och genomförande spelar en viktig roll, något som kan sägas karakterisera praktiknära forskning (Century & Cassata, 2016, se även Eriksson, 2018). Utifrån detta är en gemensam utgångspunkt för de artiklar som ingår i detta temanummer att de studier som presenteras har genomförts i samarbete med verksamma förskollärare och lärare.

Att i forskning samarbeta med verksamma förskollärare och lärare medför metodologiska möjligheter, men även utmaningar och teoretiska dilemman. Till exempel har olika praktiknära ansatser olika för- och nackdelar gällande vem eller vilka som planerar och genomför undervisningen, metoder för hur undervisningen följs upp, metoder för att studera om och i så fall vilket lärande som sker samt metoder för att studera eller utvärdera om detta eventuella lärande beror på interventionen eller andra faktorer. Dessa utmaningar behöver studeras för att vi bättre ska förstå hur framgångsrika och hållbara interventioner kan utformas och implementeras. I temanumret finns artiklar som tar sig an dessa metodologiska och epistemologiska frågor och faller inom ramarna för praktiknära forskning, där särskild vikt läggs vid att forskningen ska ha relevans för förskolan eller förskoleklassens undervisningspraktik. En fråga som kan få betydelse för kunskapsbidragen från sådan forskning är vad som räknas som giltiga och pålitliga resultat. Vilka faktorer kan tänkas ha tillräcklig betydelse för att motivera en analys och behöver utfall alltid signifikansprövas? Eller med andra ord, *hur vet vi om och i så fall på vilket sätt* resultaten av forskningen har betydelse för utveckling av undervisningspraktiken? Praktiknära forskning ska vara lika vetenskapligt grundad, genomförd och rapporterad som vilken annan forskningsansats som helst, men *vad* är av relevans att analysera och redovisa när syftet med forskningen är att bidra till undervisningsutveckling?

Vi ser en utmaning i att bedriva praktiknära forskning som är relevant för de lärare, förskollärare och skolhuvudmän som ska bedriva utbildning på vetenskaplig grund, informerad av aktuell forskning, vilket kan ses i att artiklarna i temanumret är mycket empirinära, men tillämpar en mångfald teoretiska och metodologiska ansatser. I temanumret fördjupas metodologiska och teoretiska frågor med särskilt fokus på interventioner i och implementering av matematik¬undervisning i förskola och förskoleklass. Det övergripande syftet är att knyta forskning till verksamhetsutveckling och att bidra till förskola och förskoleklass på vetenskaplig grund, där både förskollärare och forskare deltar i kunskapsproduktionen.

I artikeln av **Maria Walla** och **Hanna Palmér** – *Utveckling av matematikundervisning som främjar likvärdighet i förskoleklass* – studeras designprinciper för att utforma en likvärdig matematikundervisning i förskoleklass. Likvärdighet beskrivs i artikeln som att alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Detta bör vara angeläget för all förskoleklassundervisning, där eleverna ofta representerar en bredd av olika tidigare erfarenheter och kompetenser inom matematikområdet. Genom interventionen, som har genomförts i nära samarbete mellan forskare och lärare, har designprinciper för en likvärdig matematikundervisning identifierats.

Camilla Björklund med flera beskriver i artikeln *Förskoleklasselevers användning av talstrukturer* hur sexåringar ser och förmår att använda talstrukturer för att bestämma antal. Denna förmåga studerades före och efter att eleverna hade deltagit i en intervention under ett läsår och jämfördes med elever som hade genomfört ordinarie matematikundervisning. Studien visar inte bara på positiva effekter av interventionen utan också på vilka sätt elevernas användning av talstrukturer kan ta sig uttryck. Resultaten bör kunna ha inverkan på hur lärare väljer ut vad den tidiga aritmetikundervisningen ska innefatta och vad eleverna behöver lära sig.

I likhet med Camilla Björklund med flera tar **Jorryt van Bommel** med flera, i artikeln *Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering,* ett tydligt elevperspektiv. Artikeln strävar efter att fördjupa kunskaperna om hur elever resonerar om matematikinnehållet division i problemlösning och problemformulering, och på vilket sätt det kommer till uttryck i hur de använder olika strategier för att lösa uppgifterna. Elevers problemlösningsstrategier och hur dessa kan utgöra utgångspunkt i problemformulering har stor relevans för hur vi tolkar och arbetar med förskoleklasselevers matematikfärdigheter.

I artikeln *Matematiska och etiska resonemang i förskolan – didaktisk modellering som intervention*, av **Maria Hedefalk** med flera, utmanas vår föreställning om vad matematikundervisning bör innehålla. Detta görs genom en intervention i en förskola där delning – ett typiskt matematiskt innehåll i förskolans matematik – problematiseras i ett etiskt ljus. Förmågan att resonera om reella problem, som aktualiseras inte minst i ett hållbarhetsperspektiv, är en aspekt av undervisningens syfte att skapa agens i lärande hos barnen som arbetet med interventionen kan bidra med ny kunskap om.

Den sista artikeln av **Anna-Lena Ekdahl** och **Birgitta Lundberg** – *Att utveckla undervisning om tal och talrelationer i förskoleklass* – presenterar en intervention som berör tal och talrelationer i förskoleklass. Fokus är till skillnad från många andra studier inriktad på modellen för interventionen där nyckelkomponenter för undervisningsutveckling identifieras. Till exempel utgör de reflektionsunderlag som utvecklades i studien samt vetenskapligt förankrade aktiviteter sådana nyckelkomponenter. Dessa nyckelkomponenter kan utgöra del av planering av framtida interventioner och bidrar på så sätt inte bara till utveckling av undervisningen om tal utan också till fördjupad förståelse för hur implementering kan göras hållbar och långsiktig.

Temanumret avslutas med en kommentar av tidigare direktören för Skolforskningsinstitutet **Camilo von Greiff**, som lyfter upp *Förskolan och förskoleklass i blickfånget - tankar och spaningar om ett forskningsfält på stark frammarsch* till diskussion. Han ställer bland annat frågan om den praktiknära forskningen riskerar att få karaktären av isolerade öar. Vi ser möjligheten till workshops likt den där initiativet till detta temanummer togs som en del av motverkan av den risken. Forskningsfältet matematikdidaktik i förskola och förskoleklass är än så länge relativt begränsat och kan tendera att bli en försvinnande droppe i det stora matematikdidaktiska forskningshavet. Avgränsas fältet dessutom till praktiknära, med fokus på interventioner och implementering, blir droppen än mindre. Vi tror även att temanumret som sådant, och då som helhet, är ytterligare en viktig del i motverkan av denna risk. Visserligen kan ett temanummer, där olika forskargrupper presenterar resultat från varierande projekt och med olika frågeställningar, läsas som separata bidrag. Vi vill däremot framhålla att temanummer av detta slag är av stor vikt för att driva forskningsfältet *tidig matematikundervisning* framåt, i och med att det då samlas bidrag till detta fält i ett gemensamt sammanhang, och vill därför uppmana dig som läsare att läsa numret som en bok med kapitel, inte som separata artiklar. När du lägger ifrån dig temanumret har du förhoppningsvis upptäckt att de olika bidragen tillsammans bygger ett pussel, där det fortfarande saknas många bitar, men bitarna vi har passar ihop och tillsammans säger de mer än som enskilda bitar.

Avslutningsvis vill vi tacka alla artikelförfattare, alla förskollärare, barn och elever som har varit med i studierna, alla granskare som har bidragit med värdefull input, Camilo för synliggörandet av hur fältet kan positionera sig ytterligare samt till redaktionen för Forskul som har givit oss möjligheten att ta fram detta temanummer.

Referenser

Century, J. & Cassata, A. (2016). Implementation research: Finding common ground on What, How, Why, Where, and Who. *Review of Research in Education*, *40*, 169–215. https://doi.org/10.3102/0091732X16665332

Eriksson, I. (2018). Lärares medverkan i praktiknära forskning: Förutsättningar och hinder. *Utbildning & Lärande*, *12*(1), 27–40.

Författarpresentationer

Camilla Björklund
Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Göteborgs universitet och forskar om matematiklärande i förskola och skolans tidiga år i praktiknära forsknings- och utvecklingsprojekt.

Hanna Palmér
Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och tidig matematikundervisning.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, 8–30
Tema: Matematikinterventioner i förskola och förskoleklass

Utveckling av matematikundervisning som främjar likvärdighet i förskoleklass

Orginalartikel

Maria Walla[1]* & Hanna Palmér[2]

[1] Högskolan Dalarna

[2] Linnéuniversitetet

*Korresponderande författare:
Maria Walla
wmr@du.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23887
SSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Sammanfattning

I den här artikeln presenteras en designstudie med målet att utforma en likvärdig matematikundervisning i förskoleklass, i betydelsen att alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Designstudien är genomförd i en svensk kontext och tar utgångspunkt i den obligatoriska kartläggningen vid skolstart. Studien genomfördes av en förskoleklasslärare och två forskare, som tillsammans planerade, genomförde och utvärderade matematikundervisning. Vid studiens start identifierades tre utvecklingsområden: instruktion, elevlösningar och talutrymme. För att möta dessa utvecklingsområden introducerades tre designprinciper: låg tröskel, öppna matematikuppgifter och resonemangsfrämjande repliker. I artikeln presenteras hur dessa designprinciper påverkade utvecklingsområdena, i linje med designstudiens mål. Sammantaget visar resultaten på en utveckling av en matematikundervisning som möter elevers olikheter.

Nyckelord: tidig matematikundervisning, designforskning, förskoleklass, likvärdighet, designprinciper

Abstract

This article presents an educational design research study aiming to develop preschool class mathematics in line with equity. In the study, equity is defined as all students having access to mathematical content and opportunity to develop prosperous positions in and towards the subject. The design of the education was based on the mandatory assessment at the start of preschool class. One preschool class teacher and two researchers planned, carried out, and evaluated the mathematics education together. At the start of the study, three areas of development were identified: instruction, student solutions, and students' verbal contributions. To address these areas of development, three design principles were introduced: low threshold, open-ended mathematical tasks, and prompts for reasoning. This article presents how these design principles developed the areas of development, in line with the goals of the study, that is, mathematics education that meet the diverse needs of students.

Keywords: Early mathematics, Educational design research, Preschool class, Equity, Design Principles forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30 Maria Walla & Hanna Palmér

Introduktion

I denna artikel presenteras en designstudie med fokus på matematikundervisning i förskoleklass. Förskoleklassen är en skolform som ska fungera som en bro mellan förskola och grundskola, där kreativitet och lek framhålls som centralt (Ackesjö & Persson, 2019). Designstudien genomfördes i samarbete mellan en förskoleklasslärare och två forskare med utgångspunkt i den obligatoriska kartläggning, som sedan 2019, har genomförts vid skolstart i alla förskoleklasser. I jämförelse med andra nordiska länder är Sverige inte unikt vad gäller tidig kartläggning. I såväl Norge (Utdanningsdirektoratet, 2017) som Finland (Aunio m.fl., 2006) genomförs kartläggning av matematikkunskaper hos elever i samma åldersgrupp. Även internationellt ökar kartläggning av yngre elevers matematikkunskaper och därmed även mängden kartläggningsmaterial avsedda för yngre elever. Denna ökning förklaras med ett ökat intresse för tidig matematikundervisning eftersom tidiga insatser visats förebygga senare svårigheter (Dong m.fl., 2021).

Syftet med den svenska kartläggningen av alla elever i förskoleklass är att bidra till skolans kompensatoriska uppdrag och främja likvärdighet, genom att hjälpa lärare att identifiera elever i behov av extra stöd, extra anpassningar eller extra utmaningar. Kartläggningen ska fungera som ett stöd för lärarnas fortsatta undervisning, både gällande vilket matematiskt innehåll som ska fokuseras på i undervisningen samt hur undervisningen ska anpassas utifrån elevernas resultat (Skolverket, 2023). I en tidigare studie där lärare i förskoleklass har intervjuats om kartläggningen berättar lärare hur de, genom kartläggningen, får ny information om elever, information som de tidigare inte har haft tillgång till. De säger att denna nya information medför att de behöver anpassa både val av uppgifter och förväntningar till olika elever, utifrån resultatet av kartläggningen. Hur denna anpassning av undervisningen ska genomföras uttrycker de som en utmaning där det inte är självklart hur den matematikundervisning som utformas efter kartläggningen ska designas för att möta de olikheter i elevgruppen som kartläggningen synliggör (Walla, 2024).

Det är denna utmaning som utgör utgångspunkt för den designstudie som presenteras i denna artikel. Målet med studien var att designa en matematikundervisning där alla elever, oavsett resultat på det obligatoriska kartläggningsmaterialet, skulle få likvärdig tillgång till ett matematiskt innehåll samt möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Denna målsättning utgick ifrån forskning om likvärdig undervisning i heterogena elevgrupper (Schoenfeld, 2014; Boaler, 2008). I en likvärdig matematikundervisning i heterogena elevgrupper har alla elever likvärdig tillgång till det matematiska innehållet, vilket av Schoenfeld (2023) beskrivs som i vilken utsträckning klassrumsaktiviteter inbjuder till och stödjer alla elevers aktiva engagemang i det matematiska innehållet. Även när det finns produktiva aktiviteter och rika diskussioner i ett klassrum behöver det inte betyda att undervisningen är likvärdig, eftersom det kan finnas elever i klassrummet som inte har möjlighet att delta i dessa aktiviteter och diskussioner (Cohen & Lotan, 1997; Schoenfeld, 2014). Att alla elever har möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet innebär en relationell likvärdighet vilket enligt Boaler (2008) handlar om relationer i klassrummet, till exempel att elever och lärare behandlar varandra med respekt, att elever tar ansvar för sitt eget och andras lärande och att elevers olika svar och förklaringar beaktas som en tillgång i matematikklassrummet (Boaler, 2006, 2008; Xenofontos, 2019).

Utifrån ovanstående har följande forskningsfråga fokuserats i designstudien: Vilka designprinciper främjar en matematikundervisning i förskoleklass där alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet?

Tidigare forskning

I detta avsnitt presenteras tidigare forskning kopplat till tre olika områden: först beskrivs svensk forskning om matematikundervisning i förskoleklass, därefter nationell och internationell forskning om matematikundervisning som möter elevers olikheter och avslutningsvis den forskning som har utgjort utgångspunkt för utvecklingen av matematikundervisning i designstudien.

Matematikundervisning i förskoleklass

I tidigare studier, där svenska förskoleklassens matematikundervisning har studerats, har framför allt taluppfattning och problemlösning varit i fokus. Men det finns också studier där förskoleklassens matematikundervisning har jämförts med matematikundervisningen i årskurs 1. I en observationsstudie har Arnell (2021) jämfört elevers möten med matematik i förskoleklass och årskurs 1. Studiens resultat visar att, även om elevers möten med matematik ser olika ut inom förskoleklass respektive skolår 1, har elever generellt större handlingsfrihet i förskoleklassen, då mötet med matematik i årskurs 1 är mer formellt. Dessa skillnader kan enligt Arnell ge negativa konsekvenser för kontinuiteten i elevernas tidiga matematiklärande där eleverna inte känner igen sig i den matematikundervisning de möter i skolår 1.

Andra studier, där förskoleklassens matematikundervisning har studerats, visar att aktiviteter i syfte att främja elevers matematikfärdigheter redan i förskoleklass är av värde för deras fortsatta lärande i matematik och i andra ämnen. Sterner med flera (2019), Vennberg (2020) samt Sterner med flera (2023) har genomfört interventioner i förskoleklasser, där de har utgått ifrån undervisningsmaterialet ”Tänka, resonera och räkna i förskoleklass” (TRR), samt tillhörande fortbildningsmaterial (Sterner m.fl., 2014), och undersökt effekten av tidigt fokus på matematikfärdigheter. Studierna av Vennberg och Norqvist (2018) och Vennberg (2020) visar att ett systematiskt arbete med matematikundervisningen enligt TRR kan förbättra elevers långsiktiga prestationer i matematik, även lågpresterande elevers prestationer. En småskalig interventionsstudie av Sterner med flera (2019) visar att matematikundervisning enligt TRR har positiva effekter på elevers taluppfattning. När samma studie genomfördes i större skala blev effekterna större, något som förklaras genom att den storskaliga studien genomfördes under en längre tidsperiod (Sterner m.fl., 2023).

Björklund med flera (2022) har genomfört en kartläggning av undervisning om tal och räkning i förskoleklass, genom att observera matematikundervisning i 95 olika förskoleklasser. I kartläggningen identifieras goda undervisningsexempel, men även utvecklingsområden. Bland annat synliggörs hur undervisningen i förskoleklass riskerar att reduceras till ett ”görande” där matematikinnehållet glöms bort, samt att elevers svar och inspel sällan utvecklas vidare av lärarna. Som en del av samma projekt har Björklund och Elofsson (2023) genomfört en studie där lekfullhet studeras som en drifkraft i elevers matematiska processer. Enligt Björklund och Elofsson (2023) är det inte tillräckligt att bädda in matematikinnehållet i ett lekfullt sammanhang, de argumenterar i stället för att skapa en miljö som underlättar för elevernas strukturering av det matematiska innehållet. När det matematiska innehållet på så vis blir begripligt och användbart för eleven, bidrar detta till större möjligheter till lärande. Leken blir då ett värdefullt pedagogiskt verktyg där barns egna erfarenheter är av betydelse. I en annan studie utforskar Helenius med flera (2016) om och när lek i förskoleklass kan ses som matematisk. Studien visar att alla sexåringar, på grund av de sociala relationerna i lek, inte har samma möjligheter att delta i matematisk lek. Därför har läraren en viktig roll att uppmuntra barn till att i lek vara kreativa, deltagande och bidra till förhandlingen av lekens relger (Helenius m.fl., 2016).

Palmér och van Bommel har i en tioårig longitudinell designstudie utvecklat och studerat matematikundervisning i förskoleklass med utgångspunkt i problemlösning och problemformulering (Palmér & van Bommel, 2020, 2023; van Bommel & Palmér, 2021). Sammantaget visar resultaten från deras studier att elever både utvecklar goda kunskaper i olika matematikinnehåll och ett positivt förhållningssätt i och till matematikämnet. I en annan studie om problemlösning i förskoleklass, av Pramling och Pramling Samuelsson (2008), studerades problemlösning som del av sagoberättande. Studiens resultat visar att det var utmanande för eleverna att samordna egna förklaringar till en visuell illustration, samt att eleverna hade svårt att skilja mellan division som matematisk operation och som en praktisk aktivitet.

Sammantaget visar tidigare svensk forskning om förskoleklassen att den matematik som elever i förskoleklass ges möjlighet att lära har stor betydelse för deras fortsatta lärande i matematik. Dock är det främst taluppfattning och matematikundervisning genom problemlösning som majoriteten av forskningen har fokuserat på. Vidare visar den tidigare forskningen att elever generellt har större handlingsfrihet i förskoleklassens matematikundervisning än i årskurs 1, samt att leken kan vara ett värdefullt pedagogiskt verktyg där barns egna erfarenheter blir av betydelse.

Likvärdig matematikundervisning

Vid skolstart i förskoleklass genomförs, som tidigare nämnts, en obligatorisk kartläggning som enligt Skolverket (2023) syftar till att bidra till skolans kompensatoriska uppdrag och förbättra likvärdigheten. Kartläggningen syftar också till att främja likvärdighet genom att läraren får hjälp med att identifiera elever i behov av extra stöd, extra anpassningar och extra utmaningar (Skolverket, 2023). Att det obligatoriska kartläggningsmaterialet uppmanar lärare att ta hänsyn till elever i behov av extra utmaningar möjliggör att en tidigare ofta förbisedd elevgrupp nu uppmärksammas (Margrain & van Bommel, 2023). Annan forskning om det obligatoriska kartläggningsmaterialet visar att materialets olika framskrivna syften kan bidra till en otydlighet kring hur kartläggningens resultat ska användas. De olika syftena riskerar att hamna i konflikt med varandra och i kombination med att enbart delar av läroplanens matematikinnehåll ingår i materialet riskerar kartläggningen att begränsa snarare än främja elevernas möjligheter till utveckling och kunskap i matematik (Bagger m.fl., 2019; Walla, 2022).

En likvärdig undervisning, som efter kartläggningen ska möta alla elevers olikheter, kan utformas på olika sätt och inom matematikdidaktisk forskning definieras likvärdighet på många olika sätt. Dessa olikheter ger konsekvenser både för hur likvärdighet mäts och vad det innebär att utforma och sträva efter en likvärdig matematikundervisning som möter elevers olikheter (Llewellyn & Mendick, 2011). I denna studie definieras likvärdig matematikundervisning som en matematikundervisning där alla elever, oavsett förkunskaper, ges tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) och där alla elever ges möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008).

Alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll utgår ifrån matematikdidaktisk forskning om “Equitable Access to Content” (Schoenfeld, 2023, s. 166, översättning: likvärdig tillgång till innehåll) vilket beskrivs som lika möjligheter för alla elever att lära sig viktigt matematiskt innehåll (Burkhardt & Schoenfeld, 2018; Nortvedt & Buchholtz, 2018; Schoenfeld, 2023). Likvärdig tillgång till innehåll handlar om i vilken utsträckning klassrumsaktiviteter inbjuder till och stödjer alla elevers aktiva engagemang i det matematiska innehållet vilket är en förutsättning för att utveckla förståelse för matematiskt innehåll samt för att elever ska bygga produktiva matematiska identiteter (Schoenfeld, 2014). Kärnfrågan i forskning om likvärdig tillgång till matematiskt innehåll formuleras av Schoenfeld (2014, s. 409) som "Vem deltar och vem deltar inte i klassens matematiska arbete och hur?". Även om det finns matematiskt produktiva aktiviteter och matematiskt rika diskussioner i ett klassrum betyder det inte alltid att alla elever har möjligheter att delta i dem. Ett klassrum där enbart några få av eleverna har möjlighet att resonera kring ett matematikinnehåll är inte likvärdigt – oavsett hur rika matematikdiskussionerna är (Cohen & Lotan, 1997; Schoenfeld, 2014).

Alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet utgår ifrån matematikdidaktisk forskning om relationell likvärdighet vilket enligt Boaler (2008) innebär att alla elever ges möjlighet att utveckla framgångsrika sätt att agera i och relaterat till matematikämnet. Framgången i sätten att agera kopplas dels till att eleverna utvecklar en god värdegrund, dels till ökat lärande i matematik. Enligt Boaler innehåller relationell likvärdighet tre perspektiv: a) respekt för andras idéer, b) engagemang och ansvar för andras lärande och c) kunskap i metoder för kommunikation och stöd för andras lärande. Relationell likvärdighet flyttar därmed fokus från mätbara och jämförbara resultat till relationer, i betydelsen att elever behandlar varandra med respekt där olika elevers olika svar och förklaringar beaktas som en tillgång i matematikklassrummet (Boaler, 2006, 2008; Xenofontos, 2019). I studierna kring relationell likvärdighet har Boaler (2006, 2008) undersökt metoder för helklassundervisning i elevgrupper på gymnasiet där eleverna hade mycket olika matematikkunskaper vilket kan liknas vid utgångspunkten för denna studie, även om eleverna är i olika åldrar. De elever som i Boalers (2008) studie deltog i en matematikundervisning som designades utifrån relationell likvärdighet utvecklade i högre grad relationell kompetens och ökade sina matematikkunskaper markant jämfört med elever i kontrollklasser (Boaler & Staples, 2008). Relationell likvärdighet har utifrån Boalers definition även studerats i andra sammanhang, med både yngre elever, vuxna studenter och nyblivna lärare. I en studie av Gutiérrez med flera (2018) har relationell likvärdighet studerats när sju- till nioåringar arbetar parvis med att lösa matematiska problem. Scott (2019) har studerat relationell likvärdighet när nyblivna grundskollärare arbetar för att utforma en likvärdig matematikundervisning och Ruef and Shepard (2022) har studerat studenters erfarenheter av relationell likvärdighet i samband med en onlinekurs. Sammantaget visar de olika studierna att relationell likvärdighet kan vara ett mål att sträva mot för att etablera och upprätthålla en kultur av likvärdigt lärande där elever blir sedda, hörda och uppskattade i sina ansträngningar att lära sig.

Forskningen ovan har använts som utgångspunkt för studiens två dimensioner av likvärdighet, alla elevers tillgång till det matematiska innehållet och alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Dessa två dimensioner har tidigare studerats var för sig men de har inte tidigare studerats tillsammans och inte i relation till en förskoleklasskontext.

Tidigare forskning av vikt för design av studiens matematikundervisning

För att designa matematikundervisningen i den här studien utgjorde forskning om vad som kan främja alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll samt alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet utgångspunkt. En stor del av forskningen är inte genomförd i svensk förskoleklasskontext, varför resultaten av denna forskning behövde prövas i en svensk förskoleklasskontext.

I tidigare studier har öppna matematikuppgifter använts framgångsrikt i klassrum med elever med olika förkunskaper i matematik (Boaler, 2008; Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994). Öppna matematikuppgifter kan lösas med flera olika representationer och strategier och ibland kan det även finnas mer än ett möjligt svar (Sullivan m.fl., 2000). Det finns studier som visar att öppna matematikuppgifter främjar samarbete mellan elever, vilket i sin tur kan bidra till relationell likvärdighet och till att de kan utveckla en bättre förståelse för matematikinnehåll (Boaler, 1998). Men, även om elever arbetar med öppna matematikuppgifter finns ingen garanti att uppgifterna bidrar till ökade kunskaper hos alla elever. Om en elev inte är aktiv under problemlösningsarbetet, hjälper det inte att uppgiften är både välorganiserad och genomtänkt (Hagland m.fl., 2005). Om arbetet med öppna matematikuppgifter ska leda till matematikkunskaper hos alla elever behöver hänsyn tas till förkunskaper hos både klassen som helhet och enskilda individer, där en uppgift som är en problemuppgift för en elev kan vara en rutinuppgift för en annan elev (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Vidare visar tidigare svensk forskning att elever i förskoleklass, om de får möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar, utvecklar en djup kunskap om matematikinnehåll (Palmér & van Bommel, 2020, 2023).

Vid arbete med öppna problemuppgifter är klassrumsdiskussioner med fokus på matematikinnehållet centrala. Sådana klassrumsdiskussioner har dock visats vara svåra att iscensätta (Stein m.fl., 2008). Enligt Smith och Stein (2014) är det en utmaning att hitta en bra balans där lärare stödjer elevernas ansvar för att lära sig matematik, utan att undergräva elevers stolthet över de egna lösningarna. Även andra studier visar att elever lär när de blir uppmuntrade till att ta ansvar för sina egna matematiska idéer, samt resonera om och förstå olika matematiska idéer (Boaler, 2008; Engle & Conant, 2002). Å ena sidan finns det en risk att läraren blir för auktoritär och börjar visa hur eleverna kan lösa uppgifterna där eleverna blir passiva mottagare. Å andra sidan finns en risk att klassrumsdiskussionen blir en beskrivning, där en elev i taget presenterar sin lösning men lösningarna diskuteras eller jämförs inte, och därmed synliggörs inte matematiskt innehåll eller olika strategiers för- och nackdelar. Smith och Stein (2014, s. 22) har utvecklat en modell med fem praktiker för lärare för att främja alla elevers förståelse av det matematiska innehållet under klassrumsdiskussioner: ”förutse, överblicka, välja ut, ordna och koppla ihop”. Elevlösningar används då för att främja alla elevers förståelse av det matematiska innehållet genom att läraren inför problemlösningen *förutser* sannolika elevsvar, under problemlösningen *överblickar* läraren elevernas olika lösningar och väljer utifrån uppgiftens matematikinnehåll ut några elevlösningar som ska presenteras i helklass. Läraren planerar därefter i vilken *ordning* lösningarna bör presenteras under klassrumsdiskussionen för att på bästa sätt synliggöra matematiska idéer, strategier och representationer och under diskussionen hjälper läraren eleverna att *koppla ihop* de olika elevlösningarna till varandra och olika matematiska idéer, strategier och representationer.

Ytterligare ett sätt att främja matematiska resonemang i klassrumsdiskussioner är *talk moves* (Cazden & Beck, 2003; Chapin m.fl., 2009; Kazemi & Hintz, 2014; Michaels & O’Connor, 2015). Talk moves är ett antal fördefinierade frågor som lärare kan ställa för att starta och främja elevers resonemang under klassrumsdiskussioner (O’Connor & Michaels, 2017). I tidigare studier har talk moves använts framgångsrikt för att hjälpa lärare att bygga framgångsrika klassrumsnormer för klassrumsdiskussioner och för att möjliggöra en förändring från traditionell lärarledd kommunikation till elevorienterade resonemang (Cazden & Beck, 2003; Michaels & O’Connor, 2015). Talk moves har dock inte tidigare använts med yngre elever i en skolkontext motsvarande svensk förskoleklass varför de då behöver anpassas (Walla, 2023). Implementering av talk moves kan förstås som en strävan mot likvärdig matematikundervisning (O’Connor & Michaels, 2017).

Teoretiska utgångspunkter

För att analysera matematikundervisningen i designstudien har Wengers (1998) teori om praktikgemenskaper använts. En systematisk översikt över användandet av denna teori i forskning visar att den används i olika syften och därmed på olika sätt där olika delar och begrepp från teorin blir av relevans (Palmér & Roos, 2017). En olikhet i studier som använder Wengers teori är att vissa studier har praktikgemenskaper som förgrund medan andra har individers identitet som förgrund. I denna studie utgör en praktikgemenskap i form av matematikundervisningen i en förskoleklass förgrunden. En annan olikhet är att en praktikgemenskap, även om den alltid är en teoretisk konstruktion (Wenger, 1998), behandlas som ett objekt som studeras utifrån teorin, eller som ett objekt som skapas utifrån teorin (Palmér & Roos, 2017). I denna studie behandlas matematikundervisningen i förskoleklass som ett objekt som studeras utifrån teorin. De begrepp från Wengers teori som blir aktuella med denna utgångspunkt är *ömsesidigt engagemang*, *delad repertoar* och *gemensamt intresse*, vilka enligt Wenger är vad som definierar en praktikgemenskap.

En praktikgemenskap är inte homogen utan består av individer med olika roller, erfarenheter och ansvar (Wenger, 1998). I praktikgemenskapen matematikundervisning i förskoleklassen har lärare och elever olika roller, erfarenheter och ansvar och därmed även olika förhandlingsstyrka. Ömsesidigt engagemang avser relationen mellan deltagarna i praktikgemenskapen, hur lärare och elever deltar i och förhandlar innebörden av olika aktiviteter de är mer eller mindre engagerade i och de relationer som skapas mellan deltagarna. Den delade repertoaren kan antingen produceras inom en praktikgemenskap eller importeras från andra praktikgemenskaper och består av de gemensamma resurser som har utvecklats eller antagits i praktikgemenskapen, till exempel artefakter, gester, handlingar och rutiner. Den delade repertoaren är under ständig förhandling, där vissa delar är mer påverkbara (till exempel arbetsformer) än andra (till exempel matematikinnehållet). Den delade repertoaren skiljer sig därmed åt mellan olika matematikklassrum, till exempel avseende artefakter och rutiner. I praktikgemenskapen matematikundervisning i förskoleklassen är en stor del av den delade repertoaren importerad, till exempel det matematiska innehållet och representationer, medan andra delar som arbetsformer, samarbeten och uppgifters utformning förhandlas och formas inom praktikgemenskapen. Det gemensamma intresset innebär det ömsesidiga ansvar som deltagarna i en praktikgemenskap känner i förhållande till praktikgemenskapen. Det gemensamma intresset är inte gemensamt i den meningen att alla deltagare i praktikgemenskapen tycker och agerar lika om allt utan det gemensamma intresset förhandlas ständigt gällande vad som är viktigt och vad som ska göras, och vad som inte är viktigt och vad som inte behöver göras. I praktikgemenskapen matematikundervisning i förskoleklassen handlar det gemensamma intresset exempelvis om vad elever lägger vikt vid i arbetet med olika aktiviteter och vad lärare uppmärksammar och bekräftar i elevers arbete.

Att studera utveckling av matematikundervisning i förskoleklass utifrån Wengers teori innebär att studera hur förändringar i ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar kan främja alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) samt alla elevers möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008). Wengers teori och förändringar i ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar kan kopplas till Schoenfelds (2014) frågor i arbetet inför, under och efter klassrumsundervisning som ska främja elevers likvärdiga tillgång till matematiskt innehåll. Dessa frågor handlar om vilka möjligheter som finns för varje elev att delta i klassens matematiska arbete och hur det går att skapa möjligheter för varje elev att delta i klassens matematiska arbete. Liknande kan utvecklingen av elevernas deltagande i en praktikgemenskap, i den här studien, jämföras med Boalers (2008) arbete med att utveckla elevers sätt att agera utifrån en helklassundervisning där eleverna har olika matematikkunskaper.

Wengers teori har använts på liknande sätt i andra studier för att studera matematikundervisning i klassrum. I en intervjustudie av Ewing (2006) användes teorin för att studera elevers beskrivningar av sina erfarenheter av att lära sig matematik i klassrummet med ett specifikt fokus på hur läroboken användes. I studien analyseras elevers deltagande med utgångspunkt i hur de talade om sig själva i relation till praktikgemenskapen i klassrummet. I en designstudie av Nic-Mhuirí (2014), användes teorin för att studera en diskursiv gemenskap där eleverna genererade och utvärderade matematiska idéer. I båda dessa studier var elevers matematiska identiteter i relation till klassrummet som en praktikgemenskap i förgrund medan en designstudie av Gardesten och Palmér (2023), likt denna studie, har praktikgemenskapen som sådan i förgrund. I studien av Gardesten och Palmér (2023) användes teorin för att studera rumslig, social och matematisk inkludering i matematikklassrum utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar.

Metod

Studien är en designstudie vilket inte är en fast forskningsmetod utan snarare en genre av studier där lösningar på komplexa ”pedagogiska problem” utvecklas i iterativa designcykler i samarbete mellan forskare och lärare (McKenney & Reeves, 2019). Det finns således stora variationer i designstudier, både i inriktning och storlek, men gemensamt är avsikten att utveckla både undervisning och teorier som kan vägleda, informera och förbättra såväl praktik som forskning. Gemensamt är också en kvalitativ iterativ design där designprinciper för undervisning utvecklas och förfinas genom upprepade cykler av planering, genomförande och utvärdering (Anderson & Shattuck, 2012). Designstudier kan användas för att utveckla forskningsbaserade lösningar på komplexa problem i verksamheten, eller för att utveckla eller validera teorier om lärandeprocesser och lärmiljöer (Plomp, 2013). Det komplexa pedagogiska problem som fokuserades i denna studie var som nämnts vilka designprinciper som främjar en matematikundervisning i förskoleklass där alla elever får tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Även om designstudier genererar både teori och praktiska produkter går det enligt Prediger med flera (2015) att skilja mellan olika designstudier beroende på vad forskning förväntas ge och vilken roll dessa produkter spelar. I den här designstudien var den förväntade produkten designprinciper för hur alla elever kan ges tillgång till matematikinnehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet i förskoleklassens matematikundervisning.

Sammanlagt deltog en förskoleklass med 18 elever och en förskoleklasslärare i studien tillsammans med två forskare. Studien genomfördes under ett läsår. Urvalet baserades på lärarens intresse för att delta. Läraren har en treårig förskollärarutbildning och över 30 års yrkeserfarenhet. Eleverna informerades muntligt om interventionen och deras vårdnadshavare fick skriftlig information om studien och godkände sina barns deltagande (Vetenskapsrådet, 2017). Då studien genomförts med yngre elever har deras välbefinnande beaktats under hela processen att generera data (Fraser, 2004; Greig m.fl., 2013). Exempelvis har det varit viktigt att lyssna på eleverna och vara lyhörd inför tecken på att en elev inte var bekväm i en undervisningssituation. Om sådana tillfällen hade uppstått hade inte eleverna deltagit även om samtyckesblanketten från vårdnadshavare var underskriven. Vidare har samtliga elevsvar avidentifierats och i resultatet används fingerade elevnamn.

Totalt genomfördes fem cykler av planering, genomförande och utvärdering där olika designprinciper prövades och antingen förfinades i nästa cykel eller förkastades för att ersättas av andra. Före den första cykeln genomförde läraren den obligatoriska kartläggningen med alla elever i klassen. Denna kartläggning utgjorde utgångspunkt för designstudien, dels då elevernas resultat beaktades i planeringen av de olika cyklerna, dels då det matematiska innehållet i studiens fem cykler byggde vidare på det matematiska innehållet i kartläggningen. Det betyder att den undervisning som utformades fokuserade på olika matematikinnehåll (till exempel mönster, taluppfattning, mätandets princip och rumsuppfattning) men alltid med tillgång till matematikinnehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

I designstudier är det viktigt att utgå ifrån den undervisning som bedrivs vid interventionens start varför den första designcykeln inte introducerade något nytt förutom matematikinnehållet mönster som är ett av de innehåll som ingår i kartläggningen vid skolstart. Matematikundervisningen i förskoleklassen följde under interventionens första cykel sin tidigare rutin där en uppgift inledningsvis introducerades i helgrupp med eleverna sittandes i en ring på golvet. Därefter arbetade eleverna med uppgiften i par, sittandes vid små bord eller på golvet i ett stort gemensamt rum och ett mindre rum i anslutning till det stora rummet. Slutligen återsamlades hela gruppen i en ring på golvet, för att följa upp arbetet med uppgiften. I den första designcykeln genomfördes tre lektioner med fokus på mönsterenhet.

Planeringen genomfördes i samarbete mellan läraren och en av forskarna, där forskaren hade huvudansvar att, utifrån tidigare forskning, identifiera och föreslå möjliga designprinciper. I genomförandet av de olika lektionerna var läraren huvudansvarig för implementeringen i klassrummet. I uppföljningen gjorde forskarna en inledande analys som sedan diskuterades tillsammans med läraren för att inkludera lärarens erfarenheter från lektionens genomförande i analysen. Utifrån dessa diskussioner påbörjades planeringen av nästa designcykel genom att forskaren, utifrån tidigare forskning, identifierade och föreslog antingen förfining av eller nya möjliga designprinciper.

Analysen i denna artikel bygger på 743 minuter videodokumentation från de fem designcyklerna samt fältanteckningar.[1] Utifrån Wengers teori (1998) betraktas matematikundervisningen som en teoretisk konstruktionen som byggs upp av ömsesidiga engagemang, delad repertoar och gemensamt intresse. I linje med designforskning var analysen kvalitativ (Maxwell, 2004). Analysen inleddes med en analys av det ömsesidiga engagemanget, den delade repertoaren samt det gemensamma intresset vid studiens start. Vid studiens start identifierades tre utvecklingsområden: instruktion, elevlösningar och talutrymme. För att möta dessa utvecklingsområden introducerades designprinciper som provades och förfinades i fyra designcykler. I varje designcykel analyserades praktikgemenskapen i två steg. Först analyserades hur designprinciperna påverkade praktikgemenskapens ömsesidiga engagemang, delade repertoar och gemensamma intresse. Därefter analyserades hur förändringar i ömsesidigt engagemang, delad repertoar och gemensamt intresse möjliggjorde tillgång till ett matematikinnehåll och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

Resultat

Som ovan har beskrivits kommer begreppen ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar från Wengers (1989) teori användas för att beskriva och analysera matematikundervisningen i förskoleklassen. Den analys som har beskrivits ovan har genomförts på samtlig empiri i studien där de empiriska exempel som ges nedan enbart utgör en liten del.

Matematikundervisningen innan interventionen

I den första designcykeln genomfördes totalt tre lektioner. Utifrån en analys av ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar under dessa tre lektioner identifierades tre delar att fokusera i designstudiens följande cykler: instruktion, elevlösning, talutrymme. Nedan beskrivs dessa tre delar vid studiens start i relation till elevers tillgång till ett matematiskt innehåll och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematik. Därefter beskrivs de designprinciper som implementerades och förfinades i studiens följande fyra cykler och som därmed utgör studiens resultat.

1 Data har hanterats enligt dataskyddsförordningen. Videomaterial har lagrats på lösenordskyddade servrar och fältanteckningar i låsbara skåp vid Högskolan Dalarna.

Instruktion

En rutin i den delade repertoaren var att varje skoldag började med att eleverna samlades i en ring på golvet. När samlingsstunden var genomförd började matematiklektionen direkt. Eftersom eleverna satt kvar i ringen, instruerades de muntligt i helklass om vilka uppgifter eller aktiviteter de skulle arbeta med under matematiklektionen. Eleverna förväntades sitta stilla och vara tysta medan läraren, eller den elev som räckt upp handen, var den som pratade. Det gemensamma intresset avseende hur länge elever orkar sitta stilla varierar, några elever sitter stilla och är tysta under både samlingsstund och matematikinstruktion medan andra börjar röra sig och prata rakt ut redan efter några minuter (excerpt 1).

Excerpt 1 (designcykel 1)

Lärare	Mönster, är det någon som kan berätta vad ett mönster är för något? [Flera elever räcker upp handen]
Lärare	Alex.
Alex	Det är olika färger.
Lärare	Det kan vara olika färger. [Flera elever räcker upp handen]
Lärare	Nelly.
Nelly	Att det är typ så här. Gult, blått, gult, blått, gult, blått. [Läraren sträcker sig efter några skålar med plockmaterial i olika färger]
Alex	Du kan ta dom där hinkarna och göra ett mönster med. [Talar rakt ut, utan att ha fått ordet]
Lärare	Jag tar gult och grönt. Hur var det du sa? [Ser på Nelly] Ja.
Nelly	Gult, grönt, gult, grönt.
Alex	Rött. [Skrattar och ser på de andra eleverna]
Lärare	Jag hinner inte med, jag hinner inte med. Och … [Läraren lägger plockmaterialet: gult, grönt, gult, grönt]

Exemplet ovan (excerpt 1) visar spänningar i det ömsesidiga engagemanget och gemensamma intresset, hur det finns elever som trots att de suttit länge orkar lyssna uppmärksamt till lärarens instruktion och talar efter tur, medan andra elever som inte längre orkar lyssna utmanar den delade repertoaren genom att till exempel tala rakt ut. Under samlingsstunden påverkas det ömsesidiga engagemanget och den delade repertoaren av detta då det gemensamma intresset ofta flyttas från innehållet i lärarens instruktion till innehållet i lärarens korrigering av elever. Förhandlingen fokuserar på handlingar snarare än innehåll i kommande uppgifter vilket ger konsekvenser för nästa del av lektionen. När eleverna började arbeta med den uppgift som hade introducerats, var det flera elever som inte visste vad de skulle göra. De blev sittandes, enskilt eller parvis, och väntade på att läraren skulle komma och förklara uppgiften för dem. Under denna del av lektionen, som egentligen syftar till att eleverna på olika sätt ska arbeta med matematikinnehåll med hjälp av artefakter som erbjuds som verktyg för att lösa uppgiften, satt flera elever och väntande på läraren. Dessa elevers gemensamma intresse utvecklas till att i väntan leka med de artefakter som finns tillgängliga snarare än att använda dessa som verktyg för att förstå ett matematiskt innehåll.

Utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar identifieras utifrån ovanstående utformningen av instruktionerna i början av matematiklektionerna som begränsande för elevernas tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30

Elevlösning

En rutin i den delade repertoaren är att eleverna tenderar att se sig som klara med en uppgift när de har en lösning, och att den lösningen härmar det exempel som läraren visat i sin instruktion. Till exempel när en aktivitet hade syftet att eleverna skulle ges möjlighet att utveckla förståelse för mönsterenhet konstruerade alla elever en lösning med identisk mönsterenheten som det exempel läraren visat vid instruktionen (excerpt 2).

Excerpt 2 (designcykel 1)

Anders	Gul, grön, gul, grön.
Lärare	Ja, fast det blir ju lite också lite samma sak. Kan man bygga på ännu något annat vis med de här färgerna?
Alex	Blå, orange.
Lärare	Men om man bara har två färger.
Tove	Ja, man kan ha tre färger.
Alex	Rosa, lila.
Lärare	Men om vi bara har två färger.
Tove	Då kan man göra olika mönster.
Lärare	Men kan man göra något annat mönster, med samma färger?
Flera	Ja.
Elev	Nej.
Alex	Jo, man kan göra en katt av det.
Lärare	Ja, nu menar jag inte att, vad man bygger utan … är det någon som kommer på något sätt?
Anders	Ananas, bil.
Lärare	Ja.

Exemplet ovan (excerpt 2) visar hur eleverna uppmuntrades till att hitta flera lösningar och lösa uppgiften på olika sätt, men i stället för att variera mönsterenheten varierade eleverna färger eller föremål. Eleverna nöjde sig när de imiterat läraren och hittat en lösning på uppgiften, i stället för att arbeta vidare för att hitta flera olika lösningar på samma uppgift. Det gemensamma intresset handlar mer om görande än det matematiska innehållet och eleverna vill göra lika som läraren och därmed också lika som alla andra elever i klassen. Under pararbetet pratade inte eleverna om mönsterenheter, utan om vilka färger och föremål som skulle användas. När pararbetet följdes upp i den avslutande klassrumsdiskussionen beskrev eleverna sina lösningar utifrån färger och föremål men inte kopplat till matematikinnehållet.

Utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar identifieras elevlösningar som begränsande för elevernas tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

Talutrymme

En rutin i den delade repertoaren är att alla elever i slutet av lektionen återsamlas i ringen för att visa sina lösningar. En elev i taget får berätta hur han eller hon har löst uppgiften, vilket innebär att talutrymmet baseras på elevernas medlemskap i praktikgemenskapen snarare än på deras lösningar. Det viktiga i den delade repertoaren är inte det matematiska innehållet i lösningarna, utan alla elevers möjlighet att göra sin röst hörd. Eftersom eleverna, som nämnts ovan, oftast

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30

imiterade lärarens lösning, återupprepades samma lösning om och om igen. När en elev vid något tillfälle presenterar en ny lösning, bidrar inte den delade repertoaren till att den lösningen får mer eller annorlunda uppmärksamhet än de identiska lösningarna (excerpt 3).

Excerpt 3 (designcykel 1)

Lärare:	Hur var din regel när du gjorde, Tova? Hur har du byggt ditt mönster? Hur tänkte du? Berätta.
Tova:	Alltså, vi gjorde så här. Blå röd blå röd blå röd blå röd.
Lärare	Ja, titta, då var det blå och röd. Det var ju den här regeln. Men sen upprepade ni ju lika många.
Nelly	Vi gjorde samma.
Lärare	Vill du berätta något Johan? … Kan du berätta, hur fungerade ditt mönster?
Johan	Mitt mönster. Samma som Tova. Blå röd blå röd blå röd.
Lärare	Ja, ni byggde samma. Anders och Simon, hur var eran mönsterregel i ert mönster? Hur byggde ni på för vis?
Anders	Han har inte samma som mig.
Lärare	Nej, men berätta.
Anders	Grön gul grön gul grön gul
Lärare	Ja, och vad var mönsterregeln i ditt mönster?
Anders	Grön och gul.

Exemplet ovan (excerpt 3) visar hur eleverna fick lika stort talutrymme men att fokus inte låg på det matematiska innehållet. I denna sekvens ställde läraren olika frågor till eleverna. Oavsett lösning får eleverna samma positiva feedback från läraren och eleverna behöver inte explicit beskriva det matematiska innehållet i sin lösning, eller vilken strategi de använt, varför det matematiska innehållet, som var syftet med lektionen, inte blir del av den delade repertoaren eller det gemensamma intresset. Detta påverkar i sin tur det ömsesidiga engagemanget då fokus hamnar på person snarare än matematiskt innehåll.

Utifrån ömsesidigt engagemang, gemensamt intresse och delad repertoar identifieras utifrån ovanstående organisering av klassrumsdiskussionen på slutet av lektionerna som begränsande för elevernas tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet.

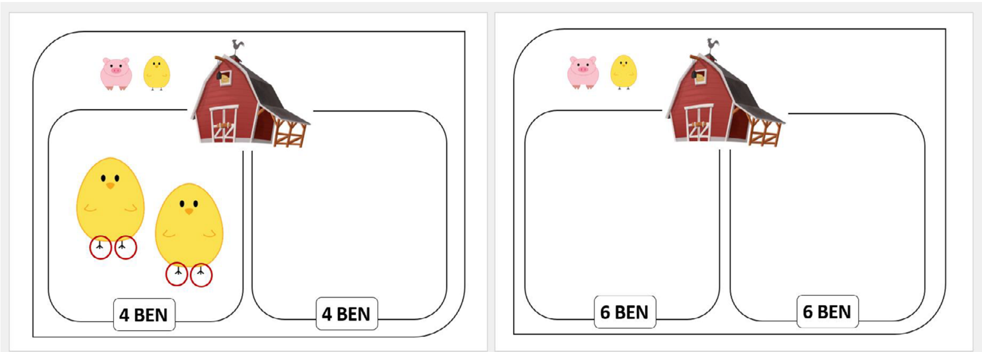
Intervention

Som har beskrivits, genomfördes interventionen under ett läsår genom fem designcykler som var och en innehöll ett flertal lektioner. I interventionen introducerades designprinciper som ibland förkastades då de inte ansågs utveckla instruktion, elevlösningar eller talutrymmet i önskad riktning. Vid andra tillfällen behölls och förfinades designprinciperna ytterligare.

Designprincip 1 – Låg tröskel

Designprincipen låg tröskel introducerades för att lösa utmaningen med instruktionen som eleverna inte uppfattade. Designprincipen utgick ifrån forskning som visar att en och samma uppgift kan vara en problemlösningsuppgift för en elev, men en rutinuppgift för en annan elev (Mason & Johnston-Wilder, 2006) vilket innebär att elever behöver olika stöd för att komma i gång med en uppgift. Om elever inte kommer i gång med uppgifterna riskerar de även att gå miste om möjligheten att möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar, vilket av Palmér och van Bommel (2020, 2023) beskrivs som nödvändigt för att kunna utveckla en djupare kunskap om matematikinnehåll. Utifrån detta utformades uppgifter med en låg ingångströskel, uppgifter vars låga ingångströskel gjorde dem självinstruerande, så att alla elever skulle kunna börja jobba direkt med ett matematiskt innehåll som de förstod, även om de inte hade förstått lärarens instruktion. En problemuppgift som eleverna arbetade med var uppgiften: Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 12 ben? Utifrån denna problemuppgift formulerades uppgifter med låg tröskel. I figur 1 visas två exempel på öppna problemuppgifter som är utformade med låg tröskel: Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 4 ben? och Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 6 ben?

Figur 1
Exempel på öppna problemuppgifter med låg tröskel



Not: Eleverna arbetade i par för att hitta minst två olika lösningar till varje uppgift. Eleverna kunde börja med olika uppgifter. Några elever förstod uppgiften direkt och började därför med 12 ben, medan andra började med 4 eller 6 ben.

De elever som direkt visste vad de skulle göra kunde starta med 12 ben, medan andra kunde starta med 4 eller 6 ben (figur 1) för att förstå vad de förväntades göra i uppgiften. Uppgifterna med 4 och 6 ben (figur 1) fungerade därför som en förlängd instruktion, något som möjliggjorde att alla elever kunde komma i gång direkt. Under denna lektion arbetade eleverna parvis för att hitta minst två olika lösningar till varje uppgift. I den nya uppgiftskonstruktionen behövde inte alla elever göra alla uppgifter medan elever som önskade ytterligare utmaningar, fick frågor som: ”Hur många olika lösningar finns om det är 12 ben tillsammans?” och ”Jämför om ni har hittat lika många och samma lösningar som ett annat par?”. Det var dessutom möjligt att öka uppgifternas utmaning ytterligare, genom att öka antalet ben, eller lägga till fler djur med ett annat antal ben.

Utformningen av uppgifter med låg tröskel påverkade även lärarens instruktion genom att läraren visade och pratade mindre i början av lektionen. Tidigare hade läraren visat *hur* eleverna kunde lösa uppgifter, nu berättade läraren enbart *om* uppgiften. Efter den nu kortare muntliga instruktionen kunde eleverna arbeta med uppgifter och även om eleverna i samma klassrum arbetade med olika uppgifter arbetade de med samma matematiska innehåll. På så vis blev det nya sättet att konstruera uppgifter också ett sätt att möjliggöra för hela klassen att arbeta med samma matematikinnehåll utan att dela upp klassen i olika grupperingar. Den låga tröskeln möjliggjorde därmed för samtliga elever att delta i praktikgemenskapens delade repertoar men på olika sätt utifrån sina förutsättningar.

Designprincip 2 – Öppna matematikuppgifter

Designprincipen öppna matematikuppgifter introducerades för att förändra den delade repertoaren avseende att eleverna endast löste uppgifter på ett sätt där de imiterade lärarens exempel och matematikinnehållet riskerade att inte bli synliggjort. Designprincipen utgick ifrån forskning som visar att öppna matematikuppgifter som kan lösas med olika representationer och olika strategier, uppgifter där det ibland även kan finnas fler än en lösning, dels kan främja samarbete mellan elever (Boaler, 1998; Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994), dels möjliggöra för elever att möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar (Palmér & van Bommel, 2020, 2023). Ett exempel på en sådan uppgift är uppgiften i figur 1.

De öppna matematikuppgifterna förändrade både den delade repertoaren och det gemensamma intresset i praktikgemenskapen. När öppna matematikuppgifter infördes, började eleverna resonera och tillsammans prova sig fram till olika lösningar. Vad som räknades som en önskvärd lösning kunde inte längre vara en lösning som var identisk med lärarens lösning, eftersom det inte fanns en sådan lösning att imitera. Att det inte fanns en lösning att imitera var en konsekvens av den nu kortare instruktionen och uppgifter med låg tröskel, där läraren nu inte visade hur uppgifterna kunde lösas. Eleverna var sedan tidigare vana vid att rita sina lösningar men nu användes ritande på ett annorlunda sätt än tidigare. I stället för att fokusera på detaljer som inte är viktiga utifrån ett matematiskt perspektiv (till exempel vilket föremål som ska ritas), började eleverna förstå vilka detaljer som har betydelse för att visa olika matematiska lösningar. Det skedde en gradvis förändring i praktikgemenskapen, där den delade repertoaren och det gemensamma intresset innebar att hitta flera lösningar på uppgifter och eleverna blev mer aktiva i förhandlingarna kring det matematiska innehållet. Med ett tydligare fokus på det matematiska innehållet, blev det även möjligt att utmana eleverna till att ta sig an svårare uppgifter och på så vis utmanas i sitt lärande.

Designprincip 3 – Resonemangsfrämjande repliker

Designprincipen resonemangsfrämjande repliker introducerades för att förändra den delade repertoaren vid klassrumsdiskussioner, där talutrymmet tidigare fördelades utifrån att alla elever skulle få lika stort talutrymme snarare än utifrån matematikinnehållet. Designprincipen utgick ifrån forskning om hur klassrumsdiskussioner kan organiseras för att främja alla elevers förståelse av det matematiska innehållet (Smith & Stein, 2014), samt vilka frågor (talk moves) som kan ställas under dessa klassrumsdiskussioner för att främja elevernas resonemang (Chapin m.fl., 2009). Med stöd i hur klassrumsdiskussioner kan organiseras (Smith & Stein, 2014) och frågor lärare kan ställa för att främja elevers resonemang (Chapin m.fl., 2009), valde läraren inför klassrumsdiskussionerna ut några elevlösningar som skulle presenteras, och i vilken ordning dessa skulle presenteras för att på bästa sätt tillsammans synliggöra det matematiska innehållet för alla elever. Användandet av talk moves anpassades utifrån förskoleklassens kontext genom att en ny talk move (*be eleverna beskriva en lösning*) lades till, en annan talk move togs bort (*använda väntetid*) samt att en tredje talk move (*upprepa och visa vad en elev har sagt*) utökades till att omfatta multimodala element (Walla, 2023). Dessa anpassningar gjordes med utgångspunkt i att alla elever oavsett hur de hade löst uppgiften skulle ges möjlighet att förstå det matematiska innehåll som diskuterades. För att utveckla den delade repertoaren ombads eleverna beskriva en lösning, upprepa någon annans resonemang, tillämpa egna resonemang på någon annans resonemang, att upprepa vad en elev sagt samt att använda olika representationer för att visa en lösning. I de klassrumsdiskussioner som uppstod fick läraren möjlighet att vid behov upprepa och förstärka viktiga delar av det matematiska innehållet, något som i sin tur bidrog till att öka elevernas förståelse av det matematiska innehållet (excerpt 4).

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30

Excerpt 4 (designcykel 2)

[Vid klassrumsdiskussionen på slutet av lektionen ritar läraren en av elevernas lösningar på smartboarden, en bild med tre kycklingar. Hur många grisar och kycklingar bor på bondgården om de tillsammans har 6 ben?]

Lärare	Kan du berätta hur du tänkte?
Tove	Ja, jag räknade typ så här: en, två, tre, fyra, fem, sex. [Tove pekar på lärarens illustration på smartboarden]
Lärare	Bra! Annika, kan du berätta hur Tove tänkte? Hur hade Tove tänkt?
Annika	hm …
Lärare	Stämde det här?
Annika	Ja.
Lärare	Var det sex ben?
Annika	Ja, för tre plus tre blir ju sex. Och så blir det ju.
Lärare	Tack!
Lärare	Är det någon som hade en annan idé?
Flera	Ja! [Flera elever räcker upp handen]
Lärare	Elin och Annika, ni hade en annan idé som inte såg ut så där… Hur såg eran idé ut?

[Elin och Annika går fram till läraren och får sin teckning av läraren]

Lärare	Får jag rita upp eran också?

I exemplet ovan (excerpt 4) upprepar, delar, repeterar, resonerar och lägger läraren till – vilket tillsammans bidrog till att öka elevernas möjlighet till förståelse av det matematiska innehållet eftersom matematikinnehållet blev fokus för klassrumsdiskussionen. Exemplet visar även hur läraren på förhand har valt ut att Elin och Annika ska presentera sin lösning efter Tove. Genom att införa resonemangsfrämjande repliker anpassade för förskoleklasskontexten, påverkades det ömsesidiga engagemanget i praktikgemenskapen där blev eleverna delaktiga i förhandlingen om den delade repertoaren. Lärarens frågor bidrog till att de började resonera kring det matematiska innehållet och bygga vidare på varandras lösningar. Den delade repertoaren vid matematikdiskussioner förändrades också genom att talutrymmet i högre grad fördelades utifrån matematikinnehållet i elevernas lösningar.

Summering

Vid studiens start identifierades tre utvecklingsområden för att alla elever skulle få tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008): instruktion, elevlösningar och talutrymme. Designprinciper implementerades, förfinades eller förkastades i fyra cykler för att slutligen resultera i en matematikundervisning med låg tröskel, öppna matematikuppgifter och resonemangsfrämjande repliker. Dessa tre designprinciper påverkade praktikgemenskapens delade repertoar, gemensamma intresse och därmed även det ömsesidiga engagemanget i önskad riktning. Designprinciperna har inte studerats isolerat utan behöver i studien ses som en helhet. Det fungerar exempelvis inte att fråga eleverna om de håller med om en lösning eller inte (designprincip 3) – om alla elever har gjort identiska lösningar (designprincip 2) eller om några elever inte förstår uppgiften som sådan (designprincip 1). För att använda resonemangsfrämjande repliker (designprincip 3) behöver alla elever få tillgång till samma matematiska innehåll men utifrån sina förutsättningar (designprincip 1 och 2), vilket här förstås i relation till hur Schoenfeld (2014, 2023) beskriver alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll. För att det ska bli relevant för elever att resonera om olika lösningar underlättar det om uppgifterna som används i undervisningen kan lösas på olika sätt (designprincip 2). Genom klassrumsdiskussioner där både innehåll och struktur förändrades (designprincip 3) gavs eleverna möjlighet att lära av varandras lösningar och att resonera om ett matematiskt innehåll, vilket i sin tur påverkade elevernas möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2006, 2008). Sammantaget påverkade designprinciperna som helhet praktikgemenskapens delade repertoar och därmed det gemensamma intresset gällande vad som var viktigt och elevernas och lärarens ansvar under lektionerna. Detta påverkades av och påverkade i sin tur det ömsesidiga engagemanget gällande relationen mellan lärare och elever avseende förhandling av såväl innehåll som arbetsformer. Tillsammans bidrog designprinciperna till en matematikundervisning som främjade alla elevers tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2014) och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008).

Diskussion

Utgångspunkten för denna studie var att utforma en matematikundervisning där alla elever, oavsett resultat på det obligatoriska kartläggningsmaterialet, fick tillgång till det matematiska innehållet och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. Denna utgångspunkt utgick ifrån forskning om hur en likvärdig matematikundervisning kan utformas i heterogena elevgrupper (Schoenfeld, 2014; Boaler, 2008). De designprinciper som utforskades i studien formulerades med utgångspunkt i tidigare forskning för att möta de tre utvecklingsområden som hade synliggjorts i studiens första cykel. Designprinciperna behövde därmed studeras i relation till svensk förskoleklasskontext samt i relation till den definition av likvärdig matematikundervisning som utgjorde utgångspunkt för studien. Studiens resultat bidrar därmed med kunskap om hur tidigare studier, gällande öppna matematikuppgifter, låg tröskel och resonemangsfrämjande repliker (Chapin m.fl., 2009; Stein m.fl., 2008; Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994), framgångsrikt kan anpassas till svensk förskoleklasskontext.

En viktig fråga är om resultatet från designstudien kan generaliseras till andra förskoleklasser. Den kartläggning Björklund med flera 2022 har genomfört, av 95 förskoleklassers matematikundervisning, visar att många förskoleklasser har liknande utmaningar som de som utgjorde utgångspunkt i denna studie. Utifrån det kan designprincipernas generella karaktär göra dem anpassningsbara att utveckla matematikundervisningen även i andra förskoleklasser. Vidare har, i likhet med studierna av Palmér och van Bommel (2020, 2023), olika matematikinnehåll fokuserats på i studiens cykler vilket visar att designprinciperna kan främja tillgång till olika matematikinnehåll. Således visar denna studie likt Palmér och van Bommel (2020, 2023) att framgångsrik systematiskt utprövad matematikundervisning kan appliceras på olika matematikinnehåll.

Designprincipen låg tröskel introducerades för att bidra till att alla elever skulle komma igång med uppgifterna, även om de inte uppfattat lärarens instruktion. Eftersom utgångspunkten för denna studie var att utveckla en matematikundervisning som möter förskoleklasselevers olikheter, var utgångspunkten att det alltid finns elever i klassrummet som vid olika tillfällen inte har uppfattat lärarens instruktion. Orsaken till att olika elever inte hade uppfattat lärarens instruktion kunde vara olika, och inget som studien fokuserade på, utan målet var att möta alla elevers olikheter. Genom att konstruera uppgifter med låg tröskel kunde även elever som inte hade uppfattat lärarens instruktion komma i gång med uppgifterna och därmed få tillgång till matematikinnehållet. Studier av Palmér och van Bommel (2020, 2023) visar att elever i förskoleklass inte behöver någon specifik förkunskap för att introduceras till problemlösning, vilket denna studie styrker. Således kräver inte den låga tröskeln att eleverna har fått en viss typ av uppgifter eller instruktion tidigare.

Designprincipen öppna matematikuppgifter introducerades för att skapa möjligheter för eleverna att lösa uppgifter på olika sätt, utan att imitera lärarens lösning. Öppna matematikuppgifter har tidigare använts framgångsrikt i klassrum med elever med olika förkunskaper, bland annat på grund av att denna typ av matematikuppgifter främjar samarbete mellan elever (Sullivan m.fl., 2000; Wu, 1994). Således blev öppna matematikuppgifter en viktig förutsättning för att skapa klassrumsdiskussioner där eleverna kunde resonera kring olika lösningar på samma uppgift. En risk med öppna matematikuppgifter är att en och samma uppgift kan fungera som en problemuppgift för några elever och en rutinuppgift för andra (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Detta undveks genom att erbjuda eleverna öppna matematikuppgifter som hade låg tröskel men samtidigt inkluderade utmaningar. Dessa anpassningar bidrog även till att eleverna var mer aktiva under arbetet med uppgifterna, något som enligt Hagland med flera (2005) är viktigt för att uppgifterna ska bidra till ökade kunskaper hos alla elever. I denna studie bidrog de öppna matematikuppgifterna till att eleverna började resonera kring olika lösningar, vilket är i linje med studier av Palmér och van Bommel (2020, 2023) där öppna uppgifter möjliggjorde för eleverna att möta, diskutera och argumentera för olika strategier och lösningar.

Designprincipen resonemangsfrämjade repliker introducerades för att påverka innehåll i och organisering av klassrumsdiskussioner. Gällande resonemangsfrämjande repliker visar tidigare forskning att klassrumsnormer påverkar och påverkas av klassrumsdiskussioner (Cazden & Beck, 2003; Michaels & O'Connor, 2015). Eftersom klassrumsnormer ser olika ut i olika klassrum och i olika ämnen kan införandet av resonemangsfrämjande repliker vara en olika lång process i olika klassrum. I denna studie introducerades de resonemangsfrämjande replikerna i designcykel 2 men det var först i designcykel 4 och 5 de hade fått den utformning som visade framgångsrika resultat. I studierna av Palmér och van Bommel (2020, 2023) lyfts vikten av lärarens roll i de avslutande klassrumsdiskussionerna efter problemlösning och utifrån deras forskning kan implementeringen av resonemangsfrämjande repliker i denna studie, som bygger på forskning av Smith och Stein (2014) och Chapin med flera (2009), ses som ett komplement för hur läraren kan lyckas med sådana klassrumsdiskussioner.

Sammantaget visar studiens resultat en utveckling av en matematikundervisning som möter elevers olikheter i förskoleklass, oavsett vilket resultat som eleverna har fått i den obligatoriska kartläggningen vid skolstart. När de tre designprinciperna låg tröskel, öppna matematikuppgifter och resonemangsfrämjande repliker introducerades främjades elevernas tillgång till olika matematikinnehåll samt deras möjligheter att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet. När uppgifter med låg tröskel infördes (designprincip 1), möjliggjordes tillgång till ett matematiskt innehåll kopplat till lektionens syfte och därmed möjliggjordes för elever att resonera om det matematiska innehållet. När eleverna fick arbeta med öppna matematikuppgifter (designprincip 2) handlade matematikundervisningen inte längre om att imitera lärarens lösning utan att prova sig fram till olika lösningar. När resonemangsfrämjande repliker (designprincip 3) introducerades fördelades talutrymmet i klassrumsdiskussionen baserat på matematikinnehållet i lösningar vilket påverkade elevernas tillgång till det matematiska innehållet eftersom det matematiska innehållet blev fokus för klassrumsdiskussionerna. Genom de tre designprinciperna gavs eleverna möjlighet att resonera om det matematiska innehållet på sin nivå – vilket är nödvändigt för att eleverna ska kunna utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2006, 2008). I denna studie har de tre designprinciperna utvecklats och studerats parallellt i de olika designcyklerna, vilket innebär att det är svårt att se var en designprincip slutar och nästa börjar, varför det utifrån denna studie inte är möjligt att uttala sig om i vilken utsträckning designprinciperna enskilt kan påverka matematikundervisning.

Avslutningsvis visar studien att likvärdighet i klassrummet kan förstås utifrån olika perspektiv, vilket i sin tur påverkar de didaktiska val som görs i strävan mot en likvärdig matematikundervisning. Vid studiens inledning fördelades elevernas talutrymme vid klassrumsdiskussionerna utifrån en aspekt av likvärdighet att alla elever ska få samma talutrymme. Då denna studie fokuserade på likvärdighet utifrån andra aspekter blev de didaktiska valen i klassrumsdiskussionerna andra. I stället för att ge alla elever lika stort talutrymme, behövde talutrymmet fördelas baserat på det matematiska innehållet i elevers lösningar. Det som vid interventionens början var ett argument för att skapa en likvärdig undervisning i form av talutrymme, främjade inte likvärdighet i betydelsen alla elevers likvärdiga tillgång till ett matematiskt innehåll (Schoenfeld, 2023) och möjlighet att utveckla ett framgångsrikt förhållningssätt i och till matematikämnet (Boaler, 2008). Detta visar dels att likvärdighet är ett mångtydigt begrep som kan förstås utifrån olika perspektiv, men det visar också, i linje med Llewellyn och Mendick (2011), att vad det innebär att sträva efter en likvärdig matematikundervisning i klassrummet kan förändras när förståelsen av begreppet likvärdighet förändras.

Referenser

Anderson, T. & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research? *Educational Researcher, 41*(1), 16–25. https://doi.org/10.3102/0013189x11428813

Arnell, S. (2021). *Elevers möten med matematik: En studie om elevers möten med matematik i förskoleklass och årskurs 1.* [Doktorsavhandling, Linköpings Universitet]. https://doi.org/10.3384/diss.diva-178029

Aunio, P., Hautamäki, J., Heiskari, P. & Van Luit, J. E. H. (2006). The early numeracy test in Finnish: Children's norms. *Scandinavian Journal of Psychology, 47*(5), 369–378. https://doi.org/ https://doi.org/10.1111/j.1467-9450.2006.00538.x

Bagger, A. (2016). *Quality and equity in the era of national testing: The case of Sweden. I World yearbook of education 2017* (s. 68–88). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315517377

Bagger, A., Vennberg, H. & Björklund Boistrup, L. (2019). The politics of early assessment in mathematics education. I U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1831–1838). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Björklund, C., Elofsson, J., Ekdahl, A.-L., Kullberg, A., Alkhede, M. & Runesson Kempe, U. (2022). *Kartläggning av matematikundervisning om tal i förskoleklass*. Göteborgs Universitet. https://www.gu.se/sites/default/files/2022-05/SATSA_kartläggning.pdf

Björklund, C. & Elofsson, J. (2024). The appearance of playfulness in Swedish preschool class mathematics teaching. I H. Palmér, C. Björklund, E. Reikerås & J. Elofsson (Red.), *Teaching mathematics as to be meaningful – Foregrounding play and children's perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37663-4_18

Blossing, U. & Söderström, Å. (2013). A school for every child in Sweden. I U. Blossing, G. Imsen & L. Moos (Red.), *The Nordic education model* (s. 17–34). Springer.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41–62. https://doi.org/10.2307/749717

Boaler, J. (2006). How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory Into Practice*, *45*(1), 40–46. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4501_6

Boaler, J. (2008). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach. *British Educational Research Journal*, *34*(2), 167–194. https://doi.org/10.1080/01411920701532145

Boaler, J., Altendorff, L. & Kent, G. (2011). Mathematics and science inequalities in the United Kingdom: When elitism, sexism and culture collide. *Oxford Review of Education*, *37*(4), 457–484. https://doi.org/10.1080/03054985.2011.595551

Boaler, J. & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of railside school. *Teachers College Record*, *110*(3), 608–645. https://doi.org/10.1177/016146810811000302

Boaler, J., Wiliam, D. & Brown, M. (2000). Students' experiences of ability grouping: Disaffection, polarisation and the construction of failure. *British Educational Research Journal*, *26*(5), 631–648. http://www.jstor.org.www.bibproxy.du.se/stable/1501995

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, *33*(8), 3–15. https://doi.org/10.3102/0013189x033008003

Buchholtz, N., Stuart, A. & Frønes, T. S. (2020). Equity, equality and diversity - Putting educational justice in the Nordic model to a test. I T. S. Frønes, A. Pettersen, J. Radišić & N. Buchholtz (Red.), *Equity, equality and diversity in the Nordic model of education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61648-9

Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. (2018). Assessment in the service of learning: Challenges and opportunities or plus ça change, plus c'est la même chose. *ZDM*, *50*(4), 571–585. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0937-1

Cazden, C. B. & Beck, S. W. (2003). Classroom discourse. I A. C. Graesser, M. A. Gernsbacher & S. R. Goldman (Red.), *Handbook of discourse processes* (s. 165–197). Lawrence Erlbaum Associates Publishers. https://doi.org/10.4324/9781410607348

Chapin, S. H., O'Connor, M. C. & Anderson, N. C. (2009). *Classroom discussions: using math talk to help students learn* (2 uppl.). Math Solutions.

Cohen, E. G. E. & Lotan, R. A. E. (1997). *Working for equity in heterogeneous classrooms: sociological theory in practice*. Teachers College Press.

Dong, Y., Clements, D. H., Day-Hess, C. A., Sarama, J. & Dumas, D. (2021). Measuring early childhood mathematical cognition: Validating and equating two forms of the research-based early mathematics assessment. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *39*(8), 983–998. https://doi.org/10.1177/07342829211037195

Engle, R. A. & Conant, F. R. (2002). Guiding principles for fostering productive disciplinary engagement: Explaining an emergent argument in a community of learners classroom. *Cognition and Instruction*, 20(4), 399–483.

Ewing, B. (2006). 'Go to the page and work it from there': Young people's experiences of learning mathematics from a text. *Australian Senior Mathematics Journal*, *20*(1), 8–14.

Franke, M. L. & Kazemi, E. (2001). Teaching as learning within a community of practice. I T. Wood, B. S. Nelson & J. E. Warfield (Red.), *Beyond classical pedagogy* (s. 47–74). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410612335

Fraser, S. (2004). *Doing research with children and young people*. SAGE.

Gardesten, M. & Palmér, H. (2023). Students' participation in mathematics in inclusive classrooms: A study of the enacted mathematical and relational knowing of teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–21. https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2258485

Gauthier, L. (2016). Redesigning for student success: Cultivating communities of practice in a higher education classroom. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, *16*(2), 1–13. https://doi.org/10.14434/josotl.v16i2.19196

Giota, J. & Emanuelsson, I. (2011). *Specialpedagogiskt stöd, till vem och hur? Rektorers hantering av policyfrågor kring stödet i kommunala och fristående skolor.* Göteborgs Universitet. https://gupea.ub.gu.se/bitstream/handle/2077/24569/gupea_2077_24569_1.pdf;jsessionid=A1D5F6643B31618052074416ECED308B?sequence=1

Goos, M. E. & Bennison, A. (2008). Developing a communal identity as beginning teachers of mathematics: Emergence of an online community of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 41–60. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9061-9

Greig, A., Taylor, J. & MacKay, T. (2013). *Doing research with children: a practical guide* (3 uppl.). SAGE.

Gutiérrez, J. F., Brown, S. A. & Alibali, M. W. (2018). Relational equity and mathematics learning: Mutual construction during collaborative problem solving. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 159–187. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.91

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem*. Liber.

Helenius, O., Johansson, M. L., Lange, T., Meaney, T., Riesbeck, E. & Wernberg, A. (2016). When is young children's play mathematical?. I T. Meaney, O. Helenius, M. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics education in the early years*(s. 139–156). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_8

Hodges, T. E. & Cady, J. (2013). Blended-format professional development and the emergence of communities of practice. *Mathematics Education Research Journal*, *25*(2), 299–316. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0065-0

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). I*ntentional talk: how to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Llewellyn, A. & Mendick, H. (2011). Does every child count? Quality, equity and mathematics with/in neoliberalism. I B. Atweh, M. Graven, W. Secada & P. Valero (Red.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (s. 49–62). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_4

Maxwell, J. A. (2004). Causal explanation, qualitative research, and scientific inquiry in education. *Educational Researcher*, *33*(2), 3–11. https://doi.org/10.3102/0013189x033002003

Margrain, V. & van Bommel, J. (2023). Assessment and gifted discourse in Swedish early years education steering documents: The problem of (in)visibility. *Education Sciences*, *13*(9), 904. https://doi.org/10.3390/educsci13090904

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Publications.

McKenney, S. E. & Reeves, T. C. (2019). *Conducting educational design research* (2 uppl.). Routledge.

Michaels, S. & O'Connor, C. (2015). Conceptualizing talk moves as tools: Professional development approaches for academically productive discussions. I B. R. Lauren, S. C. A. Christa & N. C. Sherice (Red.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (s. 347–156). American Educational Research Association. https://doi.org/10.3102/978-0-935302-43-1_27

Nic Mhuirí, S. (2014). Investigating student participation trajectories in a mathematical discourse community. I P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Red.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (s. 297–304). Lebonfon.

Nortvedt, G. A. & Buchholtz, N. (2018). Assessment in mathematics education: Responding to issues regarding methodology, policy, and equity. *ZDM*, *50*(4), 555–570. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0963-z

O'Connor, C. & Michaels, S. (2017). Supporting teachers in taking up productive talk moves: The long road to professional learning at scale. *International Journal of Educational Research*, *97*, 166–175. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.11.003

Palmér, H. & Roos, H. (2017). What is implied when researchers claim to use a theory? *International Journal of Research & Method in Education*, *40*(5), 471–479. https://doi.org/10.1080/1743727X.2016.1166487

Palmér, H. & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: What does posing a similar task imply to students? *ZDM*, *52*(4), 743–752. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x

Palmér, H. & van Bommel, J. (2023). Young students exploring measurement through problem solving and problem posing. *The Mathematics Educator*, *31*(1), 30–54.

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. I T. Plomp & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 11–50). Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Pramling, N. & Pramling Samuelsson, I. (2008). Identifying and solving problems: Making sense of basic mathematics through storytelling in the preschool class. *International Journal of Early Childhood*, *40*(1), 65–79. https://doi.org/10.1007/BF03168364

Pratt, N. & Back, J. (2009). Spaces to discuss mathematics: communities of practice on an online discussion board. *Research in Mathematics Education*, *11*(2), 115–130. https://doi.org/10.1080/14794800903063323

Prediger, S., Gravemeijer, K. & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM*, *47*(6), 877–891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Resnick, L. B., Michaels, S. & O'Connor, C. (2010). How (well structured) talk builds the mind. I D. Preiss & R. J. Sternberg (Red.), *Innovations in educational psychology: perspectives on learning, teaching and human development* (s. 163–194). Springer.

Ruef, J. L. & Shepard, R. (2022). Relational equity: Adapting an elementary mathematics teaching methods course to online contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *17*(4). https://doi.org/10.29333/iejme/12224

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational Researcher*, *43*(8), 404–412. https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

Schoenfeld, A. H. (2023). A theory of teaching. I A.-K. Praetorius & C. Y. Charalambous (Red.), *Theorizing teaching: Current status and open issues* (s. 159–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25613-4_6

Scott, M. (2019). Supporting beginning teachers to engage in relational investigations of teaching and learning. I S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines & C. Munter (Red.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Missouri.

Skolverket. (2009). *Attityder till skolan 2009. Elevernas och lärarnas attityder till skolan*. https://www.skolverket.se/publikationer?id=2385

Skolverket. (2023). *Hitta matematiken: nationellt kartläggningsmaterial i matematiskt tänkande i förskoleklass*. http://www.skolverket.se/undervisning/forskoleklassen/kartlaggning-i-forskoleklassen

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik: för att planera och leda rika matematiska diskussioner* (1 uppl.). Natur & kultur.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Sterner, G., Helenius, O. & Wallby, K. (2014). *Tänka, resonera och räkna i förskoleklass.* Nationellt centrum för matematikutbildning.

Sterner, G., Wolff, U. & Helenius, O. (2019). Reasoning about representations: Effects of an early math intervention. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–19. https://doi.org/10.1080/00313831.2019.1600579

Sterner, G., Nagy, C. & Nyström, P. (2023). A scaled-up mathematics intervention in preschool classes. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–11. https://doi.org/10.1080/00313831.2023.2250352

Sullivan, P., Warren, E. & White, P. (2000). Students' responses to content specific open-ended mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(1), 2–17. https://doi.org/10.1007/BF03217071

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Kartleggingsprøver i regning: veiledning til lærere.*

van Bommel, J. & Palmér, H. (2021). Enhancing young children's understanding of a combinatorial task by using a duo of digital and physical artefacts. *Early Years*, *41*(2–3), 218–231. https://doi.org/10.1080/09575146.2018.1501553

Vennberg, H. (2020). *Att räkna med alla elever: Följa och främja matematiklärande i förskoleklass.* [Doktorsavhandling, Umeå Universitet]. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-168752

Vennberg, H. & Norqvist, M. (2018). *Counting on: Long term effects of an early intervention programme. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 355–362). PME.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed.*

Walla, M. (2022). Diversity of assessment discourses in Swedish and Norwegian early mathematics education. *Journal of Childhood, Education & Society*, *3*(2), 98–111. https://doi.org/10.37291/2717638X.202232178

Walla, M. (2023). Exploring the potential of using talk moves with young students when striving towards an equitable mathematics education. I P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Red.), *Proceedings of the thirteenth congress of the European society for research in mathematics education* (s. 2234–2241). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Walla, M (2024). Diverse meanings ascribed to equity in early mathematics assessment. *Education Inquiry*, 1–17. https://doi.org/10.1080/20004508.2024.2316390

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity.* Cambridge University Press.

Wu, H. (1994). The role of open-ended problems in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 115–128. https://doi.org/10.1016/0732-3123(94)90044-2

Xenofontos, C. (2019). Equity and social justice in mathematics education. I C. Xenofontos (Red.), *Equity in mathematics education: addressing a changing world.* Information Age Publishing.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 8–30

Författarpresentationer

Maria Walla
Maria Walla är doktorand i pedagogiskt arbete vid Högskolan Dalarna. Hennes doktorandprojekt handlar om bedömning och undervisning i matematik i förskoleklass.

Hanna Palmér
Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och tidig matematikundervisning.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 31–45
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Förskoleklasselevers användning av talstrukturer

Orginalartikel

Camilla Björklund[1]*, Jessica Elofsson[2], Angelika Kullberg[1], Anna-Lena Ekdahl[3], Ulla Runesson Kempe[3] & Maria Alkhede[1]

1 Göteborgs universitet

2 Linköpings universitet

3 Jönköping University

*Korresponderande författare:
Camilla Björklund
camilla.bjorklund@ped.gu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 31–45
DOI:10.61998/forskul.v12i2.23890
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Sammanfattning

I artikeln presenteras och diskuteras förskoleklasselevers förmåga att se och använda talstrukturer för att bestämma antal, samt hur förmågan utvecklas efter att de deltagit i interventioner under ett läsår. Totalt intervjuades 361 elever som deltagit i interventionerna alternativt i vanlig förskoleklassundervisning. Intervjuerna gjordes under tidig hösttermin samt vid förskoleklassårets slut. En specifik uppgift innehållande ett spatialt mönster i intervjumaterialet utgör underlag för att synliggöra hur eleverna erfar och använder talstrukturer, både kvantitativt och kvalitativt. Analysen tar vidare avstamp i en variationsteoretisk syn på lärande, där sättet att erfara ett fenomen, i detta fall tal och strukturer så som de framträder i en figur ordnad i ett spatialt mönster, har betydelse för vad eleven kan göra med tal, till exempel på vilket sätt man kan bestämma antal. Särskilt diskuteras vilka implikationer resultaten har för utvecklingen av matematikundervisning i förskoleklass och elevers fortsatta aritmetiklärande.

Nyckelord: talstrukturer, interventioner, förskoleklass, elevintervjuer

Abstract

In the article, we present and discuss preschool class students' ability to see and use number structures to determine number and how this ability develops after participating in interventions during one academic year. A total of 361 students who participated in the interventions or in regular preschool class teaching were interviewed early in the autumn term and at the end of the school year. One task containing a spatial pattern forms the basis for identifying how students experience and use number structures, quantitatively and qualitatively. The analysis is further based on a variation theory view of learning, where ways of experiencing a phenomenon, in this case numbers and structures as they appear arranged in a spatial pattern, have significance for what students can do with numbers, e.g., how to determine numbers. Implications of the results for developing mathematics teaching in preschool class and students continued arithmetic learning are discussed.

Keywords: Number structures, Interventions, Preschool class, Student interviews

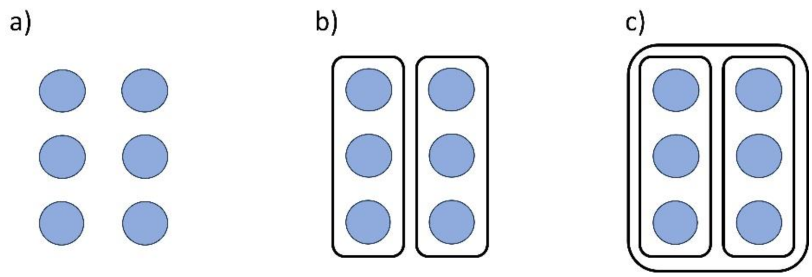
Introduktion

En av de vanligaste frågorna elever möter i den tidiga matematikundervisningen handlar om att svara på “hur många” och att bestämma antal i avgränsade mängder. I litteraturen finns det också många observationer av hur barn går till väga och vilka strategier de använder i dessa sammanhang (Fuson, 1992). Intresset för att förstå hur elever gör för att bestämma antal och vilka kompetenser de behöver utveckla är stort, eftersom detta anses vara en grundläggande färdighet för att kunna använda tal på ett framgångsrikt sätt i problemlösning som handlar om kvantiteter. I föreliggande artikel riktar vi uppmärksamheten mot talstrukturer, som en betydelsefull aspekt av taluppfattning och räknefärdigheter. Att se tal som uppbyggda i talstrukturer innebär att urskilja relationer inom och mellan tal, såsom att fem består av tre och två samt att fem är två mer än tre (se Baroody, 1987). Det innebär vidare att eleven kan urskilja grupper av objekt i en mängd, samband mellan dessa och hur de tillsammans bildar en helhet som kan benämnas med ett tal (Venkat m.fl., 2019). Strukturen är alltså den underliggande regelbundenhet och generella princip som definierar tal, vilket kan kännas igen i såväl spatiala mönster (t.ex. prickar ordnade som ett tärningsmönster eller som mönstret på dominobrickor) som positionssystemet och räkneordens språkliga uppbyggnad (t.ex. tiotal och hundratal).

Tidigare forskning visar att hållbara och utvecklingsbara räknefärdigheter bygger på en utvecklad förståelse för och förmåga att hantera tal som del-helhetsrelationer (Baroody, 2016; Davydov, 1982; Neuman, 2013). När tal ses som en relation mellan helheten och delarna (utgör en struktur) kan detta användas för att bestämma antal och lösa aritmetiska problem. Sprenger och Benz (2020) beskriver utvecklingen av färdigheten att bestämma antal som att barn först inte urskiljer några strukturer av grupperade objekt (se figur 1a). Därefter lär de sig att urskilja delar som utgörs av grupperade objekt (se figur 1b), men kan ännu inte använda strukturen för att bestämma antalet (helheten). Slutligen kan barn använda talstrukturer för att bestämma antalet (se figur 1c). Det som förblir oklart i forskningen är dock vad det är som gör att barn kan eller inte kan använda sig av talstrukturer för att bestämma antal, samt hur undervisning kan ge stöd för elever att lära sig se och använda sådana strukturer på ett framgångsrikt sätt.

Figur 1

Sätt att urskilja delar i relation till en helhet



Not. a) inga strukturer av grupperade objekt urskiljs, objekten räknas vanligtvis en efter en, b) grupperade objekt urskiljs som delar i den större helheten ”tre och tre”, men relateras inte till en sammansatt helhet, och c) delarna urskiljs som relaterade till helheten och bidrar därmed till att barnet kan bestämma det totala antalet ”tre och tre är sex”.

I denna artikel presenterar och diskuterar vi förskoleklasselevers förmåga att se och använda talstrukturer för att bestämma antal samt hur förmågan utvecklas efter att de har deltagit i interventioner som tar en strukturell ansats, det vill säga där relationer mellan och inom tal (del-helhetsrelationer) synliggörs. Detta görs genom att, utifrån uppgiftsbaserade intervjuer med 361 förskoleklasselever som deltagit antingen i interventionerna eller i vanlig förskoleklassundervisning, identifiera hur de erfar och förmår använda talstrukturer i ett spatialt mönster.

Bestämma antal

När barn ska bestämma antalet objekt i en liten mängd kan de göra det genom att enbart titta snabbt på mängden (perceptuell subitisering). När mängden blir större behöver de däremot antingen känna igen ett mönster som framträder spatialt (von Glasersfeld, 1982), gruppera kända delar för att bestämma helheten (konceptuell subitisering, se Clements m.fl., 2019) eller räkna objekten. Konceptuell subitisering omfattar även om någon del uppfattats som en grupp och övriga räknats en och en för att bestämma antalet (Clements & Sarama, 2021). Konceptuell subitisering är relaterad till förmågan att strukturera antal i sammansatta enheter (grupper, units, se figur 1).

Förmågan att se ett antal objekt som en helhet eller en enhet, till exempel att fem enskilda objekt tillsammans utgör en samling som benämns ”fem”, vilket också kan ses som en ”femenhet”, har stor betydelse för elevernas fortsatta matematiklärande (Hunting, 2003; Paliwal & Baroody, 2020). Enligt Benz (2013) kan barn redan i förskoleåldern erfara strukturer i kvantiteter och använda dem för att bestämma antal. När elever (perceptuellt) strukturerar antal i subgrupper (se exempel c i figur 1) innebär det en särskild förmåga att se helhet och delar. Schöner och Benz (2018) menar till exempel att när en elev säger “Två, tre och två till är sju” så erfar eleven struktur (talrelationer i form av delar som tillsammans är 7) och kan använda sig av strukturen för att bestämma antalet. Det skulle kunna tolkas som att eleven erfar en grupp med två och en grupp med tre som fem, och fem och två som sju, det vill säga flera sammansatta delar som relaterar till en helhet.

Tidigare studier som har fokuserat på hur barn ser struktur har bland annat studerat vilka grupperingar de gör. Sprenger och Benz (2020) undersökte med hjälp av teknik som följer ögonrörelser (eyetracking) hur femåringar visuellt grupperar objekt när de ska bestämma antal i en mängd. De fann att 12–35 procent av femåringarna inte använde sig av struktur och att användning av struktur varierade mellan 25–66 procent beroende på antal objekt i mängderna. Hur objekten var placerade visade sig ha betydelse för om barnen använde struktur eller inte. Om fem objekt var placerade i en rad (i en äggkartong) så använde barnen sig i lägre grad av struktur än om fem objekt var placerade i två rader som tre och två. Det verkar alltså kunna bero på hur objekten är ordnade, om barnen som kan skapa grupper gör det, men att det också finns barn som ännu inte använder någon form av struktur.

Forskning och teorier om barns utveckling av räknefärdigheter är omfattande, men samstämmiga i att en förutsättning är barns förmåga att uppfatta enheter (units), det vill säga att objekt i omvärlden kan ses tillhöra en gemensam samling eller grupp, vilken initialt inte är numerisk till sin innebörd utan snarare har betydelsen att något kan tillhöra en viss kategori av objekt och utgör en obestämd ”månghet” (Steffe, 1991). Det är av betydelse att känna igen figurativa mönster hos sådana samlingar av objekt, menar Steffe, eftersom det bidrar till att barn känner igen liknande mönster och knyter dem till representationer såsom räkneord. Detta innebär att barnet som till exempel hör “fyra” associerar till objekt ordnade på samma sätt som till exempel på en tärning (en prick i varje hörn på en av tärningens sidor). Figurativa mönster som känns igen från tärningen har däremot inte självklart den nödvändiga numeriska betydelsen, utan är snarare igenkänning av en “bild” eller figur. Att uppfatta mönster som numeriska innebär däremot att det är *antalet* objekt ordnade i ett visst mönster som framträder för barnet och är en grund för att urskilja hur grupper kan ses som delar i en större helhet, det vill säga skapa en struktur. Mandler och Shebo (1982) visade empiriskt att sättet som objekt är ordnade, och därmed hur de perceptuellt erfars, spelar roll för säkerheten i att uppskatta antal. Vuxna tenderar att "se" grupper om två och tre, men också kända mönster såsom sidan med fem prickar på en tärning (en prick i varje hörn och en i mitten), vilket ger stöd för att uppskatta antal också i större mängder. Spatiala mönster underlättar alltså att känna igen och urskilja mängder som sammansatta av mindre enheter. Paralleller kan dras till subitisering genom att grupper av objekt uppfattas genom likhet och skillnad i antal intuitivt, utan att räkna (Kaufmann m.fl., 1949; Wynn, 1998). I och med att denna kognitiva process visat sig vara oberoende av hur objekt är ordnade, förmodas den bidra till att kvantiteter "känns igen" som lika eller olika i antal, det vill säga abstraheras så att "fyra" betyder ett specifikt antal oberoende av hur objekten är ordnade. Att uppfatta antal i grupper på detta sätt kan bidra till att förstå och använda tal. I likhet med detta betonar Davydov (1982) särskilt skapandet av enheter (units) som grund för räknefärdigheternas utveckling, som operationaliseras till exempel i mätande, där mindre enheter ingår som delar i en större helhet och varje enhet bör erfaras utifrån egenskapen "månghet". Det tycks således, i ett samstämmigt forskningsfält, vara kritiskt att elever lär sig se tal som sammansatta enheter för att de ska kunna använda strategier i addition och subtraktion som bygger på del-helhetsrelationen hos tal. Hur elever når en sådan förståelse för tal förklaras däremot på olika sätt beroende på teoretisk utgångspunkt. Och få har riktat fokus mot på vilka sätt elever erfar och använder talstrukturer.

Metod

Implementering av matematikinterventioner med strukturell ansats i förskoleklass

I samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare har undervisning som bygger på att utveckla elevers uppfattningar av tal som talstrukturer prövats ut under ett läsår. Eleverna har i undervisningen mött tal presenterade som del-helhetsrelationer, det vill säga att tal är sammansatta av mindre tal och att talrelationerna är ett stöd i aritmetisk problemlösning.

Två tidigare beprövade interventionsprogram med positiva resultat för matematikutveckling hos yngre elever har legat till grund för SATSA-interventionerna, dels Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS) som utvecklats av Mulligan och Mitchelmore (2009) för den australiensiska skolkontexten, dels interventioner som tar stöd i Davydov med kollegors arbete (1999) utvecklad inom ett kulturhistoriskt perspektiv samt variationsteoretiska studier av nödvändiga aspekter för att utveckla taluppfattning (Björklund m.fl. 2021; Kullberg m.fl., 2020). Gemensamt för dessa program är utgångspunkten i att se tal som bestående av enheter vilka kan vara större än ett (units) och genom systematiskt undersökande undervisning erbjuda stöd för eleverna att se relationer inom och mellan tal. Ett exempel på en sådan undervisningsaktivitet är att dela upp sju apor i två träd (se Cobb m.fl., 1997), där den additiva strukturen hos talet sju uppmärksammas i den variation av uppdelningar som är möjlig. Ett annat exempel på undervisningsaktivitet är att dela upp ett antal kex mellan två eller flera hundar (se Mulligan & Mitchelmore, 2016), där den multiplikativa strukturen hos talen sätts i förgrunden.

Även om interventionerna har utvecklats i olika utbildningskontexter, har vi i SATSA-projektet kunnat pröva hur den *strukturella ansatsen* varit möjlig att implementera i den svenska förskoleklasskontexten genom nära samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare. Ett teoretiskt stöd för implementeringen har varit variationsteori för lärande (VT, Marton, 2015). VT har lämpat sig väl i förhållande till de matematikdidaktiska programmen som legat till grund för SATSA, i och med att tyngdpunkten då lagts på vad som sätts i förgrund för elevernas erfarande och undersökande och hur innebörden och användbarheten av tal och räknande då framträder.

Det genomgående lärandeobjektet i interventionerna har varit tals del-helhetsrelation. Undervisningsaktiviteterna innehåller aspekter som tillsammans förmodas omfatta vad som är nödvändigt att erfara för att förstå och använda tal i aritmetisk problemlösning. Undervisningen fokuserar därmed primärt på hur det matematiska innehållet ska behandlas i undervisningen, och hur de nödvändiga aspekterna kan göras synliga genom systematiska undersökningar, till exempel att hålla en helhet konstant och systematiskt variera delarna inom denna helhet snarare än att variera undervisningsmetoder. SATSA har hållit sig inom ett relativt lågt talområde och fokuserat på att synliggöra talrelationer, i början genom att undersöka tal som enheter större än ett, därefter hur samma tal kan bestå av varierande talkombinationer och slutligen hur tal kan ses som strukturer (bland annat med fem eller tio som enheter) i avsikt att ge eleverna stöttning i att utveckla sina sätt att erfara tal som del-helhetsrelationer och använda detta i aritmetisk problemlösning. Som stöd i undervisningen har olika artefakter och representationer (bl.a. tärningar, tioramar samt material ordnade i semidecimala strukturer) använts för att synliggöra samband inom och mellan tal.

Undervisningen är vetenskapligt grundad men tidigare prövad främst i andra utbildningskontexter än svensk förskoleklass, vilket gjort att anpassningar har behövt göras i samråd med lärarna för att undervisningsaktiviteterna ska respondera mot den svenska förskoleklasskontexten. I återkommande möten diskuterades videodokumentationer från lärarnas undervisning kollegialt för att synliggöra lärandemöjligheterna och hur tals del-helhetsrelationer uttryckta i strukturer gjordes till objekt för lärande i undervisningen och hur detta ytterligare kunde förfinas. Särskilt intressant för utveckling av undervisning är därmed på vilket sätt eleverna *lärt sig se och använda talstrukture*r för att bestämma antal, som grund för fortsatt fördjupat lärande i matematik, det vill säga hållbara och utvecklingsbara strategier.

Datainsamling

Underlaget för analysen är uppgiftsbaserade intervjuer som genomförts med 361 elever i början och i slutet av förskoleklassåret. 192 av eleverna har deltagit i interventioner inom SATSA-projektet under läsåret 2022–2023 och 169 elever har deltagit i ordinarie matematikundervisning (jämförelsegrupp).

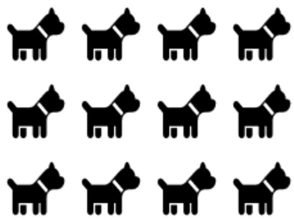
Totalt deltog elever från fem olika kommuner i södra Sverige. Informationsbrev och samtyckesblanketter skickades ut till samtliga vårdnadshavare. I respektive klass intervjuades tio slumpmässigt utvalda elever vars vårdnadshavare hade gett samtycke för deltagande. Elevintervjuerna genomfördes enskilt i ett rum i nära anslutning till klassrummet. Intervjuguiden bestod av uppgifter som eleverna skulle besvara muntligt. Ingen ljudupptagning gjordes vid intervjutillfället, i stället användes ett protokoll där forskaren kortfattat antecknade vad eleven svarade. En elevintervju tog cirka 15 minuter. Efter intervjuerna kodades hela datamaterialet av respektive intervjuande forskare. Vid tveksamma fall har forskargruppen gemensamt diskuterat alternativa kodningar för att uppnå samstämmighet.

I den här artikeln har en uppgift valts ut för djupare analys av elevernas sätt att *bestämma antal*. I analysen låg tyngdpunkten på att dels beskriva hur elever använder talstrukturer i uppgiften där de ska bestämma ett antal (kvantitativt), dels i kvalitativa former beskriva hur eleverna genom interventionen lärt sig erfara tal och hur talstrukturer kan användas. Uppgiften är ett spatialt mönster där 12 objekt är ordnade i 4 kolumner och 3 rader (se figur 2) . I uppgiften är antalet objekt fler än vad kognitiva processer såsom subitisering omfattar, vilket gör att eleven måste nyttja någon sorts strategi för att bestämma antal, såsom att urskilja talstrukturer som framträder i mönstret.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 31–45

Uppgiften presenterades genom att intervjuaren visar en bild på ett A4-papper för eleven. Intervjuaren ställde sedan två frågor (a respektive b, se figur 2[1]). Båda frågorna öppnade upp för elever att uttrycka olika sätt att erfara antal. Det är också möjligt att få reda på om eleverna använder olika strategier på fråga a och b. Eleven har möjlighet att uttrycka sig verbalt men kan även peka och visa på bilden. Intervjuaren hade i sitt protokoll en likadan bild och förutom att anteckna vad eleven svarade, markerades också hur eleven pekade och visade. Vid genomförandet av elevintervjuerna ställdes uppgiften i slutet av intervjun.

Figur 2
Uppgift med spatialt mönster

Uppgift	Hundarna	
Fråga a) Fråga b)	Hur kan man SE, hur många hundar det är? Hur många hundar är det tillsammans?	

Analys

Elevernas respons på uppgifterna i intervjuerna dokumenterades i ett protokoll med särskilt fokus på elevernas val av strategier för att lösa uppgifterna. Fråga a i den uppgift som analyserades efterfrågar inget exakt antal som svar utan fokuserar eventuellt urskiljande av struktur, medan fråga b efterfrågar det exakta antalet (hur många?). Responsen kodades dels som utfall i rätt, fel eller inget slutgiltigt svar, dels avseende vilken strategi eller ansats som användes (en-stegsräkning eller strukturanvändning). I de fall som eleven gav uttryck för en strukturerande ansats dokumenterades också på vilket sätt strukturen framträdde till exempel i gruppering om två eller tre enheter, utifrån resonemang såsom ”dubblor” (se figur 3). En elev som säger “jag ser fyra, fyra och fyra” följt av “det är tolv”, kodas därmed i fråga a som x.3.4 och i fråga b som 1.3.4.

Figur 3
Kodnyckel

Kodnyckel

X.x.x utfall i rätt eller fel eller inget slutgiltigt svar
x.**X**.x strategi/ansats
x.x.**X** vilken struktur framträder

Not. Kodnyckel för kodning av observerade strategier i de uppgiftsbaserade intervjuerna.

För att få en samlad bild av elevernas erfarande och användande av talstrukturer för att bestämma antal före och efter att ha deltagit i interventionerna gjordes en kvantitativ översikt

1 Uppgift inspirerad av Mulligan, Mitchelmore och Stephanou (2015).

av frekvensvärden av elevernas sätt att lösa uppgiften i någon av tre övergripande kategorier: strukturering, enstegsräkning alternativt inget svar. Strukturering kännetecknas av att eleven ser uppgiften som en del-helhetsrelation och använder sig av enheter större än ett i sitt resonemang, exempelvis ser det spatiala mönstret som tre rader med fyra i varje. Enstegsräkning kännetecknas av att eleven räknar alla objekten (hundar) en och en. I denna kategori hamnar även de elever som endast strukturerar ett mindre antal/en mindre del, exempelvis ser fyra hundar och sedan räknar: ”fem, sex, sju, åtta, nio, tio, elva, tolv”. I den tredje kategorin inryms de elever som inte ger något svar på frågorna.

Intresset i denna studie riktades även mot hur eleverna erfar, eller ser, talstrukturer i figuren, vilket besvarades kvalitativt genom en noggrannare analys av protokoll och fältanteckningar från intervjuerna. I denna analys tog vi en variationsteoretisk ansats, där erfarande är ett centralt begrepp. Att erfara något innebär hur en individ ser (uppfattar, tolkar eller förstår) något, som en holistisk sammansatt förståelse (Marton & Pong, 2005). Erfarandet (t.ex. på vilket sätt en elev ser en figur framför sig) är i sig en funktion av de aspekter av fenomenet som individen förmår att samtidigt urskilja vid ett givet tillfälle. Individen är ständigt medveten om många aspekter som utgör olika fenomen i omvärlden, men de flesta befinner sig i medvetandets bakgrund medan vissa framträder (Marton & Booth, 1997). Vilka aspekter som framträder för individen beror dels på vad individen erfarit tidigare, till exempel hur tal kan ses som enheter större än ett, dels vad som görs möjligt att urskilja i den specifika situation, såsom hur en figur är spatialt ordnad i ett mönster av rader och kolumner. Utifrån detta antagande, om vad som urskiljs av elever som möter ett spatialt mönster, identifierade vi vad som framträder för eleverna och tolkade detta i termer av hur eleven erfar strukturer, i vilka delar och helhet kan sättas i förgrund eller bakgrund i elevens medvetande. På så vis framträdde olika sätt att erfara struktur och använda talstrukturer för att bestämma antal i uppgiften. Denna analys gjordes på både a- och b-frågan.

Resultat

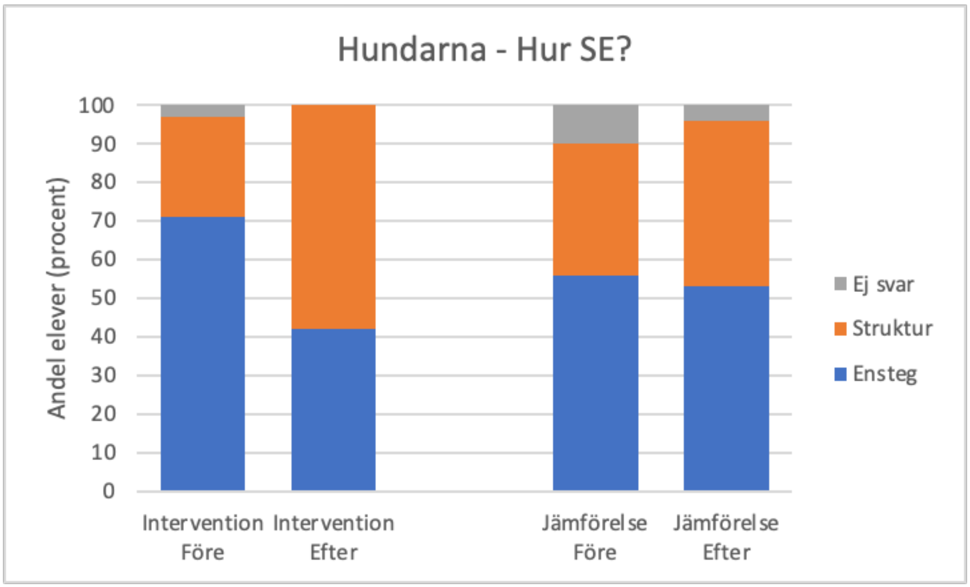
Resultatet från elevintervjuerna vid förskoleklassårets början visar att eleverna nyttjar olika strategier för att beskriva hur man kan se och bestämma antalet objekt i hunduppgiften (se figurerna 4 och 5).

I den första delfrågan (fråga a) Hur kan man SE hur många hundar det är? uppmanas eleverna att visa, säga eller på något sätt uttrycka på vilket sätt man kan se antalet hundar. När eleverna i interventionsgruppen beskriver hur man kan se antalet hundar nyttjar 71 procent av eleverna enstegsräkning, medan 26 procent i stället nyttjar struktur för att beskriva detta. Ett fåtal elever (3%) ger inget svar på frågan (se figur 4). I jämförelsegruppen är det 56 procent av eleverna som vid den första elevintervjun nyttjar enstegsräkning när de beskriver hur man kan se antalet hundar, medan 34 procent av eleverna nyttjar struktur för att beskriva hur man kan se antalet. I jämförelsegruppen är det 10 procent av eleverna som inte ger något svar vid det första intervjutillfället (se figur 4). Andelen elever som nyttjar enstegsräkning vid det första intervjutillfället är större i interventionsgruppen än i jämförelsegruppen (71% vs. 56%) och andelen elever som nyttjar struktur är mindre i interventionsgruppen än i jämförelsegruppen vid samma intervjutillfälle (26% vs. 34%).

Vid det andra intervjutillfället i slutet av förskoleklassåret kan vi se skillnader i andelen elever som nyttjar enstegsräkning respektive struktur för att beskriva hur man kan se antalet hundar. Av de elever som deltagit i interventionerna under läsåret nyttjar nu 42 procent av eleverna enstegsräkning när de beskriver hur man kan se antalet hundar i det spatiala mönstret, vilket är en minskning med nästan 30 procentenheter jämfört med det första intervjutillfället. Alla elever ger svar på frågan vid det andra intervjutillfället vilket innebär att det är 58 procent av eleverna som nyttjar struktur i sin beskrivning. För jämförelsegruppen kan vi notera att andelen elever som enstegsräknar vid det andra intervjutillfället är näst intill oförändrad (minskning med 3 procentenheter) medan andelen elever som nyttjar struktur ökat med 9 procentenheter. Ett fåtal elever i jämförelsegruppen (4%) ger inget svar på hur man kan se antalet hundar vid det andra intervjutillfället.

Figur 4

Strategier för att lösa uppgift a)



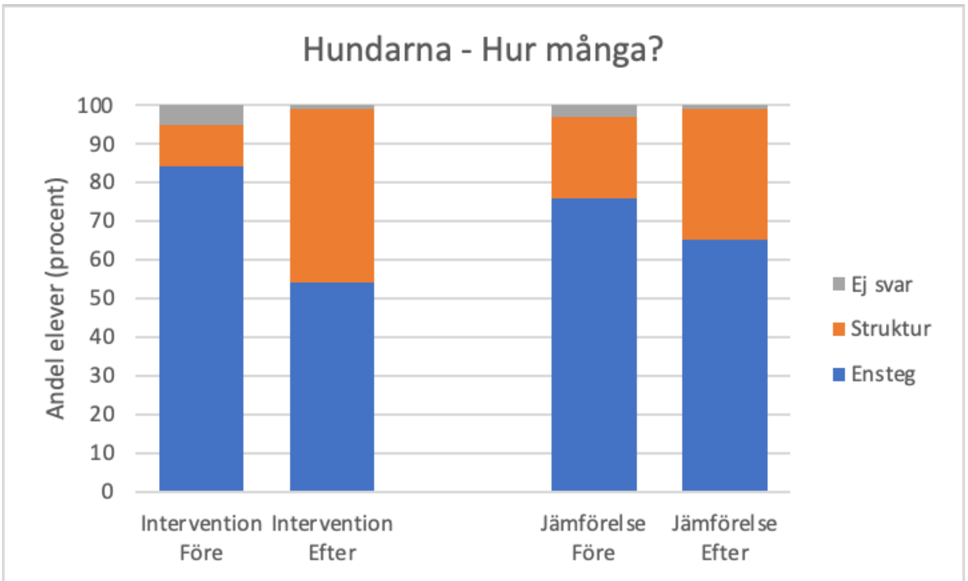
Not. Andel elever som använder enstegsräkning (blått) och struktur (orange) före och efter interventionstillfället för interventions- och jämförelsegruppen för att beskriva hur man kan se antalet hundar. Andelen elever som ej lämnade svar är också representerade (grått).

I den andra delfrågan (fråga b) uppmanades eleverna att tala om "hur många" hundar som finns i det spatiala mönstret. När eleverna i interventionsgruppen tar reda på antalet hundar vid den första elevintervjun nyttjar 84 procent enstegsräkning, medan 11 procent av eleverna i stället nyttjar struktur för att beskriva detta. Ett fåtal elever (5%) ger inget svar på frågan (se figur 5). I jämförelsegruppen är det 76 procent av eleverna som vid den första elevintervjun nyttjar enstegsräkning när de bestämmer antalet hundar, medan 21 procent av eleverna i jämförelsegruppen nyttjar struktur när de bestämmer det totala antalet hundar i mönstret. I jämförelsegruppen är det 3 procent av eleverna som inte ger något svar vid det första intervjutillfället (se figur 5). Det kan noteras att även i b-uppgiften är andelen elever som nyttjar enstegsräkning vid det första intervjutillfället något större i interventionsgruppen jämfört med jämförelsegruppen (84% vs. 76%). Andelen elever i interventionsgruppen som nyttjar struktur för att bestämma antalet hundar är lägre jämfört med jämförelsegruppen (11% vs. 21%).

I slutet av förskoleklassåret när den andra intervjun genomförs kan vi se skillnader i andelen elever som nyttjar enstegsräkning respektive struktur när de ska svara på hur många hundar det är i det spatiala mönstret. I interventionsgruppen är det 54 procent av eleverna som nyttjar enstegsräkning för att bestämma antalet hundar, en minskning med 30 procentenheter mot första intervjutillfället. Andelen elever som nyttjar struktur för att bestämma antalet har i sin tur ökat från 11 procent vid den första intervjun till 45 procent vid det andra intervjutillfället. För jämförelsegruppen kan vi notera att andelen elever som enstegsräknar vid det andra intervjutillfället minskat med 11 procentenheter medan andelen elever som nyttjar struktur ökat med 13 procentenheter (från 21% till 34%, se figur 5). En slutsats vi kan dra utifrån detta är att fler elever i både interventions- och jämförelseklasser använder strukturer efter förskoleklassåret, men de elever som deltagit i interventionerna har utvecklat sin förmåga att använda strukturer i mycket högre grad.

Figur 5

Strategier för att lösa uppgift b)



Not. Andel elever som använder enstegsräkning (blått) och struktur (orange) före och efter interventionstillfället för interventions- och jämförelsegruppen för att svara på hur många hundar det är. Andelen elever som ej lämnade svar är också representerade (grått).

Ett intressant resultat är att många elever väljer att enstegsräkna när de ombeds bestämma exakt antal objekt även om en stor andel visat sig kunna urskilja strukturer i figuren med hundarna. Med andra ord, eleverna urskiljer grupper, det vill säga enheter större än ett, men förmår nödvändigtvis inte erfara dem som en del-helhetsrelation. I den följande resultatredovisningen riktar vi uppmärksamheten mot sättet som eleverna erfar struktur för att göra en kvalitativ analys av vad de olika sätten innebär.

I det följande beskrivs de sätt på vilka eleverna använder sig av någon form av struktur när elevernas svar på både a-frågan (hur kan man SE) och b-frågan (hur många) tolkas som en helhet. Sättet att erfara struktur relateras till huruvida del-helhetsrelationen framträder för eleverna som en nödvändig aspekt att erfara för att kunna använda talstrukturer i syfte att bestämma antal. Denna analys leder oss närmare svaret på det som uppdagades i den kvantitativa analysen: varför elever som tycks ha lärt sig strukturera har svårigheter att använda strukturerna för att bestämma antal.

Uppgiften med hundarna visade sig vara svår för eleverna att direkt se antalet. Ytterst få elever svarar snabbt och säkert ett korrekt antal utan tycks behöva resonera sig fram på ett eller annat sätt till ett svar. I och med att antalet objekt är relativt stort att uppskatta resonerar sig eleverna i stället fram till hur många det kan vara, det vill säga de beskriver strukturen de urskiljer i figuren och tar sig på så sätt fram till ett svar, ofta genom resonemang kring subitiserbara grupper som eleverna pekar ut i figuren. Att urskilja 3-grupper och 4-grupper är vanligast, vilket sannolikt grundar sig i att figuren är uppbyggd som en 3x4-rektangel där grupperna av tre eller fyra är subitiserbara för eleven och ses som enheter.

Fyra distinkta sätt att erfara det spatiala mönstret framträder i analysen, vilka kan identifieras utifrån hur eleven urskiljer delar och helheter och särskilt relationen mellan dessa. Eleverna erfar det spatiala mönstret som:

A. *Sammansatta enheter utan relation till helheten*: eleven urskiljer enbart enheter större än ett (dvs. sammansatta), men ser ingen relation till helheten 12.

B. *Enstaka enheter med relation till helheten:* eleven urskiljer enstaka enheter (1) i en struktur som kan innebära en helhet av 12. Denna helhet utgörs inte av grupper som enheter större än ett inom denna helhet.

C. *Sammansatta och enstaka enheter med relation till helheten*: eleven urskiljer (minst) två grupper i figuren som (sammansatta) enheter större än 1 vilka tillsammans utgör en helhet. Eleven urskiljer resterande objekt i figuren som enstaka enheter (1) men erfar inte hur de sammansatta och enstaka enheterna samtidigt relaterar till helheten 12.

D. *Sammansatta enheter med relation till helheten*: eleven urskiljer enheter större än 1 och helheten, samtidigt. Innebörden av 12 är för eleven en helhet inom vilken delar ingår som har en inbördes relation till varandra och till helheten.

A–D ger en översikt av hur eleverna erfar det spatiala mönstret som enheter i förhållande till den större helheten. Särskild vikt har lagts vid huruvida eleverna erfar enheter som sammansatta eller enstaka, samt om helheten urskiljs. I analysen visar det sig vara av betydelse att delar erfars som sammansatta enheter och samtidigt relateras till helheten.

A. Sammansatta enheter utan relation till helheten

En del elever urskiljer sammansatta enheter i det spatiala mönstret, till exempel tre rader med fyra i varje eller fyra kolumner med tre i varje, men förmår inte urskilja hur dessa utgör delar i en större helhet (jämför figur 1b). Det kan ta sig uttryck som att eleven drar med fingret från vänster till höger längs raderna, säger "tre fyror, sen glömde jag var det var, då räknade jag dom" och enstegsräknar för att bestämma det exakta antalet. De sammansatta enheterna bestående av tre grupper med fyra hundar relateras då inte till helheten. För att bestämma antal enstegsräknar därför eleven för att hitta helheten. Den multiplikativa relationen i figuren uttrycks alltså av eleven, men svårigheten ligger i att se hur antalet grupper är relaterade till helheten.

B. Enstaka enheter med relation till helheten

En stor andel av eleverna erfar det spatiala mönstret som enstaka enheter. Det som utmärker detta sätt att se figuren är att eleverna enstegsräknar varje objekt för att bestämma antalet, ingen tydlig struktur av delar och helhet används (jämför figur 1a). Eleverna urskiljer helheten som bestående av 12 enstaka enheter men inga sammansatta enheter. Ibland uppkommer svårigheter med att hålla räkningen på antalet objekt när dessa hanteras som enskilda enheter.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 31–45 Camilla Björklund m.fl.

C. Sammansatta och enstaka enheter med relation till helheten

Eleverna urskiljer vissa grupper i det spatiala mönstret som enheter större än 1, vilka utgör en helhet i sig. En del elever använder strukturen av ”dubblor”, de kan urskilja 4 i två rader som 8 (de jämna delarna relaterar till en helhet). Däremot förmår eleven inte skapa ytterligare grupper av enheter större än 1 att relatera till en större helhet, varför eleven räknar vidare i enstaka enheter tills alla objekt i figuren inkluderats i helheten 12: “9, 10, 11, 12”, vilket kan ses som uttryck för att eleven urskiljer en struktur av ”fyra och fyra som är åtta” men inte har tillräckliga erfarenheter av hur ytterligare en adderad 4-grupp bildar del i den obekanta helheten.

I intervjuerna framträder olika sätt att gruppera sammansatta enheter som följs av enstegsräkning för att bestämma det exakta antalet, till exempel att eleven först sätter ihop två eller flera grupper, oftast lika stora, och därefter de enheter som finns kvar att räkna: ”Här är nio” (håller för dessa med handen, räknar sen) “9, 10, 11, 12.” På vilket sätt eleven erfar de nio hundar som täcks över med handen framgår inte ur datamaterialet, dock är antalet större än ett omfång som är möjligt att subitisera, varför det är sannolikt att eleven urskiljer någon form av struktur i de nio hundarna (tre kolumner med tre i varje) medan den sista kolumnen inte uttrycks som en sammansatt enhet utan som enstaka enheter som behöver räknas fram.

D. Sammansatta enheter med relation till helheten

En del elever kan ge ett snabbt och säkert svar och vanligtvis beskriva ett matematiskt resonemang som leder till svaret när de ombeds beskriva hur de kom fram till sitt svar. Snabba korrekta svar ges dock sällan i hundarna-uppgiften. Eleverna som svarar snabbt, säkert och korrekt på detta sätt anger det totala antalet redan när de får a-frågan. Strukturen hos det spatiala mönstret erfars samtidigt som delar och helhet – antalet erfars som ett objekt. Användbarheten grundar sig däremot i huruvida eleven kan differentiera delar i helheten och förklara hur talen relaterar till varandra (jämför figur 1c). De flesta elever som svarar snabbt och säkert kan alltså göra den differentieringen vid en följdfråga, men behöver inte ta utgångspunkt i att först urskilja separerade delar för att se hur de tillsammans utgör en helhet.

Många av eleverna erfar det spatiala mönstret som 3- eller 4-grupper och kan också ge svaret 12 på frågan hur många det är tillsammans. De erfar alltså hur jämnstora grupper bildar helheten 12 och uppfattar på så sätt hur delarna relaterar till helheten: “tre, tre, tre och tre. Tolv”. I och med att raderna eller kolumnerna visuellt bildar enheter att ta fasta på blir de framträdande som delar i helheten 12. Ett liknande sätt att resonera sig fram till svar på frågorna kan vi se hos elever som också erfar 3- eller 4-grupper, men i en tydlig additiv struktur: ”fyra och fyra är 8, sen fyra igen är 12” (pekar på raderna, med början på översta raden).

En variant av resonemang som bygger på de urskilda lika stora grupperna inbegriper en samtidig addition där varje del adderas till den föregående och utgör en ny helhet, och på samma sätt växer antalet successivt i elevens resonemang i jämna steg som inkluderar de tidigare urskilda enheterna som en del i en ny helhet: ”fyra, åtta, tolv”.

En del elever tar utgångspunkt i andra kända grupperingar av tal och resonerar utifrån dessa, till exempel ”dubblor”. Figuren med hundarna tenderar att trigga igenkänning av 6-grupper, sannolikt för att objekten kan ses som ”tärningssexor”. 6-grupper är dock inte lika perceptuellt urskiljbara som 3- och 4-grupper eftersom 6-enheten är sammansatt av enheter som i sig inte utgör hela rader. Raderna och kolumnerna drar uppmärksamheten till sig och bidrar till att grupperna urskiljs, men en del elever erfar ändå andra grupper av objekt i mönstret, till exempel att se grupper om två där mönstret inte direkt triggar en perceptuell avgränsning, till exempel ”två, fyra, sex, åtta, tio, tolv” samtidigt som eleven pekar på två hundar i taget. Eleven urskiljer då 2-grupper och adderar dem till att bilda en större helhet. Att eleven räknar i “tvåskutt” för att bestämma antalet kan vara ett uttryck för att hen tar utgångspunkt i jämna delar (två-grupper) men samtidigt ser hur delar bygger upp den större helheten: varje 2-grupp som läggs till relateras samtidigt till de tidigare 2-grupperna och till en allt mer växande helhet.

Konklusion

Den kvalitativa analysen utmynnar i kvalitativt skilda sätt att erfara och använda strukturer (se A, C och D ovan), medan elever som endast urskiljer enstaka enheter som enstegsräknas (se B ovan) inte har innebörden av talstruktur i mening av att urskilja relationen mellan enheter större än ett i det spatiala mönstret. Flertalet elever visar sig alltså inte använda strukturer på ett framgångsrikt sätt även om de deltagit i interventionen där stor tyngd lagts vid att synliggöra del-helhetsrelationen hos tal. Analysen visar att urskilda (sammansatta) enheter inte med nödvändighet relateras till en sammanhållen helhet, samtidigt (se A, B och C), vilket verkar vara av betydelse för hur eleverna erfar del-helhetsrelationen i det spatiala mönstret.

Diskussion

Syftet med denna artikel var att presentera och diskutera förskoleklasselevers förmåga att se och använda talstrukturer för att bestämma antal, samt hur förmågan utvecklas efter att de har deltagit i interventioner som avser att synliggöra talstrukturer. Vi har däremot inte i denna studie redogjort för hur undervisningen i jämförelsegruppen har hanterat tal som innehåll. En begränsning i vår analys är att det endast är en uppgift som har analyserats, dock väcker resultatet frågor om i vilken utsträckning undervisningen i den ordinarie förskoleklassundervisningen främjar elevers strukturella medvetenhet, det vill säga förmågan att urskilja och använda strukturer som stöd för att bestämma antal (jfr Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Talområdet skulle kunna spela en roll för hur uppgiften att bestämma antal kan lösas utifrån urskilda talstrukturer. Ett lägre talområde kan till exempel memoreras eller kännas igen som ett spatialt mönster som representerar ett visst tal såsom prickar ordnade på en tärning (jfr Mandler & Shebo, 1982). Ett högre talområde skulle då utgöra en svårighet i och med att det blir mer komplext att memorera mönster med större antal. Men, gruppering av tal över tio har ingått i de interventioner som eleverna i denna studie deltagit i, vilket innebär att det högre talområdet tolv inte är helt främmande. Talområdet har valts för att utmana eleverna att urskilja den multiplikativa strukturen (tre fyror är tolv eller fyra treor är tolv). I Schöner och Benz (2018) studier visar sig elever ha samma svårigheter att se delar i en helhet hos tal mindre än tio, som vi ser i talområdet över tio, det vill säga eleverna förmår urskilja och relatera enheter större än ett till en helhet men räknar sedan ofta enstaka enheter för att bestämma det totala antalet.

Orsaken till att elever kan se men inte använda strukturerna behöver därmed en annan förklaring än att talområden är obekanta eller för stora. Sprenger och Benz (2020) beskriver utvecklingen hos yngre elever som stegvisa färdigheter i riktning mot att använda strukturer för att avgöra antalet. Sprenger och Benz sammanfattning utgår från en utvecklingspsykologisk förklaring att räknefärdigheter utvecklas som allt mer avancerade strategier och färdigheter. Utveckling i det variationsteoretiska perspektivet som vi använder i denna studie, innebär däremot att man samtidigt förmår att urskilja fler och nödvändiga aspekter av i detta fall tal. I interventionen var avsikten att ge eleverna möjlighet att utveckla sättet att erfara talstrukturer som del-helhetsrelation, där urskiljandet av delar (sammansatta enheter) och helheten är nödvändigt. I och med de observationer som gjorts i studien – att vissa elever har lärt sig se men inte använder strukturer för att bestämma antal – kan man dra slutsatsen att fokuseringen på del-helhetsrelationen är en nödvändig aspekt, men kanske inte tillräcklig, för att alla elever ska *använda* talstrukturer för att bestämma antal. I den kvalitativa analysen framträder helheten som en betydande aspekt, där i synnerhet den *samtidiga* urskiljningen av delar (enheter större än ett) till helheten (struktur bestående av två eller flera enheter) tycks spela roll för hur eleverna förmår bestämma antal.

En didaktiskt viktig fråga uppstår då, huruvida undervisningen fokuserat främst på delar, det vill säga att urskilja och skapa enheter större än ett, men i mindre utsträckning relaterat dem som delar till helheten. Utmaningen i undervisningen tycks nämligen vara att samtidigt fokusera vad delarna är delar av. En annan aspekt att beakta i fortsatta interventioner kan vara att skapa förutsättningar för att eleven urskiljer tio som en enhet, eftersom det underlättar att bestämma större antal, där ”skutt” i 2-, 3- eller 4-enheter blir en krävande procedur om tydliga hållpunkter inte finns att relatera till. I interventionerna ingick ”tio som enhet” i de senare modulerna, vilket innebär att eleverna hade viss erfarenhet av den strukturen. Däremot ger figuren i den analyserade uppgiften inte direkt vägledning till att se (fem eller) tio som en enhet, vilket kan vara en orsak till att ytterst få visade sig urskilja sådan struktur.

Resultatet från denna studie väcker frågan om vad som hjälper elever att urskilja enheter större än ett och relatera dessa till helheten: flera elever har lärt sig att se sammansatta enheter men förmår inte använda dem för att bestämma antal. För undervisningsutveckling är detta en betydelsefull upptäckt för att vidga kunskaperna om elevers förutsättningar att lära sig använda talstrukturer på ett framgångsrikt sätt för att lösa numeriska problem.

Avslutningsvis hävdar vi, med utgångspunkt i denna studie och tidigare forskning, att en inriktning mot att studera och uppmärksamma elevers erfarande i den didaktiska forskningen kan bidra med värdefulla insikter att använda i utvecklandet av undervisningen som bidrar inte bara till elevers matematikfärdigheter utan också till den grundläggande och fördjupade förståelsen för hur tal kan struktureras för att se och använda relationer inom och mellan tal på ett framgångsrikt sätt.

En del av resultaten som ingår i denna artikel har presenterats vid konferensen Madif 14 och publiceras på engelska i en kommande konferensvolym.

Tack

Studien har genomförts med bidrag från Vetenskapsrådet (diarienummer 2020-03712).

Referenslista

Baroody, A. J. (1987). *Children's mathematical thinking*. Teachers College.

Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and fostering fluency with basic differences in grade 1. *PNA*, *10*(3), 161–190.

Benz, C. (2013). Identifying quantities—Children's constructions to compose collections from parts or decompose collections into parts. I U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Red.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM 2012 conference* (s. 189–203). Springer.

Björklund, C., Marton, F. & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 261–284. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Clements, D., Sarama, J. & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The neglected quantifier. In A. Norton & M. W. Alibali (Red.), *Constructing number. Research in mathematics education* (s. 13–45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2

Clements, D. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach* (3 uppl.). Routledge.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258–277. https://doi.org/10.2307/749781

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Red.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s. 224–238). Lawrence Erlbaum.

Davydov, V. V., Gorbov, S., Mukulina, T., Savelyeva, M. & Tabachnikova, N. (1999). *Mathematics*. Moscow Press.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 243–275). Macmillan Library Reference.

Hunting, R. P. (2003). Part-whole number knowledge in preschool children. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*(3), 217–235.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology, 62*, 498–525.

Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I. & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 157–172. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09927-1

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Research & Development*, *24*(4), 335–348. https://doi.org/10.1080/07294360500284706

Mandler, G. & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, *111*(1), 1–22.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2016). *Pattern and structure mathematics awareness program (PASMAP): Book one - foundation and year 1*. Australian Council for Educational Research.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49.

Mulligan, J., Mitchelmore M. & Stephanou A. (2015). *PASA response booklet 2*. Australian Council for Educational Research.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), 3–46.

Paliwal, V. & Baroody, A. J. (2020). Cardinality principle understanding: the role of focusing on the subitizing ability. *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 649–661. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01150-0

Schöner, P. & Benz, C. (2018). Visual structuring processes of children when determining the cardinality of sets—The contribution of eye-tracking. I C. Benz, H. Gasteiger, A. S. Steinweg, P. Schöner, H. Vollmuth & J. Zöllner (Red.), *Early mathematics learning— Selected papers from the POEM Conference 2016* (s. 123–143). Springer.

Sprenger, P. & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets—results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 753–765. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01137-x

Steffe, L. P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and individual differences*, *3*(1), 61–82.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 13–17.

von Glasersfeld, E. (1982). Subitizing: The role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, *50*, 191–218.

Wynn, K. (1998). Psychological foundations of number: Numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences*, *2*(8), 296–303.

Författarpresentationer

Camilla Björklund

Camilla Björklund är professor i pedagogik vid Göteborgs universitet och forskar om matematiklärande i förskola och skolans tidiga år i praktiknära forsknings- och utvecklingsprojekt.

Jessica Elofsson

Jessica Elofsson är är universitetslektor i pedagogik vid Linköpings universitet. Hon forskar om matematiklärande och undervisning i förskola, förskoleklass och grundskolans tidiga år.

Angelika Kullberg

Angelika Kullberg är är professor i ämnesdidaktik med inriktning mot matematik vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession på Göteborgs universitet. Forskningsintresset handlar främst om relationen mellan undervisning och elevers lärande.

Anna-Lena Ekdahl

Anna-Lena Ekdahl är universitetslektor i didaktik vid Jönköping University. Hon forskar om barns matematiklärande och hur lärare i samarbete med forskare utvecklar undervisningen.

Ulla Runesson Kempe

Ulla Runesson Kempe är är professor emerita i matematikdidaktik vid Jönköping University.

Maria Alkhede

Maria Alkhede är doktorand i Barn- och Ungdomsvetenskap vid Göteborgs universitet. Hon forskar om matematikundervisning i förskolan och i skolans tidiga år.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 68–84
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering

Orginalartikel

Jorryt van Bommel[1]*, Hanna Palmér[2] & Andreas Ebbelind[2]

Sammanfattning

I denna artikel presenteras en studie, genomförd i samarbete mellan forskare och förskoleklasslärare, där förskoleklasselever arbetade med division genom problemlösning och problemformulering. Data kommer från en aktivitet fördelad över två undervisningstillfällen. Undervisningen genomfördes i 11 förskoleklasser, med 205 elever. Vid problemlösning urskilde eleverna relationen mellan delar och helhet, storleken på varje del, att dela som division samt kontinuerlig och diskret mängd som aspekter av division. Även vid problemformulering synliggjordes dessa aspekter av division och aspekten att täljaren kan vara ett rationellt tal tillkom. Utöver uppgifter om division formulerade eleverna till exempel uppgifter med en liknande kontext (kakor) men med ett annat matematikinnehåll (till exempel subtraktion). Då det finns få studier om problemlösning och problemformulering med yngre elever bidrar denna studie med kunskap av värde för både (förskoleklass)lärare och forskare.

Nyckelord: problemlösning, problemformulering, förskoleklass, division, designforskning

Abstract

In this study, preschool-class students worked with problem solving and problem posing on division. Data comes from an activity divided into two sessions. The activity was planned in collaboration between preschool-class teachers and researchers and carried out in 11 preschool classes with 205 students. While solving problems, students distinguished the relationship between the parts and whole, the size of each part, dividing as division and continuous and discrete quantities as aspects of division. While posing problems, these aspects reappeared as well as the aspect that the numerator can be a rational number. Apart from problems on division, the students posed problems with a similar context (cookies) but a different mathematical content (e.g., subtraction). As there are few studies on problem solving and problem posing with younger students, this study contributes with knowledge of value to both (preschool class) teachers and researchers.

Keywords: Problem solving, Problem posing, Preschool class, Division, Design research

1 Högskolan Dalarna

2 Institutionen för matematik, Linnéuniversitetet

*Korresponderande författare:
Jorryt van Bommel
jvb@du.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 68-84
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23893
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Introduktion

Förmågan att använda matematisk kunskap för att lösa problem i vardagen är en av de åtta nyckelkompetenser som EU framhåller i livslångt lärande (EU, 2019).[1] Att matematik kan och bör användas för att lösa problem återspeglas även i den svenska läroplanen för grundskolan, där såväl problemlösning som problemformulering framhålls (Skolverket, 2022). Problemlösning är inget nytt i den svenska grundskolan men beskrivningarna av hur och varför elever ska arbeta med problemlösning har skiftat i styrdokumenten: från att elever ska lära sig matematik för att senare kunna lösa problem, via en beskrivning av problemlösning som ett innehåll att undervisa om, till dagens beskrivning av problemlösning som ett sätt att lära sig matematiska kunskaper (Wyndhamn m.fl., 2000). Liknande utveckling i läroplansskrivningar kan även ses internationellt (English & Sriraman, 2010).

Trots att problemlösning inte är något nytt i svensk skola finns det relativt få studier med fokus på problemlösning och problemformulering och speciellt få studier kopplade till tidiga skolår (Cai m.fl., 2015; English & Sriraman, 2010). De få studier som finns om problemformulering i tidiga skolår indikerar dock positiva resultat på såväl elevers kunskapsutveckling som på deras attityder till matematik (till exempel, Ebbelind m.fl., 2023; Ellerton m.fl., 2015; Palmér & van Bommel, 2018, 2020; van Bommel & Palmér, 2016). English och Sriraman (2010) framhåller att politisk styrning av matematikundervisning genom åren har tenderat att pendla mellan att framhålla antingen problemlösning eller basfärdigheter. Denna pendling tillsammans med ett ökat fokus på mät- och jämförbara kunskaper har bidragit till den begränsade forskningen om problemlösning, trots att problemlösning som sådan funnits länge i skolans styrdokument. Utifrån en genomgång av forskning om problemlösning framhåller de forskning med fokus på elevers lärande av matematikinnehåll i samband med problemlösning som extra viktigt. Speciellt saknas studier i form av interventioner där problemlösning och problemformulering designas och implementeras i aktuella verksamheter (Cai & Hwang, 2020; English & Sriraman, 2010; Palmér & van Bommel, 2020; Singer m.fl., 2013). Studier likt den som presenteras här ämnar bidra till att fylla detta tomrum.

Studien som presenteras i denna artikel är en del av ett flerårigt praktiknära forskningsprojekt som genomförs i samarbete mellan fem lärare i förskoleklass och tre forskare. Det övergripande syftet med forskningsprojektet är att undersöka möjligheter och begränsningar med undervisning i problemlösning och problemformulering med unga elever som kanske ännu inte kan läsa eller skriva. Det specifika syftet med denna artikel är att studera vilka aspekter av division som elever i förskoleklass urskiljer i samband med problemlösning och problemformulering. Undervisningen planerades i samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare, genomfördes av dessa lärare tillsammans med eleverna. Data analyserades av forskarna och förskoleklasslärare och forskare diskuterade sedan gemensamt dessa analyser och resultat. Följande frågor fokuseras på:

- Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de arbetar med en problemlösningsuppgift om division?
- Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de efter problemlösning om division ombeds att formulera en liknande uppgift?

1 De åtta nyckelkompetenserna (på engelska): Literacy competence, Multilingual competence, Mathematical competence and competence in science, technology and engineering, Digital competence, Personal, social, and learning to learn competence, Citizenship competence, Entrepreneurship competence och Cultural awareness and expression competence.

- Vilka likheter och skillnader finns mellan de aspekter som urskiljs av eleverna vid problemlösning respektive problemformulering?

Problemlösning

Enligt Lesh och Zawojewski (2007) blir en matematikuppgift en problemlösningsuppgift när den som ska lösa uppgiften behöver utveckla ny kunskap eller nya strategier för att lösa uppgiften. Vilka uppgifter som är problemlösningsuppgifter avgörs således av relationen mellan eleven och den aktuella uppgiften. Syftet med problemlösning är dels att elever ska utveckla kunskaper i problemlösning, dels att elever ska utveckla kunskap om olika matematikinnehåll. Enligt Stein med flera (2008) behöver en problemlösningsuppgift inte innebära en nedskriven uppgift i en matematikbok utan kan utgöras av en bredd av aktiviteter i en klassrumskontext som syftar till att elever ska ges möjlighet att utveckla kunskaper kring en viss matematisk idé eller strategi. Vid undervisning i problemlösning har läraren en viktig roll att välja eller konstruera en lämplig problemlösningsuppgift, samt att planera hur arbetet i elevgruppen ska organiseras. Att välja eller konstruera en problemlösningsuppgift innebär att välja vilken matematik som ska behandlas och vilka lösningsstrategier som ska vara möjliga, samt att relatera till hur problemet är anpassat till elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper.

Exempel på lösningsstrategier i problemlösning är att rita, söka mönster, arbeta baklänges, göra listor, dramatisera, göra tabeller, göra diagram, gissa och pröva, förenkla problemet och använda laborativt material (Lesh & Zawojewski, 2007). Ytterligare en strategi för att lösa problemlösningsuppgifter är att ställa frågor. I en studie av Legare med flera (2013) jämförs fyra-, fem- och sexåringars förmåga att ställa frågor i syfte att lösa en problemlösningsuppgift. De frågor eleverna ställde kategoriseras som inramande, bekräftande respektive ineffektiva för att därefter relateras till hur eleverna löste problemlösningsuppgiften i fråga. Inramande frågor bidrar till ny och relevant information som kan hjälpa att lösa uppgiften. Bekräftande frågor är frågor som redan har besvarats, och ineffektiva frågor är frågor som inte fångade användbar information för att lösa uppgiften. Resultaten visade positiva samband mellan inramande frågor och framgångsrik problemlösning. Vidare visar Legare med flera (2013) att elevers förmåga att generera relevant information genom att ställa frågor utvecklas före deras förmåga att använda den information deras frågor genererade för att faktiskt lösa uppgiften.

I en annan studie med sexåringar implementeras kollaborativt lärande i matematikundervisningen vilket gav positiv påverkan på elevernas problemlösningsförmåga (Tarim, 2009). Eleverna i studien blev bättre på att lyssna till andras idéer, dela med sig av sina egna idéer samt på att ta ansvar för gruppens gemensamma arbete. Läraren har dock fortfarande en viktig roll för framgången genom att sätta samman fungerande grupper, presentera uppgiften, erbjuda material, hjälpa elevgrupper med sitt arbete genom att ställa frågor samt genom att ge feedback på lösningar (Tarim, 2009). Tilläggas kan dock att elevuppgifterna i Tarims studie är mindre utmanande än de problemlösningsuppgifter som eleverna i den studie som presenteras i denna artikel möter. Liknande utmanande problemlösningsuppgifter implementeras dock i tidig matematikundervisning av Khalid med flera (2020) i syfte att utveckla elevers kreativa förmåga (flyt, flexibilitet, originalitet och genomarbetning). Resultaten av deras studie visar att elever som arbetar med utmanande problemlösningsuppgifter förutom att utveckla sin problemlösningsförmåga även utvecklar sin kreativa förmåga mer än elever i jämförelsegrupp som inte arbetar med problemlösning. Eleverna i studien arbetade i mindre grupper där de fick ta del av andras idéer och dela med sig av sina egna idéer. Detta bidrog till att matematikinnehållet blev intressant för eleverna samt att de i grupp blev mer självsäkra att försöka lösa uppgifter på olika kreativa sätt snarare än att finna enbart en lösning. Även Pehkonen med flera (2013) har studerat kreativitet i relation till problemlösning och då i relation till öppna problem i vilket de inkluderar, till exempel, problemlösningsuppgifter från vardagen, problemlösningsuppgifter med flera möjliga svar, problemlösningsuppgifter utan en specifik fråga, projektuppgifter, undersökningar samt formulering av egna uppgifter. I deras studie, kategoriseras elevernas lösningar utifrån kreativitet och resultaten visar att de öppna problemlösningsuppgifterna bidrar till kreativitet men också att lärarens inställning till problemlösning och öppna problem är väsentligt för framgångsrikt lärande hos eleverna.

Problemformulering

Problemformulering kan genomföras före, samtidigt som, eller efter problemlösning genom att eleverna generar nya uppgifter eller omformulerar uppgifter de arbetat med (Cifarelli & Sevim, 2015; Silver, 1994). Oavsett tidpunkt kan problemformulering ge elever ytterligare möjligheter att utveckla kunskaper om olika matematikinnehåll eftersom eleverna när de formulerar uppgifter bearbetar matematikinnehåll, utvecklar sin matematiska förståelse, sin förmåga till självreflektion samt sin problemlösningsförmåga (Chen m.fl., 2013; Cifarelli & Sevim, 2015). Utöver detta framhåller Klaassen och Doorman (2015) att problemformulering kan vara motivationsfrämjande då eleverna ges agens. I studier av problemformulering är eleverna dock oftast äldre än de sex år som gäller för eleverna i den här studien. Det finns ett fåtal svenska studier som visar att yngre elever som får formulera uppgifter dels lär matematikinnehåll, dels utvecklar positiva attityder till matematik (Ebbelind m.fl., 2023; Palmér & van Bommel, 2018, 2020; van Bommel & Palmér 2016). I studier med äldre elever (10–11 åringar) har en kombination av problemlösning och problemformulering i undervisning visats öka elevers motivation till matematik generellt och specifikt har det ökat elevers motivation för och kunskaper i problemlösning (Cifarelli & Sevim, 2015).

När elever ombeds formulera en egen uppgift utan ett förbestämt innehåll eller kontext benämns detta för problemformulering i en fri situation (Stoyanova & Ellerton, 1996). Det kan till exempel innebära att elever formulerar en uppgift som en kompis ska lösa. När elever ombeds formulera en uppgift till ett givet matematikinnehåll eller en given situation benämns detta för problemformulering i en semi-strukturerad situation (Stoyanova & Ellerton, 1996). Det kan till exempel vara när elever formulerar en uppgift som ska kunna lösas med addition eller att de ska formulera en uppgift utifrån en busstidtabell. Slutligen, när elever ombeds att omformulera en specifik uppgift benämns detta för problemformulering i en strukturerad situation vilket till exempel kan innebära att elever utifrån en temperaturtabell formulera en uppgift som handlar om temperaturskillnader (Stoyanova & Ellerton, 1996). I den studie som presenteras i denna artikel ombads eleverna att formulera en *liknande uppgift* till en klasskompis efter att ha arbetat med en problemlösningsuppgift om division. Således kom problemformulering efter problemlösning och det fanns en uppgift att referera till, vilket innebär problemformulering i en semi-strukturerad situation. I tidigare studier med sexåringar har sådan semi-strukturerad problemformulering visat att elever bearbetar och reflekterar över den ursprungliga uppgiften och därmed bearbetar dess matematiska innehåll ytterligare (Palmér & van Bommel, 2020, 2023).

Division

I en division (till exempel 12 /4) hanteras en helhet (12), delar som helheten ska delas in i (4) samt storleken på varje del (3). Förståelse för division innebär därmed att kunna urskilja relationen mellan delar och helhet samt storleken på varje del. Delning är ett mer generellt begrepp som syftar på handlingen att dela upp något i mindre delar eller grupper. En viss förståelse för delning har redan förskolebarn som framgångsrikt delar lika i vardagssituationer (Dehaene, 1997). Delning i sådana vardagssituationer är grunden för både division och bråkräkning (Dehaene, 1997) och ger barn en informell kunskap om division (Neuman, 1999). Division är den term som används i matematik och skiljer sig från delning på så sätt att delarna (kvoten) måste vara lika stora. Helheten (mängden som ska delas upp) kan även benämnas dividend. Delarna (mängden för att dela upp dividend) kallas för divisor och resultatet av divisionen (mängden i varje del eller antalet delar) är kvoten.

I vardagssituationer med yngre barn används vanligen begreppet dela i relation till det matematiska innehållet division (Correa m.fl., 1998; Empson, 1999; Matalliotaki, 2012). Förutom dela används även ord som fördela, dela upp och dela ut på olika sätt i olika sammanhang. Situationer som är vanliga för yngre barn är att dela ett föremål, som ett äpple, i två halvor, men även att dela ett visst antal föremål (bilar) bland sig själv och en kompis. När det gäller *dela ut* är en vardaglig situation att dela ut föremål, till exempel när elever ska få ett varsitt papper att skriva på – ett ark per person. Det kan även handla om att fördela föremål mellan alla elever tills föremålen tar slut, som på rasten när leksakerna inte räcker till alla. I det sist nämnda fallet uttrycks ofta att eleverna ska *dela med sig* i avsikten att de ska turas om eller ge bort några leksaker. Situationer likt dessa ger olika ingångar till det matematiska innehållet division. I några av fallen innebär 'dela' exakt detsamma som division, i andra fall menar vi något annat men vi använder ändå liknande begrepp. En studie i svensk förskoleklass med fokus på problemlösning kopplat till bilderböcker visar att eleverna hade svårt att skilja mellan division som matematisk operation och som en praktisk aktivitet (Pramling & Pramling Samuelsson, 2008; Sumpter & Hedefalk, 2023). För elever kan det vara svårt att avgöra vad som är en aspekt av division och vad som enbart hör till den specifika dela-situationen. Att kunna tolka vad som avses med ordet dela specifikt i relation till division är därmed en aspekt som elever behöver urskilja.

En annan aspekt av division är att delarna ska vara lika. Lika i matematisk betydelse innebär lika mycket, när en viss mängd ska delas ska de olika delarna vara lika mycket av mängden, till exempel gällande längden, arean eller volymen. Delarna kan men behöver inte vara lika i form eller antal. De flesta tre- och fyra-åringar har utvecklat förståelse för tals kardinalitet men har svårare att urskilja och resonera om delmängder (Dehaene, 1997). I vardagssituationer använder barn vanligen ett-till-ett-delning tillsammans med kunskaper i addition och subtraktion för att lösa delningssituationer (Correa m fl., 1998; Parmar, 2003). Att kunna skilja mellan lika mycket och lika många är en viktig aspekt när det gäller division där divisionen inte resulterar i ett heltal. När treåringar arbetade med divisionsproblem utan rest (9/3) gick det bra att dela lika, men när de skulle dela 9 kakor på 4 uppstod en utmaning i om det ska vara lika stora bitar eller lika många bitar (Palmér, 2008).

Ibland är det svårt att dela objekten i en mängd vilket har att göra med division av diskreta eller kontinuerliga mängder. När vi dividerar 8 med 4 är svaret 2, vilket innebär att om 4 personer ska dela på 8 pennor, får de 2 pennor var. Dividerar vi däremot 10 med 4 är svaret 2,5. För pennorna blir det en märklig situation, att dela en penna mitt itu, men om vi tar en kontinuerlig, icke-diskret kontext, där antalet kan delas i mindre delar, blir svaret 2,5, två och en halv korv, två och en halv köttbulle, två och en halv hinkar med sand, och så vidare. Det är viktigt att elever kan skilja mellan diskreta och kontinuerliga mängder i relation till division, vilket inte handlar om att kunna begreppen utan att kunna urskilja när en mängd består av 'hela' delar som inte kan delas (diskret mängd) respektive av delar som kan delas i mindre bitar eller mängder (kontinuerlig mängd).

Inom division skiljs mellan innehålls- och delningsdivision . En division som 12/3 kan lösas med både delnings-, och innehållsdivision, men lägger vi till en kontext bestämmer kontexten vilken typ av division det är. Att fördela 12 tennisbollar i rör med plats för tre tennisbollar i varje innebär innehållsdivision, medan att fördela 12 tennisbollar mellan tre personer innebär delningsdivision. Redan 1955 skrev Gunderson (1955) om hur elever arbetar olika med dessa två divisioner där delningsdivision ställde till större problem än innehållsdivision. Senare har nya studier dock visat motsatsen (Ching & Wu, 2021; Frydman & Bryant, 1988) vilket förklaras med att delningsdivision följer den vardagliga erfarenheten av att dela lika och fördela lika (se Correa m.fl., 1998; Empson, 1999; Matalliotaki, 2012). Om elever inte får möta innehållsdivision får de dock stora bekymmer när de möter uppgifter likt 12/0,5. Detta är dock inte nödvändigtvis en aspekt som elever behöver urskilja utan handlar snarare om vilka situationer som erbjuds i undervisning så att båda typer av division förekommer.

Teori

I studien används variationsteori för analys av vilka aspekter av division som eleverna urskiljer, i arbetet med problemlösning respektive problemformulering. Variationsteori utvecklades av Ference Marton (till exempel Marton, 2014) och har använts i många studier, speciellt inom matematikdidaktik (se till exempel följande artiklar publicerade i Forskul: Björklund & Runesson Kempe, 2020; Hansson, 2019; Stjernlöf & Fred, 2014). Snarare än att kvantifiera utfallet av lärande fokuserar variationsteori på kvalitativt olika sätt att erfara eller förstå ett fenomen. Teorin används dels för design och analys av undervisning med fokus på att erbjuda elever nödvändiga lärandemöjligheter, dels för att analysera och beskriva elevers förståelse av ett fenomen (Marton & Booth, 1997). Fenomenet benämns lärandeobjektet, vilket kan vara ett innehåll eller en förmåga som undervisas om under en eller flera lektioner. Variationsteori utgår ifrån att ett fenomen kan förstås genom att urskilja specifika aspekter, specifika för just det fenomenet. När elever urskiljer nya aspekter av lärandeobjektet sker ett skifte i hur de förstår fenomenet (Marton, 2014; Marton & Pang, 2006).[2] Till exempel, i relation till lärandeobjektet fyrhörningar, behöver elever urskilja olika aspekter för att kunna särskilja olika fyrhörningar såsom rektangel, romb och kvadrat. En sådan aspekt är sidornas längd som möjliggör förståelse för relationen mellan kvadrater och rektanglar. En annan aspekt är vinklarnas storlek som möjliggör förståelse för relationen mellan romber och kvadrater.

I den här studien är lärandeobjektet division med fokus på de aspekter av division eleverna urskiljer när de arbetar med problemlösning och problemformulering. Hur en elev förstår division kommer därmed att vara avhängigt vilka aspekter eleven urskiljer, både i problemlösning och problemformulering. Det handlar inte om specifika termer (så som täljare, nämnare, dividend, kvot) utan om en förståelse för innebörden av dessa begrepp i relation till fenomenet division. I division är relationen mellan delar och helhet samt storleken på varje del väsentligt att urskilja. För yngre elever är även begreppet dela som divisionen en aspekt att urskilja. Eleverna behöver även kunna skilja mellan kontinuerliga och diskreta mängder att dela upp, det vill säga innebörden av, och inte användandet av, begreppen. Variationsteori gör det möjligt att fokusera på vilka av dessa aspekter en elev urskiljer och se detta som en indikation på hur eleven förstår fenomenet division. Lärande förstås som det som sker när elever kan urskilja nya och nödvändiga aspekter av division.

Eftersom problemformulering möjliggör en annan inblick i elevernas matematiska förståelse än vad problemlösning gör (Cai & Hwang, 2020) erbjuder undervisningskontexten i den här presenterade studien en rik kontext att analysera.

2 För en mer utförlig beskrivning av variationsteori se till exempel Marton (2014), Marton och Pang (2006) eller Marton och Booth (1997).

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67 Jorryt van Bommel m.fl.

Metod

Som tidigare har nämnts är fokus i detta praktiknära forskningsprojekt möjligheter och begränsningar med undervisning i problemlösning och problemformulering. Studien genomfördes i enlighet med designforskning, vilket är mångfacetterat när det kommer till tillvägagångssätt, definitioner och kriterier att uppfylla. Skillnaderna till trots är en gemensam ambition i designforskning att i cykler utveckla och beforska undervisning av god kvalité på den plats där undervisningen sker. Att undervisning är del av forskningsprocessen medför att studierna genomförs i samarbete med verksamma lärare (Bakker, 2018). Den designstudie som presenteras i denna artikel bygger på ett flerårigt samarbete mellan forskare och lärare i förskoleklass där roller och ansvarsfördelning successivt har förhandlats och omfördelats (Ebbelind m.fl., 2023; Palmér & van Bommel, 2021). I den designcykel som presenteras här genomförde förskoleklasslärarna lektioner som gemensamt planerades av forskare och förskoleklasslärare. Designcykeln avslutades med en gemensam reflektion mellan forskare och förskoleklasslärare kring erfarenhet från såväl genomförande som analys. Eftersom dessa förskoleklasslärare har medverkat i det praktiknära forskningsprojektet under flera år, har de gedigen erfarenhet av matematikundervisning genom problemlösning och problemformulering. Eleverna i dessa klasser hade innan den här presenterade designcykeln deltagit i problemlösning och problemformulering flertalet gånger.

Deltagare och forskningens kontext

Undervisningskontexten i studien utgörs av den svenska förskoleklassen. Elva förskoleklasser inkluderades i den designcykel som presenteras i denna artikel. De fem deltagande lärare är alla utbildade förskollärare och har, som ovan beskrivits, deltagit i flera av de tidigare designcyklerna. De var därmed väl förtrogna med både problemlösning och problemformulering samt med designforskning och studiens målsättning. I enlighet med etiska riktlinjer för forskning (Vetenskapsrådet, 2017) informerades elevernas vårdnadshavare om studien och gav sitt samtycke till sina barns deltagande. Eleverna informerades om studien av sina lärare. Interventionen utgjorde en integrerad del av ordinarie undervisning där samtliga elever deltog men data samlades enbart in från elever vars vårdnadshavare samtyckt till deltagande. Samtliga data förvarades enligt gängse riktlinjer för datahantering, det vill säga i kassaskåp samt inskannat lagrat på lösenordskyddad server. Totalt deltog 205 elever från elva klasser på fem olika skolor.

Beskrivning av de två lektionerna och data

Två lektioner ingick i designcykeln. Den första lektionen fokuserade på problemlösning. Eleverna delades in i grupper (68 grupper) om tre elever i varje grupp (med undantag för en grupp på fyra elever). Varje grupp fick 15 kakor i lera där den första uppgiften var att dela kakorna lika mellan sig i gruppen[3]. När eleverna fördelat kakorna mellan sig meddelade förskoleklassläraren att de också ville delta och eleverna fick då i uppgift att dela de 15 kakorna lika mellan fyra personer. Detta innebär division med rest, där några kakor inte blir fördelade, eller en division, där några av kakorna behöver delas i bitar. Det är i denna del av uppgiften som problemlösning uppstod eftersom ett sådant delningsförfarande sällan är känt på förhand för sexåringar.

Under denna del av lektionen fotograferade förskoleklassläraren elevernas arbete samt förde anteckningar utifrån gemensamt framtagna observationspunkter, som fokuserade på hur eleverna gör för att divisionen ska bli lika. Lärarna antecknade om eleverna fördelade en eller flera kakor i taget, om delningen blev (matematiskt) lika samt om, och i så fall hur, eleverna kontrollerade att delningen blev lika. Lärarna observerade även likheter och skillnader mellan elevers strategier för lösning i de två olika situationerna (15/3 respektive 15/4). I relation till elevernas

3 Gruppen med fyra elever fick instruktionen att dela kakorna mellan tre personer i gruppen.

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

arbete med situationen 15/4 observerades även om eleverna började om från början genom att samla kakorna i en hög eller om de genomförde en omfördelning av resultatet från den första delen. Därutöver observerades om eleverna var noga med att delarna i de delade kakorna blev lika stora eller inte.

Den andra lektionen fokuserade på problemformulering. Eleverna påmindes om den uppgift de hade arbetat med under föregående lektion och uppmanades att formulera en liknande uppgift till en vän. Denna gång arbetade eleverna individuellt. Förskoleklassläraren hjälpte eleverna med skrivandet i de fall det behövdes. Totalt formulerades 210 uppgifter av 205 elever. Fyra uppgifter innehöll ingen fråga utan var påståenden eller en berättelse och har därmed utelämnats i analysen.

Analys

Den första delen av analysen fokuserade på den första forskningsfrågan: Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de arbetar med en problemlösningsuppgift om division? Här kodade två av forskarna initialt elevernas lösningar (68 grupper) utifrån urskilda aspekter (Marton, 2014). De aspekter som fokuserades på var de som hade identifierats i tidigare forskningsstudier: relationer mellan delar och helhet, storleken på varje del, begreppet dela som division samt kontinuerlig och diskret mängd (tabell 1). Utifrån denna kodning genomförde den tredje forskaren en verifierande kodning.

Tabell 1

Aspekter av division och operationaliseringen vid analys av elevernas arbete med problemlösning.

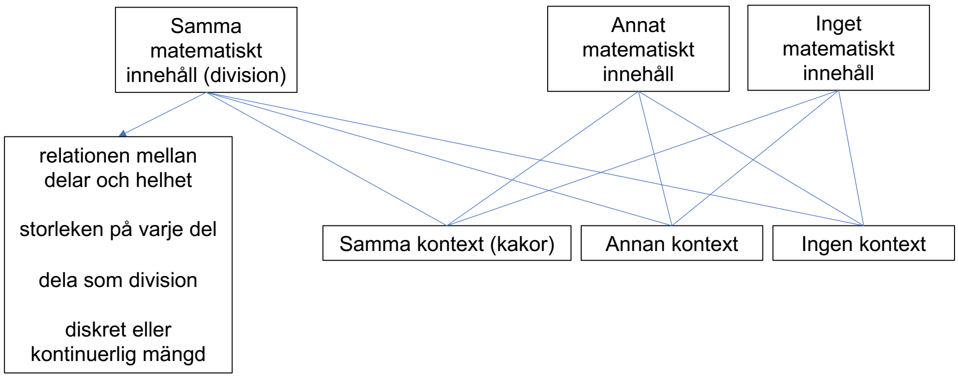
Aspekt	Operationalisering
relationen mellan delar och helhet	blir divisionen lika och kontrollräknar eleverna?
storleken på varje del	lika mycket vs lika många (ej aktuellt vid 15/3)
dela som division	syns fördela, dela och dela ut i strategierna för divisionen?
diskret eller kontinuerlig mängd	delas kakorna eller blir det rest? (ej aktuellt vid 15/3)

Not. Aspekterna används vid analys av elevernas arbete med problemlösning.

Den andra delen av analysen fokuserade på den andra forskningsfrågan: Vilka aspekter av division urskiljer yngre elever när de efter problemlösning om division ombeds att formulera en liknande uppgift? Samma aspekter som ovan (tabell 1) användes för analys men i enlighet med tidigare studier om problemformulering fokuserades även på uppgiftskontexten (kakor) och det matematiska innehållet i uppgifterna (Carrillo & Cruz, 2016; Palmér & van Bommel, 2020; van Bommel & Palmér, 2022). Med utgångspunkt i Carrillo och Cruz (2016) utformades följande klassificeringsschema (figur 1).

Figur 1

Klassificeringsschema för analys av elevernas egna formulerade uppgifter



Det inledande steget i detta schema fokuserade på innehållet i elevernas egna formulerade uppgifter: uppgifter baserade på samma matematiska innehåll (division) som den ursprungliga uppgiften (exempel figur 2), uppgifter baserade på ett annat matematiskt innehåll än den ursprungliga uppgiften (exempel figur 3) och uppgifter utan matematiskt innehåll (exempel figur 4).

Figur 2

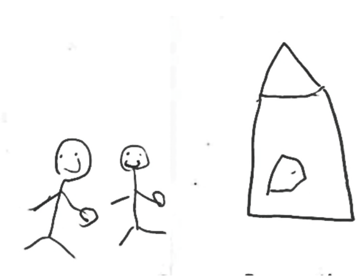
Exempel på en elevuppgift med samma matematiska innehåll som den ursprungliga uppgiften

Sexton kakor som ska delas på två personer

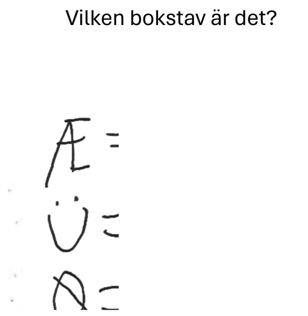
Figur 3

Exempel på en elevuppgift med annat matematiskt innehåll som den ursprungliga uppgiften

Två barn ska köpa något för hundra kronor, de har tusen kronor, hur mycket får de tillbaka?

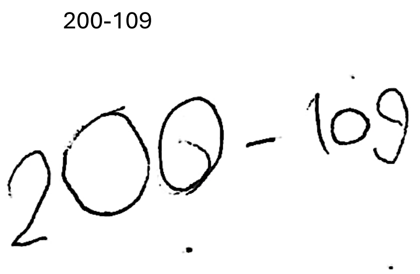


Figur 4
Exempel på en elevuppgift utan matematiskt innehåll



Därefter gjordes ytterligare en klassificering för att identifiera kontexten i de formulerade uppgifterna: om kontexten är identiskt med den ursprungliga uppgiften (exempel figur 2), eller om en annan kontext (exempel figur 3), eller om ingen kontext alls (exempel figur 5) presenteras i uppgiften. Sedan analyserades divisionsuppgifterna i relation till de aspekter som framkommit i den första delen av analysen.

Figur 5
Exempel på en elevuppgift utan kontext



Slutligen, för att besvara den tredje forskningsfrågan gällande likheter och skillnader mellan de aspekter som urskiljs av eleverna vid problemlösning respektive problemformulering jämfördes resultaten från den första och andra analysen.

Resultat

I denna del presenteras resultatet utifrån respektive forskningsfråga.

Aspekter av division som elever urskiljer vid problemlösning

I den första uppgiften (15/3) visade grupperna att de kunde urskilja aspekten relation mellan delar och helhet, till exempel genom att de kontrollräknade om alla har fått lika många kakor. Ibland kontrollerade eleverna genom att en elev i taget fick räkna sina kakor och säga högt hur många de har. I andra fall räknade en elev allas kakor eller alla elever alla kakor tillsammans för att se om alla hade fått fem kakor. Aspekten relation mellan delar och helhet blev extra tydlig i de grupper där alla elever inledningsvis tog några kakor var och där de sedan vid kontrollräkningen började omfördela tills alla elever har fått lika många kakor. I några grupper sa en elev direkt att svaret är fem och delade sedan ut fem kakor i taget till varje elev. Ibland kontrollräknades detta av en annan elev i gruppen som eventuellt inte från början visste att detta var den korrekta lösningen (relation mellan delar och helhet).

Så länge kakorna är hela är aspekten storleken på delarna inte möjligt att urskilja. Tre grupper valde dock att dela kakorna i bitar innan dessa delar började att delas ut. Figur 6 visar några av kakorna som delades av eleverna. Bitarna var inte alltid lika stora men vid kontrollräkning var det antal bitar som är i fokus, vilket tyder på att aspekten storleken på delarna inte urskildes av dessa elever i denna situation. Vidare kan vi konstatera att dessa grupper inte urskilde aspekten dela som division i första skedet när de delade kakorna i halvor.

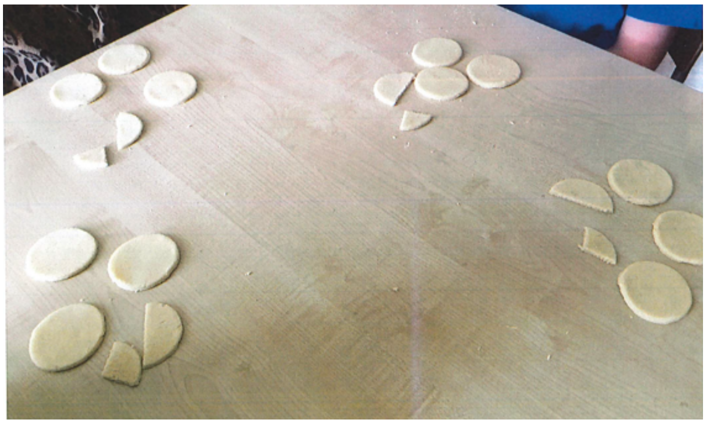
Figur 6
Elevlösning där kakorna har delats i halvor

Vid nästa del av uppgiften (15/4) valde alla grupper att se kakorna som icke-diskreta, (aspekten diskret eller kontinuerlig mängd) vilket innebar att kakorna kunde delas itu och att inga kakor lämnades ofördelade. Därmed blev aspekten storleken på delarna aktuellt för alla grupper eftersom (i alla fall) några kakor behövde delas. Ungefär hälften av grupperna (30 av 68) började om från början, det vill säga de lade sina kakor tillbaka i mitten på bordet och börjar sedan att dela kakorna mellan sig. Helheten, 15 kakor, blev därmed synlig och delningen skedde utifrån denna helhet. Även aspekten dela som division blev synligt när eleverna hanterade 15 som helheten och påbörjade sin (för)delning av kakor. De andra 38 grupperna omfördelade sina kakor och gav några i taget till förskoleklassläraren som nu skulle vara med och dela. Helheten kunde då erfaras som den helhet man hade framför sig, fem kakor. Grupperna som valde att omfördela hanterade inte 15/4 som en division men ville fördela kakorna lika. Aspekten dela som division blev därmed inte synligt i dessa grupper.

Eleverna visar i denna del av uppgiften olika strategier att (för)dela kakorna. Vissa grupper (20) gjorde en lösning att alla ska ha lika många kakbitar var. Därmed hade de inte urskilt aspekten att storleken på varje del måste vara lika. Merparten av grupperna (48) gör en lösning där alla skulle ha lika mycket kaka och urskilde därmed aspekten storleken på varje del. Svaret (3 och ¾ dels kaka) innebar för vissa grupper 3 hela kakor per person, en halv kaka och en fjärdedels kaka (figur 7) och för andra grupper femton fjärdedels kaka (figur 8). 15/4 representerades därmed på två olika sätt: 15/4 = 3 + ½ + ¼ och 15/4 = 15 fjärdedelar

Figur 7

Elevlösning av 15/4, där varje person får tre hela, en halv och en fjärdedels kaka



Figur 8

Elevlösning av 15/4, där varje person får femton fjärdedelar

Not. Figuren visar fyra grupper med kakor, där varje grupp av kakor består av femton fjärdedels kak-bitar.

Aspekter av division som elever urskiljer vid problemformulering

Av de 206 uppgifter som analyserades handlade 122 uppgifter om division, 47 om ett annat matematikinnehåll och 37 uppgifter innehöll ingen matematik. Eleverna skapade 79 uppgifter där kakor utgjorde kontexten medan en annan kontext användes i 116 uppgifter. I 11 uppgifter användes ingen kontext (tabell 2).

Tabell 2

Elevernas formulerade uppgifter klassificerade utifrån innehåll och kontext.

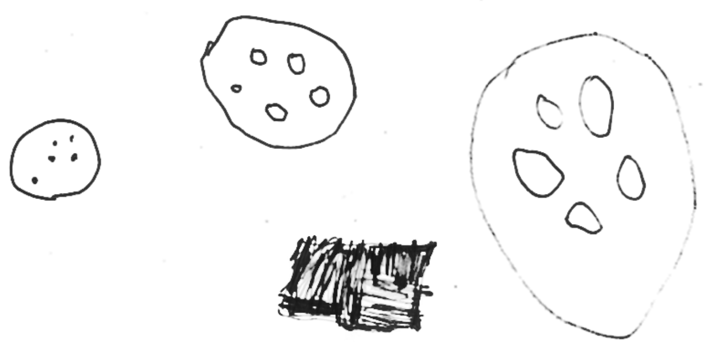
	Matematik		Ingen matematik	Total
	Division	Annan		
Kakor	54	15	10	79
Annan kontext	67	24	25	116
Ingen kontext	1	8	2	11
Total	122	47		
	169		37	206

De 122 uppgifter som handlade om division analyserades med avsikt på aspekter av division. Aspekten relationen mellan delar och helhet synliggjordes explicit i 85 uppgifter där eleverna i uppgiften påtalade att det ska vara rättvist, att alla ska få lika mycket eller lika många. En av eleverna gav även själv en lösning till uppgiften där eleven visade att den urskiljer aspekten att divisionen kan ha rest, samt aspekten att hela objekt behöver delas. I uppgiften skulle två personer dela på ett udda antal kakor och eleven föreslog sedan att de behövde baka en extra kaka.

Några av eleverna formulerade uppgifter där aspekten som rör storleken på delarna medvetet varierar. Till exempel ritade en elev tre fat med fem bullar på varje fat som skulle delas mellan mamma, pappa och barnet (figur 9). Storleken på faten och bullarna varierade och eleven berättade att pappa får de stora bullarna (till höger i figur 9), mamma de mindre (fatet i mitten i figur 9) och barnet de minsta bullarna (fatet till vänster i figur 9). Eleven sa sedan 'det är rättvist'.

Figur 9

Exempel på elevuppgift där storleken på delarna varierar



Not. Figuren visar tre fat med fem bullar på varje fat. Faten har tre olika storlekar och bullarna som ligger på faten korresponderar i storlek med faten.

En annan elev formulerade följande uppgift till en bild med fyra kakor (kex): ”Hur ska man göra för att den ena ska få 3 och den andra 5 kex? ”. Här har eleven urskilt att helheten kan delas i mindre delar. Däremot är de fyra kakorna som ska delas inte lika stora vilket innebar att eleven inte visade att den har urskilt aspekten att storleken på varje del ska vara lika.

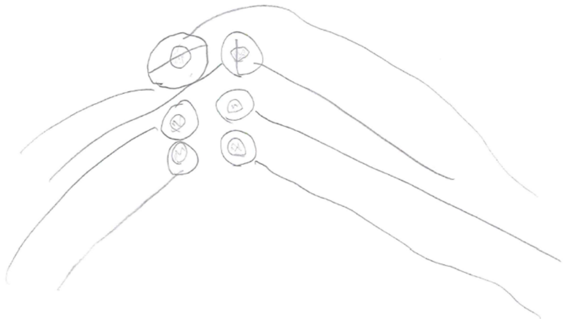
I en av elevernas formulerade uppgifter ska två personer dela på fyra karameller. När en annan elev, som inte har formulerat uppgiften, påpekade att karamellerna inte är lika stora fick den som svar: ”jag bryr mig inte, det är två stycken”. Här ser vi en skillnad mellan hur aspekten storlek på varje del urskildes av dessa två elever.

Eleverna varierade värde på både täljaren och nämnaren i sina formulerade uppgifter. I problemlösningsaktiviteten var täljaren 15 och nämnaren 3 respektive 4. I de formulerade uppgifterna valde eleverna olika antal för helheten och delarna. Några av eleverna formulerade uppgifter där täljaren hade ett kontinuerligt värde (aspekten diskret eller kontinuerlig mängd), till exempel när två personer ska dela på fyra hela och fyra halva kakor. Eleven ritade fyra hela kakor och fyra halva kakor (figur 10), ritade sedan sin lösning genom att dra streck från kakorna till vänster (person 1) och höger (person 2) och berättade att båda får två hela kakor och två halva kakor (figur 10).

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 46–67

Figur 10
Exempel på en elevuppgift där täljaren har ett kontinuerligt värde

Fyra hela och fyra halva kakor ska delas på två personer



Not. Figuren visar fyra hela kakor och två kakor som är delade i mitten.

Att svaret inte behöver vara ett naturligt tal synliggjordes i problemlösningsaktiviteten (15/3 och 15/4) där 44 elever formulerar en uppgift där svaret var ett rationellt tal (och icke naturligt). Här såg vi olika typer av uppgifter, till exempel ”Tre gubbar ska dela på 14 kakor, hur mycket får de var?”. Men även berättelser som liknar originalproblemet där kakorna först ska delas mellan tre personer och sedan mellan fyra personer (figur 11). Eleverna som formulerade problemet säger att det kan bli ”jämnt eller ojämnt” och att hjärtan kan delas ”i halvor om det inte blir jämnt”.

Figur 11
Exempel på en elevuppgift där svaret inte är ett naturligt tal

Tre barn ska dela lika på hjärtan, när de är färdiga kommer ett till barn som också vill ha. De ska dela ut igen. Det kan bli ett jämnt eller ojämnt tal. Om det blir ojämnt vad gör de då? Svar: de får dela i halvor om det inte blir jämnt.

En elev formulerade uppgiften att fyra personer delar på en pizza (figur 12). När eleven själv löste pizza-uppgiften valde eleven att dela in pizzan i åtta bitar och ändrar därmed problemet från 1/4 till 8 /4 och svarar ’två bitar var’.

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 46–67

Figur 12
Exempel på en elevuppgift där svaret inte är ett naturligt tal

Not: Bilden visar en pizza som hör till elevens formulerade uppgift (vänster) samt en pizza delad i åtta bitar som hör till elevens lösning på sin uppgift (höger).

Det förekom också formulerade uppgifter där helheten inte gick att dela. Ibland löste eleverna detta genom att säga att man behöver baka en bulle till eller kan köpa en till kaka. I exemplet nedan har eleven formulerat en uppgift om hundar och påpekade själv att hundar inte kan delas (figur 13).

Figur 13
Exempel på en elevuppgift där helheten inte går att dela

Not. Figuren visar fyra barn, en gata och en hundaffär.

Uppgifterna som hade division som matematiskt innehåll medför att aspekten dela som division har urskilts. Det finns dock exempel där eleverna inte har urskilt denna aspekt, till exempel ”Dela kakorna på mitten, hur många halvor blir det?” (figur 14). I detta exempel (som klassificerades som annan matematik, addition) blev det tydligt att aspekten dela som division inte har urskilts.

Figur 14
Exempel på en elevuppgift med addition som matematiskt innehåll

Likheter och skillnader mellan aspekter vid problemlösning respektive problemformulering
När eleverna arbetade med problemlösning urskilde de relationen mellan delar och helhet och storleken på varje del som aspekter av division. Kakorna sågs av alla grupper som en kontinuerlig mängd och kakor delades itu för att kunna svara på 15/4. När eleverna därefter blev ombedda att formulera en liknande uppgift återkom dessa aspekter, mestadels formulerade som divisionsuppgifter. Det innebar att eleverna i samband med problemformuleringen fick möjlighet att ytterligare bearbeta dessa aspekter av division. När eleverna formulerade egna liknande uppgifter var de fria att välja de tal de ville använda och några av eleverna valde att utgå från kontinuerliga mängder. Utöver de aspekter som återkom vid problemformulering förekom även en liknande kontext men där uppgifterna hade ett annat matematikinnehåll. Eftersom eleverna ombads att formulera en liknande uppgift kan detta tyda på att dessa elever fokuserade på uppgiftens kontext framför matematikinnehållet i samband med problemlösningen.

Att uppgifter om division skulle resultera i *lika* påpekas ibland explicit av eleverna genom att de använder ordet lika i frågan och ibland implicit när frågan löses av eleven. I några fall är det dock inte viktigt att det är lika stora bitar. Exemplet när pappan får de största bullarna, mamman de mellanstora och barnet de minsta innebär en annan typ av rättvisa (figur 9).

Ibland gjorde eleverna frågan om division svårare genom att använda rationella tal eller genom att ställa en mer komplicerad fråga eller en mer reflekterande fråga, till exempel hur ska du göra när det inte går jämnt ut? Problemformulering erbjöd elever därmed möjlighet att visa vad de kan på annat sätt än problemlösning eftersom eleverna gavs större autonomi i problemformulering.

Diskussion
Syftet med designforskning är att i samarbete mellan forskare och lärare i klassrumskontext utveckla teorier som kan användas för att informera och vägleda undervisnings- och lärandepraktiken (Bakker, 2018). Eftersom vi här enbart presenterar en designcykel utvecklas ingen teori men slutsatser av värde för undervisnings- och lärandepraktiken kan dras. I designcykeln blev eleverna ombedda att först lösa en problemlösningsuppgift i grupp för att sedan formulera en liknande uppgift individuellt. När eleverna formulerade uppgifter blev det synligt vilka aspekter från den ursprungliga problemlösningsuppgiften som återspeglades i de uppgifter som

eleverna själva formulerar. De uppgifter som eleverna formulerade ger därmed lärare insikter hur elever tolkar den ursprungliga problemlösningsuppgiften och vad de urskiljer i relation till det matematiska innehållet (Carrillo & Cruz, 2016; Palmér & van Bommel, 2020). Att följa upp problemlösning med problemformulering, och då be eleverna att formulera liknande uppgifter, ger därmed elever möjligheter till fördjupat lärande och samtidigt läraren insyn i detta lärande. I relation till matematikundervisning i förskoleklass erbjuder problemformulering elever autonomi. Det innebär att eleverna i stället för att söka information får välja och ge information och i stället för att svara på frågor är det de själva som ställer självvalda frågor. Vidare möjliggör problemformulering differentiering där vissa elever formulerar mer komplexa frågor eller reflekterande frågor, till exempel: Hur ska du göra när det inte går jämnt ut? Givetvis är det inte så att alla elever utmanar sig själva men möjligheten finns.

Det specifika syftet med designcykeln som presenterats i artikeln var att studera vilka aspekter av division som elever i förskoleklass urskiljer i samband med problemlösning och problemformulering. I resultatdelen kan vi följa hur eleverna i problemlösning urskilde aspekterna relationen mellan delar och helhet, storleken på varje del, dela som division samt kontinuerliga och diskreta mängder. När eleverna därefter blev ombedda att formulera en liknande uppgift återkom dessa aspekter i de uppgifter som klassificerades som divisionsuppgifter. Dessutom tillkom aspekten att täljaren inte behöver vara ett naturligt tal där formulerade uppgifter med rationella tal i täljaren förekom. Därutöver återkom till exempel uppgifter med en liknande kontext men ett annat matematikinnehåll.

När elever likt i denna problemlösning arbetar i grupp ges de möjlighet att lyssna till andras idéer, dela med sig av sina egna idéer samt ta ansvar för gruppens gemensamma arbete vilket framhålls som framgångsfaktorer i problemlösning (Tarim, 2009). Vad resultaten i denna studie indikerar är dock att eleverna i samma grupp urskiljer olika aspekter av matematikinnehållet i den gemensamma problemlösningen. Denna indikation bygger på den stora variation i elevernas formulerade uppgifter där 47 uppgifter innehöll annan matematik och 37 uppgifter ingen matematik. Antalet formulerade uppgifter som inte innehöll matematik sticker ut i jämförelser med tidigare designcykler i vår studie där eleverna har arbetat med andra matematikinnehåll (mätning, tredimensionell geometri) där det varit ytterst få elever som inte formulerade matematikuppgifter (se Palmér & van Bommel 2020, 2023). Vid andra problemlösningstillfällen arbetade eleverna i par. I den här presenterade designcykel arbetade eleverna i grupper av tre elever utifrån problemlösningsuppgiftens formulering (15 kakor fördelas på 3 personer). Ett möjligt alternativ upplägg för att eleverna ska kunna arbeta i par, skulle vara att representera de tre personerna i problemlösningsuppgiften med till exempel dockor så att elever kan arbeta i par både vid problemlösningsuppgiften och vid problemformuleringen. Att klargöra huruvida det var matematikinnehållet division eller arbetsformerna som påverkade det stora antalet icke-matematikuppgifter kräver dock vidare studier.

Ett generellt antagande som beskrivs i början på denna artikel är att problemlösning och problemformulering är viktiga i tidig matematikundervisning. När vi här fokuserar på division som matematikinnehåll, och när förskoleklasslärarna genomför den gemensamt planerade undervisningen, kan vi konstatera att rika möjligheter för bearbetning av såväl det matematiska innehållet som kontextburna erfarenheter skapas . Detta är i linje med tidigare designcykler. Resultaten visar sammantaget att ett arbete med problemlösning och problemformulering i förskoleklass kan ge elever möjlighet att i linje med EU:s nyckelkompetenser (EU, 2019) utveckla såväl matematikkunskaper som problemlösningsförmåga. Samtidigt som studien erbjöd situationer som förberedde eleverna för att lösa problem i vardagen är det dock vardagen som ibland utmanar den matematiska korrektheten, eftersom elevers vardagserfarenheter av delning inte alltid är överförbara in i matematiska sammanhang (se även Correa m.fl., 1998; Empson, 1999; Neuman, 1999). Ett tydligt exempel på detta i resultatet är distinktionen mellan att få lika mycket eller lika många där det i division är viktigt att delarna har samma storlek medan det i vardagssituationer kan uppstå tillfällen där antal delar är det viktiga.

För att komma åt aspekten relationen mellan delar och helhet behöver eleverna på något sätt kontrollräkna. Kontrollräkning erbjuder eleverna att engagera sig i frågan om kakorna är rättvist fördelade. Att det ska vara rättvist, och vad som är rättvist är två saker som är centrala i elevernas diskussioner. Eleverna verkar tolka rättvist med att det ska vara ”lika”. Att det ska vara ”lika” påpekades ibland explicit genom att använda ordet lika i den formulerade frågan men även implicit när formulerade uppgifter löstes av elever. Vad som är rättvist kan dock skilja något, ofta beroende på erfarenhet, som en av eleverna också påpekade kan rättvist i vardagen vara när de vuxna får mer än barn. I några fall var det därmed inte viktigt att det är lika stora bitar, till exempel att pappan får de största bullarna, mamman de mellanstora och barnet de minsta. Om det skulle bli delar över kan de tilldelas någon som är extra hungrig, någon som saknas eller någon som inte fick tillräckligt mycket förra gången. Det finns tydligt en annan form av rättvisa vilket kan försvåra lösandet och formulerandet av uppgifter när kakorna som kontext tydligt urskildes från ursprungsuppgifterna. Även om kak-kontexten inte är en aspekt för det matematiska innehållet division tycks kontexten för några av eleverna möjliggöra och för andra stå i vägen för att urskilja aspekter av division.

Sammantaget ger studiens teoretiska val (Marton, 2014) inte bara inblick i hur elever urskiljer, differentierar och slutligen sammanför nödvändiga aspekter av ett lärandeobjekt division. Studien tillför även viktig kunskap om problemlösning och problemformulering generellt och specifikt mot skolans tidigare år och hur studier innehållande problemlösning och problemformulering kan designas och implementeras i aktuella verksamheter (Cai & Hwang, 2020; English & Sriraman, 2010), något som till stor del saknas i såväl nationell som internationell forskning (Palmér & van Bommel, 2020; Singer m.fl., 2013).

Avslutningsvis några reflektioner kring studiens genomförande i relation till implementering i andra förskoleklasser. Som nämnts planerades undervisningsaktiviteterna i samarbete mellan förskoleklasslärare och forskare medan det var förskoleklasslärarna som genomförde aktiviteterna tillsammans med eleverna. Dessa förskoleklasslärare har under flera år medverkat i forskningsprojektet vilket innebär att de är vana och mycket duktiga på matematikundervisning genom problemlösning och problemformulering. Utifrån deras fleråriga erfarenhet vet de syftet med uppgifterna och därmed när de behöver följa och när de kan avvika från den gemensamma planeringen. Tarim (2009) poängterar att lärarens roll är mycket viktigt även om eleverna är vana vid problemlösning, till exempel genom att ställa frågor för att hjälpa grupper vidare. Lärarna i denna studie vet vilka frågor de kan ställa till elever som kört fast utan att eleverna blir lotsade i sin lösning och de vet hur de kan strukturera de viktiga avslutade samtalen för att den avsedda matematiken ska synliggöras. Lärarna är dessutom de som presenterar uppgiften för eleverna, skapar grupperna och erbjuder ler-kakorna (material) vilket Tarim (2009) lyfter som avgörande för framgång i problemlösning. Om en (förskoleklass)lärare helt utan denna erfarenhet genomför de undervisningsaktiviteter som presenteras i denna artikel kan resultatet bli annorlunda utifrån de erfarenheter den läraren och de eleverna har. Det finns dock bara ett sätt att skaffa sig erfarenheterna lärarna och eleverna i studien har och det är att börja genomföra matematikundervisning i förskoleklass genom problemlösning och problemformulering.

Referenser

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Björklund, C. & Runesson Kempe, U. (2020). Utveckling av räknefärdigheter hos fem-till sjuåringar: Matteuseffekt eller utfall av undervisning. *Forskning om undervisning och lärande*, *8*(1), 9–28.

Cai, J. & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Hwang, C., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. I F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Red.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (s. 3–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Carrillo, J. & Cruz, J. (2016). Problem-posing and questioning: Two tools to help solve problems. I P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (Red.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (s. 23–36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_2

Chen, L., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2013). The relationship between students' problem posing and problem solving abilities and beliefs: A small-scale study with Chinese elementary school children. *Frontiers of Education China*, *8*(1), 147–161. https://doi.org/10.1007/BF03396966

Ching, B. H. H. & Wu, H. X. (2021). Young children's knowledge of fair sharing as an informal basis for understanding division: A latent profile analysis. *Learning and Instruction*, *73*, 101460. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101460

Cifarelli, V.V. & Sevim, V. (2015). Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving. I F.M. Singer, N.F. Ellerton & J. Cai (Red.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (s. 177–194). Springer.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, *90*(2), 321–329. https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.3211

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.

Ebbelind, A., Palmér, H. & van Bommel, J. (2023) Experience a sense of being, becoming and belonging to an educational design project as professional development. I P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (Red.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (s. 3187–3194). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Ellerton, N. F., Singer, F. M. & Cai, J. (2015). Problem posing in mathematics: Reflecting on the past, energizing the present and foreshadowing the future. I F. M. Singer & N. F. Ellerton (Red.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (s. 547–556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_26

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first grade classroom. *Cognition and Instruction*, *17*(3), 283–342. http://www.jstor.org/stable/3233836

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. I B. Sriraman & L. English (Red.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (s. 263–290). Springer.

European commission, directorate-general for education, youth, sport and culture. (2019). Key competences for lifelong learning. *Publications Office*. https://doi.org/10.2766/569540

Frydman, O. & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, *3*(4), 323–339. https://doi.org/10.1016/0885-2014(88)90019-6

Gunderson, A. G. (1955). Thought-patterns of young children in learning multiplication and division. *The Elementary School Journal*, *55*(8), 453–461. https://doi.org/10.1086/458721

Hansson, H. (2019). Betydelsen av att variera innehållsliga aspekter för yngre elevers lärande av platsvärde. *Forskning om undervisning och lärande*, *7*(3), 48–74.

Klaassen, K. & Doorman, M. (2015). Problem posing as providing students with content-specific motives. I F.M. Singer, N.F. Ellerton & J. Cai (Red.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (s. 177–194). Springer.

Khalid, M., Saad, S., Abdul Hamid, S.R., Ridhuan Abdullah, M., Ibrahim, H. & Shahrill, M. (2020). Enhancing creativity and problem solving skills through creative problem solving in teaching mathematics. *Creativity Studies*, *13*(2), 270–291. https://doi.10.3846/cs.2020.11027

Legare, C. H., Mills, C. M., Souza, A. L., Plummer, L. E. & Yasskin, R. (2013). The use of questions as problem-solving strategies during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, *114*(1), 63–76. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.07.002

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modelling. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763–799). National Council of Teachers of Mathematics and Information Age Publishing.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315816876

Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(2), 193–220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2

Matalliotaki, E. (2012). Resolution of division problems by young children: What are children capable of and under which conditions? *European Early Childhood Education Research Journal*, *20*(2), 283–299. https://doi.org/10.1080/1350293x.2012.681132

Neuman, D. (1999) Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 101–128. https://doi.org/10.1023/A:1003852815160

Palmér, H. (2008). Är ett halvt kex lika många som ett helt kex? I I. Pramling Samuelsson & N. Pramling (Red.), *Didaktiska Studier från förskola och skola* (s. 19–40). Gleerups Utbildning AB.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2018). Young students' feelings towards problem solving tasks: What does "success" imply? I B. Rott, G. Törner, J. Peters-Dasdemir, A. Möller & Safrudiannur (Red.), *Views and beliefs in mathematics education: The role of beliefs in the classroom* (s. 69–78). https://doi.org/10.1007/978-3-030-01273-1_7

Palmér, H. & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: What does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, *52*(4), 743–752. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x

Palmér, H. & van Bommel, J. (2021). Teachers' participation in practice based research: A methodological retrospect. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *26*(3–4), 113–130.

Palmér, H. & van Bommel, J. (2023). Young Students Exploring Measurement Through Problem Solving and Problem Posing. *The Mathematics Educator*, *31*(1), 30–54.

Parmar, R. S. (2003). Understanding the concept of "division": Assessment considerations. *Exceptionality*, *11*(3), 177–189. https://doi.org/10.1207/S15327035EX1103_05

Pehkonen, E., Näveri, L. & Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *CEPS Journal*, *3*(4), 9–23. https://doi.org/10.25656/01:8498

Pramling, N. & Pramling Samuelsson, I. (2008). Identifying and solving problems: Making sense of basic mathematics through storytelling in the preschool class. *International Journal of Early Childhood*, *40*(1), 65–79. https://doi.org/10.1007/BF03168364

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics Education*, *27*(3), 293–309. https://www.jstor.org/stable/40248099

Singer, F. M., Ellerton, N. & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Skolverket. (2022). *Läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Lgr22).* https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stjernlöf, J. & Fred, J. (2014). Uppgifter som redskap för mediering av kritiska aspekter i matematikundervisning. *Forskning om undervisning och lärande*, (12), 21–43.

Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. I P. Clarkson (Red.), *Technology in mathematics education* (s. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2023). När dela lika är olika. *Nordisk barnehageforskning*, *20*(2), 110–129.

Tarim, K. (2009). The effects of cooperative learning on preschoolers' mathematics problem-solving ability. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 325–340. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9197-x

van Bommel, J. & Palmér, H. (2016). Young children exploring probability: With focus on their documentations. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *21*(4), 95–114.

van Bommel, J. & Palmér, H. (2021). Young students' views on problem solving versus problem posing. *Journal of Childhood, Education & Society*, *2*(1), 1–13. https://doi.org/10.37291/2717638x.20212165

van Bommel, J. & Palmér, H. (2022) Dividing cookies: What do students discern? I L. Mattsson, J. Häggström, M. Carlsen, C. Kilhamn, H. Palmér, M. Perez & K. Pettersson (Red.), *The relation between mathematics education research and teachers' professional development. The thirteenth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, Växjö* (s. 33–44). Svensk förening för MatematikDidaktisk Forskning - SMDF.

Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed.* [Elektronisk resurs]

Wyndhamn. J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik.* Linköpings universitet.

Författarpresentationer

Jorryt van Bommel
Jorryt van Bommel är gästprofessor i matematikdidaktik vid Högskolan Dalarna och beforskar just nu yngre elevers lärande i matematik samt lärarnas professionalisering.

Hanna Palmér
Hanna Palmér är professor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hennes forskningsintresse är yngre barns lärande i matematik och tidig matematikundervisning

Andreas Ebbelind
Andreas Ebbelind är i universitetslektor i matematikdidaktik vid Linnéuniversitetet. Hans forskning fokuserar problemlösning, digitala verktyg samt yrkesidentitet.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 68–84
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Matematiska och etiska resonemang i förskolan – didaktisk modellering som intervention

Orginalartikel

Maria Hedefalk[1]*, Lovisa Sumpter[2] & Helena Eriksson[3]

[1] Institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningssociologi, Uppsala universitet

[2] Institutionen för ämnesdidaktik, Stockholms universitet

[3] Högskolan Dalarna

*Korresponderande författare:
Maria Hedefalk
maria.hedefalk@edu.uu.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 68–84
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23608
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Sammanfattning

I artikeln undersöks didaktiska val i undervisning där matematik och hållbar utveckling möts. Undervisningens syfte var att uppmuntra förskolebarn att kollektivt resonera kring fördelningsproblem. Det var barnens resonemang om möjliga lösningar som låg i fokus, inte ett rätt svar. Förskollärarens roll var att skapa möjligheter för agens: att barnen kunde göra egna bidrag i kunskapandet, där barnen kunde ställa olika konflikterande perspektiv om hållbara lösningar mot varandra och diskutera lösningarna. Utifrån metoden didaktisk modellering förde forskare och förskollärare diskussioner om undervisningen utifrån olika expertis. Dokumentationen som skapades under dessa möten analyserades, för att pröva om en didaktisk modell som hanterar de didaktisk vad- och hur-frågorna kunde hjälpa förskollärarna att skapa agens i undervisningen. Resultatet visar hur reflektion kring de didaktiska frågorna kan skapa möjligheter för agens i undervisningen. Didaktiska lösningar handlade om organisation av tid och miljö, om svårigheter att para ihop barn för kollektivt arbete samt språkutvecklande arbete.

Nyckelord: didaktisk modellering, etiska resonemang, förskola, matematiska resonemang

Abstract

The article examines didactic choices in teaching where mathematics and sustainable development meet. The purpose of the teaching was to encourage preschool children to reason collectively about distribution problems. It was the children's reasoning about possible solutions that was in focus, not a correct answer. The preschool teacher's role was to create opportunities for agency: enable childrens own contributions to knowledge, pit different conflicting perspectives on sustainable solutions against each other and discuss the solutions. Based on the didactic modeling method, researchers and preschool teachers discussed the teaching based on different expertise. Documentation created during these meetings was analysed, in order to investigate if the didactic what and how questions could help the preschool teachers create agency in teaching. The result shows how reflection on the didactic issues created opportunities for agency in relation to organization of time and environment, of pairing children for collective work and language development work.

Keywords: Preschool class, Mathematics, Teaching, Quality, Learning opportunities, Numbers, Part-whole relations of numbers forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 68–84 Maria Hedefalk m.fl.

Introduktion

Undervisning för hållbar utveckling (UHU) regleras numer både i nationella som internationella styrdokument (Skolverket, 2018; Förenta Nationerna, 2018). Hållbarhetsfrågor kan till exempel handla om hur vi fördelar jordens resurser på ett rättvist sätt, utan att tära på jordens resurser (Rockström m.fl., 2019). Det saknas dock konsensus kring hur UHU bör gå till (jfr Griffiths & Murray, 2017), framför allt då UHU beskrivs som ämnesövergripande. Det är främst inom de naturvetenskapliga ämnena som hållbarhetsfrågor har hanterats i undervisningen (Ärlemalm-Hagsér & Sundberg, 2016). Hur och på vilket sätt förskolan kan skapa ett meningsskapande för hållbar utveckling i relation till andra ämnen så som matematik, finns det lite information om. Inom forskningsfältet efterfrågas därför empiriska studier från praktiken där fler ämnen än de naturvetenskapliga hanterar hållbarhetsfrågor (Tryggvason, 2023).

Forskare menar att matematikämnet är väl lämpat för att utveckla kunskap kring hållbar utveckling (Ernest, 2020). Vad matematikundervisningen bör bestå av är inte självklart på grund av den komplexitet och osäkerhet som råder kring vilka handlingar som leder till hållbar utveckling (Block m.fl., 2018; Rockström m.fl., 2019). Matematikundervisning som hanterar hållbarhetsproblem ska inte nödvändigtvis förmedla rätt svar, utan mer ge utrymme att utveckla en kritisk diskussionsförmåga (Haier m.fl., 2022). På så sätt behöver inte läraren veta vilken handling som är mest hållbar. Lärarens roll blir istället att lyfta fram olika konflikterande perspektiv om hållbara lösningar och ställa dem mot varandra för att möjliggöra för diskussion kring lösningarna (Andersson, 2017; Berglund & Gericke, 2015; Block m.fl., 2018). Syftet med undervisningen kan därför inte vara att lära ut de rätta svaren eftersom vi inte har dem. Istället blir syftet att utveckla förmågan att bidra till förändring (Bascopé m.fl., 2019; Van Poeck & Östman, 2020). Detta inkluderar förmågan ”att bry sig om” (Griffiths & Murray, 2017). Sådan undervisning behöver väcka barnens känslor så att de får möjlighet att bry sig och forma egna värderingar om hållbarhetsfrågor.

När barns engagemang väcks i undervisningen, som beskrivs ovan, skapas politisk agens (Caiman & Lundegård, 2014; Håkansson & Östman, 2019). När agens skapas är inte uppfattningarna bestämda före undervisningssituationen, utan dessa formas i den aktiva diskussionen som förs med kamraterna (Lundegård & Wickman, 2012). Den kollektiva aspekten i resonerandet blir därför avgörande (Sporre m.fl., 2022; 2016; Sumpter, 2016) då deltagaren får möta andras syn i diskussionen om hållbarhetsfrågan (Wals, 2010). Dock är det inte klart hur en sådan undervisning kan skapas där barn har möjlighet att föra och följa olika resonemang.

Syfte och frågeställning

I denna studie utgår vi från att pluralistisk undervisning är relevant för att skapa möjligheter för agens för förskolebarn (jfr Caiman & Lundegård, 2014). Agens innebär i en didaktisk kontext att skapa möjligheter i undervisningen för barn att påverka genom att göra egna bidrag i kunskapandet kring hållbarhetsfrågor (Lundegård & Wickman, 2012; Rudsberg & Öhman, 2010; Van Poeck & Östman, 2020). Vår utgångspunkt är att en sådan undervisning inte bara är grunden för matematiklärande (Sumpter, 2016) utan också stärker barnens motivation och upplevs positivt av de deltagande barnen (Sumpter m.fl., under utgivning). Syftet är att studera de didaktiska val som möjliggör ett meningsskapande där matematik och UHU möts. Genom att analysera den dokumentation som har skapats under arbetet med sex fall, kan vi se vilka teman som framträder och huruvida de är i linje med att skapa möjligheter för agens. De forskningsfrågor vi ställer är:

1. Vilka didaktiska val blir relevanta för förskollärare när matematik och hållbar utveckling möts?

2. Hur möjliggör undervisningen utrymme för agens för barnen?

Bakgrund

Den teoretiska bakgrunden till artikeln struktureras upp i tre delar. Först beskrivs aspekter av didaktik i förskolan, vilket blir studiens teoretiska ramverk. Därefter beskrivs de olika sorters resonemang inom matematik och hållbar utveckling (HU) som används i undervisningen och sist hur agens blir viktig för att möjliggöra för barns egna bidrag i resonemangen.

Undervisning i förskolan

Didaktik är förskollärarnas professionsvetenskap och består av undervisningens teori och praktik. Didaktiken består alltså både av teoretiska utgångspunkter och didaktiska modeller om hur undervisningen kan förstås men också av den praktiska utövningen av att undervisa (Wahlström, 2023). Didaktik beskrivs som ett hantverk, något som utvecklas genom övning och erfarenhet (Vallberg Roth m.fl., 2020). Dessutom ger didaktiken förskolläraren en bas för att fatta välövervägda val (Sjöström, 2019; Vallberg Roth m.fl., 2020). Valen behöver lutas mot forskning eller beprövad erfarenhet vilket hjälper förskolläraren att förstå hur valen leder till olika konsekvenser för undervisningen och barnens lärande. För att kunna reflektera över konsekvenserna kan förskolläraren använda sig av de klassiska didaktiska frågorna. Frågorna innebär att reflektera över *vad* som ska undervisas, *hur* det ska undervisas och *varför* detta innehåll väljs ut (Hjälmeskog m.fl., 2020).

Undervisningen ska vara intentionell, det vill säga att den riktar uppmärksamheten mot något specifikt (Sheridan & Williams, 2018). När förskollärare har olika intentioner med undervisningen riktar de således barnens uppmärksamhet mot varierande innehåll, vilket resulterar i att barn också lär sig olika saker (Hedefalk, 2014). Enligt Löf och Vallberg Roth (2021) finns en ”risk” (deras uttryck) med undervisning som är beroende av den individuella förskollärarens kunskap, värderingar och intressen. Om förskollärarens värderingar är oreflekterade kan undervisningen resultera i att det etableras ensidiga, normerande värderingar som kontrollerar barnens handlingar. Löf och Vallberg Roth (2021) menar att det bör finnas utrymme i undervisningen för barnen att diskutera vad som, till exempel, kan kan vara rättvist, och där andra värderingar än förskollärarens uttrycks. I ljuset av Löf och Vallberg Roths (2021) studie blir det tydligt att förskolläraren behöver göra välreflekterade didaktiska val för att skapa möjlighet för barn att påverka undervisningsinnehållet och uttrycka sin egen mening.

Kollektiva matematiska resonemang

Matematiska resonemang kan ses på många olika sätt (Lithner, 2008), och här fokuserar vi på kollektiva matematiska resonemang (Sumpter, 2016). Lärande genom samarbete sker när två eller fler individer är engagerade i en aktivitet där de interagerar med varandra och lärandet sker tillsammans (Dillenbourg, 1999). Detta perspektiv ser lärande som en social praktik (t.ex. Cobb & Bowers, 1999) och kan jämföras med studier som fokuserar på meningsskapande. Ett exempel på en sådan studie är Sumpter och Hedefalk (2018) som studerade vilken mening som skapades när förskolebarn resonerade om höjden på en stor sten med en pedagog. I mötet argumenterade barnen bland annat för att använda ett hus som mätverktyg, vilket bekräftades av pedagogen som relevant och som resulterade i en slutsats som kunde accepteras av deltagarna. Resonemang ses som en kedja av argument som förs fram för att lösa en uppgiftssituation (Lithner, 2008), och i ett kollektivt resonemang skapas argumenten tillsammans (Sumpter, 2016) snarare än att ses som individuellt resonemang (jfr Lithner, 2008).

Forskning i kollektiva matematiska resonemang, här fokuserat på yngre elever i förskola och de första skolåren, har identifierat fyra olika typer av argument (Eriksson & Sumpter, 2021; Sumpter & Hedefalk, 2023); identifierande argument (hur barnet förstår uppgiften/problemet), förutspående argument (vilket strategi barnet väljer för att lösa uppgiften), verifierande argument (varför strategin löste uppgiften) samt utvärderande argument (löste den valda strategin uppgiften?). Utifrån dessa argument kan resonemangskompetens då ses som förmåga att kunna ge olika typer av argument och kunna motivera olika val och slutsatser i resonemanget (Niss, 2003). Att kunna skapa ett matematisk resonemang inkluderar även undersökande arbete där det inte alltid finns ett rätt svar, utan resonemanget syftar till att utforska olika möjligheter (Eriksson m.fl., 2023).

Etiska resonemang och agens som del av UHU

Matematiska resonemang bör enligt Ernest (2020) även innehålla etiska överväganden. Han lyfter fram den goda matematikern som bidrar till samhällsutveckling mot en mer hållbar framtid. Empiriska studier har visat att barn är kapabla att föra fram både matematiska och etiska resonemang när de löser komplexa situationer (Sumpter & Hedefalk, 2023). Matematikämnet tar då ansvar för samhällsfrågor, vilket kan förstås i linje med till exempel dygdetik. Liknande resonemang kan finnas i UHU och etik, där till exempel Höglund (2020) visar hur etik och värderingar påverkar hur vi resonerar kring vad vi väljer att äta. Etiska resonemang som baseras på dygdetik innebär att agera som en god människa, vilket också går i linje med pliktetiken som handlar om att agera rätt enligt förbestämda moraliska regler som inte får brytas. Konsekvenserna läggs i fokus inom konsekvensetiken, där personen behöver reflektera över hur handlingen påverkar andra. Det är konsekvensen som avgör vilken handling som anses mest relevant, inte förbestämda regler. Barnen i artikeln ställs inför uppgiften att fördela kex mellan nallar. För att fördela kexen rättvist behöver de också göra värderingar (Sumpter & Hedefalk, 2023). Några av de etiska dilemman som barnen behöver ta hänsyn till är om resurser ska fördelas lika när behoven är explicit olika. Om barnet kommer fram till att någon nalle inte ska få lika många kex som de andra nallarna räcker inte en matematisk lösning till (till exempel division) utan barnet behöver göra en värdering – en etisk bedömning – av situationen. Dock är det inte uppenbart vilka värderingar som är de rätta och forskning har visat att det är svårt för lärare att avgöra vilken etik som är den som leder till den mest hållbara lösningen (jfr Samuelsson, 2020). Därför är utgångspunkten för denna studie att barnen själva ska få komma fram till vilken värdering som de anser är rätt. Det är alltså inte en i förväg bestämd etik som avgör vad som är rätt, utan uppfattningen om vad som blir en relevant handling skapas i barnens resonemang i undervisningssituationen.

För att möjliggöra för agens i undervisningen behöver förskollärare göra didaktiska val som möjliggör för barnen att utforska en hållbarhetsfråga, där de tillsammans skapar kunskap om vad som kan vara hållbart. Här finns en parallell till kollektiva matematiska resonemang (jfr Sumpter, 2016), som ett kollaborativt meningsskapande. Det är barnens frågor och samtal som skapar agens i undervisningssituationen, inte förskollärarens förbestämda uppfattningar om vad som är hållbart. Agens är alltså inget barnen har, utan något som skapas temporärt i undervisningen (jfr Caiman & Lundegård, 2012). För att skapa möjligheter för agens behöver förskolläraren medvetet möjliggöra för barnen att kunna påverka det som händer i undervisningen.

Metod

Studien som beskrivs i denna artikel ingår i ett pågående större projekt som genomförs med metoden didaktisk modellering. Metoden går ut på att skapa en didaktisk modell som kan hjälpa förskollärare att planera, genomföra och reflektera över sin undervisning (Wickman m.fl., 2018).

Själva skapandet av den didaktiska modellen sker i ett ömsesidigt utbyte mellan förskollärare och forskare, där ny didaktisk kunskap genereras förankrad i förskollärares erfarenheter i kombination med relevant forskning (Magnusson & Malmström, 2022). En viktig distinktion, mellan didaktisk modellering och andra sätt att närma sig undervisningsfrågor, är att didaktiska modeller inte formas utifrån rent teoretiska grunder ur till exempel lärandeteorier eller genom direktimport från andra vetenskaper, som till exempel psykologi eller sociologi (Wickman m.fl., 2018). Utgångspunkten för projektet i stort men också för artikelns studie mer precist, var att i förskollärarnas praktik fanns väl beprövad erfarenhet som, genom dokumentation och interaktion med teori, systematiskt kunde utvecklas. På så sätt fick forskare och förskollärare samma betydelse i processen om än i olika roller. Detta står i kontrast till interventioner där förskollärare och forskare ses som exakt lika eller där rollerna har olika betydelser, till exempel att förskollärare ska följa ett framtaget manus. Istället samarbetade förskollärare och forskare och utvecklade undervisning i cykliska förlopp tillsammans. Proceduren inom didaktisk modellering består av tre faser; extrahering, mangling och exemplifiering (Hamza & Lundqvist, 2023). Studien genomfördes på två förskolor, under två terminer. Tre forskare, elva förskollärare och 64 barn i åldrarna tre till fem år deltog i studien. Alla forskare författade artikeln och genomförde analyser medan endast en av forskarna interagerade med förskollärarna.

Extraheringsfasen

Extraheringsfasen genomfördes i det större projektet men ligger som underlag för studien i artikeln. Här utformade forskarna med hjälp av tidigare forskning sex fall om fördelning av kex utifrån olika scenarier (Sumpter & Hedefalk, 2023). Det första fallet involverade tre nallar där barnen fick i uppgift att fördela tolv kex mellan nallarna. Lösningen var öppen på så sätt att barnen själva bestämde hur de ville fördela resursen. Efter hand blev fallen mer och mer komplicerade då kexen varierade i antal och storlek, nya nallar tillkom och vissa var både hungriga och ledsna. Det var därmed inte självklart hur kexen skulle fördelas, utan barnen behövde använda sig av både matematik och värderingar kring vem som eventuellt skulle få mer eller mindre kex.

Manglingsfasen

I denna fas prövades en tidigare skapad modell: de klassiska didaktiska frågorna vad, hur och varför. Modellen prövades (jfr Ingerman & Wickman, 2015; Wickman m.fl., 2018) för att undersöka hur de didaktiska frågorna kunde hjälpa lärarna att möjliggöra för agens i undervisningen. Undervisningen och reflektionerna kring de didaktiska valen var inte toppstyrt av forskarna, utan designen tillät en flexibilitet där förskollärarna och den närvarande forskaren kunde reflektera tillsammans och sedan kunde förskollärarna individuellt, under nästa cykel i processen, prova olika didaktiska val i praktiken och utveckla undervisningen. Denna studie utgår från den mangling som skedde under hösten 2022 och våren 2023. Fokus för mangling var prövandet av den didaktiska modellen för att undersöka hur den hjälpte förskollärarna att reflektera över hur undervisning kan skapas där barn får utrymme (agens) att uttrycka olika argument.

Exemplifieringsfasen

Exemplifiering innebär att en didaktisk modell prövas och används i olika verksamheter för att få reell bäring (Hamza & Lundqvist, 2023). Exemplifieringen kan ses som en utveckling av undervisning, men också som ett sätt att belysa sådant som finns i lärares praktik och som forskare inte kan förutspå (Biesta, 2012). Därmed följer didaktisk modellering två socio-filosofiska spår; (1) en syn på undervisningen som en förgänglig produkt som behöver överföras, lärare till lärare och lärare till forskare (Bauman, 2013) och (2) skillnaden mellan det planerade och utfallet inte ska tolkas som fel utan en nödvändig förändring av det planerade (Skovsmose & Borba, 2004). Detta liknar den beskrivning av undervisning som finns i förskolans läroplan där det står att dokumentation, inklusive uppföljning, utvärdering och analys, ska integreras med varandra och bilda en helhet i förskolans verksamhet (Skolverket, 2018). De som arbetar i förskolan ska således kritiskt granska undervisningsmetoder och systematiskt och kontinuerligt analysera resultatet för utveckling. Åtgärder för att utveckla och förbättra undervisningen i förskolan ska grundas på denna analys. På så sätt är didaktisk modellering ett arbetssätt som ligger i linje med läroplanen och där förskollärare samarbetar med forskare på lika villkor.

Urval och etik

Studiens forskningsdesign påverkade urvalet, vilken bestod av en mix av bekvämlighet och ändamålsenligt urval (Manson, 2018). Huvudmannen, i kommunen som deltog i studien, valde ut förskolor där förskollärare i det systematiska kvalitetsarbetet hade uttryckt svårigheter att engagera barnen i att resonera i sin undervisning, vilket också gick i linje med studiens syfte. Det var således praktikens undervisningsdilemman som påverkade urvalet. De förskolor som deltog i studien var belägna i ett område i en mellansvensk kommun som är klassat som ett av Sveriges utanförskapsområden. Området har många nysvenska familjer och barngrupperna på förskolorna är organiserade så att barn med olika modersmål går i samma barngrupp. Alla förskollärare, barn och vårdnadshavare informerades om studien, att deras deltagande var frivilligt och att de kunde avbryta deltagandet när de ville. Förskollärarna skrev under samtyckesblanketter, i linje med Codex för god forskningssed (u.å.).

Dokumentation och diskussion om didaktiska val i undervisning av fallen diskuterade under två tillfällen under hösten 2022 och två tillfällen under våren 2023. Inför varje möte fanns en dagordning där något som intresserade förskollärarna och forskaren diskuterades. Varje möte avslutades med ”slutsatser och didaktiska val”. För att analysera valen användes en befintlig didaktisk modell: de didaktiska frågorna ”varför?”, ”vad?” och ”hur?” (Sjöström, 2019).

Den didaktiska forskningen var praktiknära då vi forskare i denna studie skapade kunskap om relevanta didaktiska val tillsammans med förskollärarna. Inför första mötet läste alla manus till den artikel där fallen presenteras (dvs. Sumpter & Hedefalk, 2023). Under mötet diskuterades de fall som förskollärarna hunnit prova i sina barngrupper. Då de kommit olika långt i arbetet med fallen, diskuterades de första tre fallen under första mötet. I dokumentationen framgår inte vem som säger vad, varför vi inte kan redovisa skillnader i uppfattningar specifikt, utan resultatet hamnar på en mer generell beskrivning av vad gruppen kom fram till gemensamt. Diskussionen under första mötet handlade om gruppstorlek, ålder på barnen, ord som barnen kunde uppleva svåra att förstå, längd på arbetspass, hur barnens arbete kunde dokumenteras, vad som kunde vara en godtagbar lösning och vikten av att barnen fick argumentera för sin lösning genom att berätta hur de tänkt. Nästa möte bestod av att följa upp arbetet med fallen, höra hur långt olika avdelningar hade kommit, vilka dilemman eller problem som hade uppstått och delge varandra erfarenheter av arbetet. Under det tredje mötet diskuterades specifikt de sista tre fallen utifrån frågorna: Vad hände i barngrupperna? och Hur kan vi pedagoger påverka det som händer? Under det fjärde mötet diskuterades arbete med inplastade kex utifrån följande områden: samarbete, relationer, ordförståelse, ytterligare uppgifter, göra uppgifterna igen och igen, vilka objekt som ska delas och vilka som ska vara mottagare. En forskare förde anteckningar under mötena som användes för analysen i denna studie. Vi analyserade även de anteckningar som förskollärarna själva hade fört och sedan valt att dela med sig. Förskollärarna var vana att arbeta med det systematiska kvalitetsarbetet, där bland annat dokumentation och reflektioner kring barns utveckling och lärande ingår.

Analysprocedur

För att undersöka vilka didaktiska val som blev relevanta i undervisningen, använde vi oss av tematisk analys. Genom att läsa den dokumentation som hade skrivits fram kunde vi identifiera, analysera och rapportera teman. Forskarna genomförde analysen med ambitionen att fånga upp det som blev viktigt i relation till forskningsfrågorna, förskollärarna var därmed inte delaktiga i själva analysprocessen. Analysprocessen bestod av fyra steg som genomfördes i två omgångar (jfr Braun & Clark, 2006): (1) lära känna datamaterialet genom att läsa dokumentationen, (2) genomföra en första preliminär kodning utifrån didaktiska vad- och hur-frågor, (3) söka efter underteman och (4) granska temats innehåll för att se att det håller. Dessa fyra steg upprepades sedan för analys av agens. Metoden är kvalitativ vilket innebär att antalet gånger förskollärarna lyfte fram något inte var relevant. Fokus lades istället på hur undervisningen beskrevs och vilka olika didaktiska beslut som trädde fram (jfr Hjälmeskog m.fl., 2020; Sheridan & Williams, 2018). Under kodningsfasen lästes all dokumentation igenom och meningsbärande enheter plockades ut för att bryta ner texten och reducera den mot syftet.

I analysen användes en didaktisk modell som teoretisk analysverktyg. Den didaktiska modellen användes för att avgöra vilken didaktisk fråga som besvarades i dokumentationen, om framskrivningen i dokumentationen handlade om ”vad” barnen skulle lära sig eller om det handla om ”hur” de skulle lära sig (jfr Hjälmeskog 2020; Sjöström, 2019; Vallberg Roth m.fl., 2020). Textstycket från dokumentationen: ”Vi skulle använda frågor som ”Hur tänker du?”, ”Varför då?”, ”Är djuren nöjda?” för att hjälpa att argumentera för sina lösningar” fick till exempel koden ”uppmuntra till resonemang”. Textdelarna med koder om didaktiska vad-frågor lades i en grupp och textdelar med koder om didaktiska hur-frågor i en annan. När all text var läst och kodad inspekterades grupperna och delades upp i homogena undergrupper så som ”organisation” eller ”miljö” till exempel. I ett andra steg upprepades processen genom att skapa koder och reflektera över om och hur möjlighet till agens skapades för barnen. Till exempel koden ”Tid för att resonera” hamnade i under temat ”Organisera tid”. För att skapa transparens lades några utvalda excerpt från dokumentationen i resultatredovisningen.

Den didaktiska varför-frågan var bestämd i förväg, varför den inte används i analysen. Barnen arbetade med fallen med syftet att utveckla handlingskompetens för hållbar utveckling. I den kompetensen ingår att kunna resonera kring hållbarhets-problem som sällan har en självklar lösning. Syftet handlade vidare om att skapa undervisning där matematik och hållbar utveckling möts, här i relation till resursfördelning.

Resultat

Resultatet av den tematiska analysen visar vad som dokumenterades som problematiskt i arbetet med fallen i undervisningen och vilka didaktiska val förskollärarna i samtal tillsammans med en av forskarna kom fram till var relevanta att använda i den fortsatta undervisningen. De didaktiska valen delas nedan in i två teman: vad och hur med underteman (se tabell 1).

Didaktiska vad-frågor (innehåll)

”Vad” barnen skulle lära sig landade i två underteman: att utveckla barnens förmågor att argumentera för vad de anser är rättvis fördelning och att utveckla barnens språk, där vissa begrepp visade sig vara svåra att förstå och använda. Nedan beskrivs hur diskussionerna kring dessa vadfrågor såg ut i dokumentationen och vad för innehåll barnen ansågs behöva utveckla kunskap om.

Förskollärarna uttryckte att de upplevde att barnen, i arbetet med första fallet, inte ville eller kunde uttrycka sina argument kring vad de tyckte var en rättvis fördelning av kexen. I anteck-

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 68–84

ningarna kan vi läsa: ”Viktigt att få barnen att reflektera över vad rättvisa är eller kan vara”. De kom fram till att barnen behövde utveckla sin förmåga att verbalisera sina argument mer tydligt för varandra så att de skulle kunna diskutera fram en eller flera lösningar på fördelningsproblemen.

Förskollärarna upplevde att barnen hade svårt att förstå och formulera sig när de löste fallen. I anteckningarna läser vi: ”Ord som vi utifrån erfarenheter misstänkte kunde trassla för barnen var exempelvis ”dela”, ”lika”, ”samma”, ”tredjedel” och ”halv””. Anledningen till svårigheten att uttrycka sig menade förskollärarna berodde på att barnen inte hade svenska som modersmål. Ord som barnen upplevde som svåra var ”samma”, ”dela”, ”lika”, ”färre”, ”lika många”, ”lika stora”, ”del”, ”halv” och ”tredjedel”. Dessa ord var svåra både på svenska och på modersmålet. Ett lärandemål som formulerades blev därför att utveckla barnens ordförståelse.

Tabell 1

Resultat av analysen av de didaktiska vad- och hur-frågorna.

Didaktiska vad-frågor (innehåll)
Att utveckla matematisk och etisk argumentationsförmåga och kollektiva resonemang (för rättvis fördelning) Utveckla förmåga att komma fram till sin egen lösning. Utveckla förmåga att lyssna på andra och föra diskussion med kamrat.
Att utveckla språket (ordförståelse) Ord som är användbara för att kunna delta i resonemangen: ”samma”, ”dela”, ”lika”, ”färre”, ”lika många”, ”lika stora”, ”del”, ”halv”, ”tredjedel”
Didaktiska hur-frågor (metod)
Att organisera tid Inte lösa fler än två fall vid varje tillfälle. Arbeta med fallen på förmiddagen. Ge ordentligt med tid att arbeta fram en lösning. Barnen bestämmer när lösningen är klar.
Att möjliggöra kollektiva resonemang Dela upp barnen i par. Para ihop barn som är goda lekkamrater. Initialt godtags bara lösningar som är kollektiva. Ställ följdfrågor som får barnen att resonera vidare. Utmana femåringarna att föra kollektiva resonemang, uppmuntra yngre barn. Riv kexen i mindre delar (undvik verktyg så som sax).
Att hantera språksvårigheter Beskriv fallen och dess dilemman på modersmålet och uppmuntra barnen att redovisa lösningen på svenska.
Att organisera miljö Variera nallarna som används, återanvänd samma nallar så lite som möjligt. Genomför undervisningen på en speciell, avskild plats där barnen inte blir störda.
Att dokumentera lärandet Observera och dokumentera samarbetet mellan barnen på individnivå (fokusera på vad barnen säger). Låt barnen utföra dokumentationen genom att fotografera lösningarna.

Not. Tabellen är uppdelad i två teman, dessa är i sin tur indelade underteman, två om vad-frågan och fem om hur-frågan.

Didaktiska hur-frågor (metod)

Didaktiska frågor kring ”hur” förskollärarna skulle arbeta med fallen handlade om planering av tid, hur de kunde uppmuntra barnen att resonera, hur de skulle hantera språksvårigheter, hur de skulle organisera miljö och hur dokumentation skulle gå till. Nedan beskrivs hur diskussionerna kring dessa hur-frågor såg ut och vilka didaktiska val de resulterade i.

Efter att ha arbetat en första omgång med ett antal av fallen upplevde fler av förskollärarna att barnen tappade intresset efter ett tag. Här uppstod en del didaktiska utmaningar som handlade om tid. Hur många fall orkar barnen arbeta med åt gången? När på dagen har de energi att arbeta med fallen? När är lösningen klar? I en förskolläraranteckning kan vi läsa: ”Gemensamma didaktiska val- vi skulle göra två fall varje gång vi arbetade med barnen”. För att barnen skulle bibehålla intresset för uppgiften kom alltså förskollärarna fram till valet att begränsa sig till att lösa två fall per undervisningstillfälle. De kom också fram till att det var bäst att arbeta med fallen på förmiddagar, då barnen ansågs ha mest energi. De menade att när barnen var pigga utvecklade de kamraternas idéer i större utsträckning, snarare än att endast driva sin egen tanke, vilket är centralt då syftet är att skapa kollektiva resonemang. Att samarbeta gick alltså bättre på förmiddagar än på eftermiddagar enligt förskollärarna. Förskollärarna kom också fram till att barnen behövde tid, så att de kände att de fick utrymme att formulera sina argument. De plockade också fram leksaks-mat för att stimulerade barnen att fördela den under tiden de hade till fri lek.

Förskollärarna beskrev över lag att de flesta av barnen ville skapa sin egen lösning, vilket gick emot tanken om kollektiva resonemang. I anteckningarna av en förskollärare, kan vi läsa: ”Det var svårt att komma överens”. Här uppstod flera didaktiska utmaningar som handlade om ifall barnen borde arbeta själva eller tillsammans och om vilka barn som var bra att para ihop med varandra. I anteckningar av en annan förskollärare, kan vi läsa: ”Det blev många och långa diskussioner mellan barnen för de hade olika lösningar och motiveringar utifrån rättvist, lika, hungrig eller vilket djur de tyckte bäst om”. De didaktiska val som förskollärarna kom fram till innebar att barnen skulle arbeta i par, för att uppmuntra till diskussion om lösningar med en kamrat (någon gång arbetade barnen också i trios men aldrig enskilt). Förskollärarna parade ihop barn som de ansåg arbetade och lekte bra tillsammans; detta för att underlätta för barnen att argumentera och lösa fallen tillsammans. Barn som känner varandra, menade de, förstår varandra bättre, och barn som inte känner varandra tenderar att bli mer fåordiga. De upplevde att barnen samarbetade bättre efter hand som de fick lösa fler fall. Detta visade sig då att fler av barnen, enligt förskollärarna, vid andra undervisningstillfället kunde ta till vara på varandras argument och byggde vidare på varandras idéer, vilket de hade svårt med vid första tillfället.

Flera förskollärare uttryckte att många barn inte med automatik började diskutera lösningar med varandra. De behövde därför komma på strategier för att få igång barnen att resonera. I en anteckning av en förskollärare, kan vi läsa: ”De hade ingen motivering varför”. Förskollärarnas didaktiska val blev att använda frågor så som ”Hur tänker du?”, ”Varför då?”, Är djuren nöjda nu?”, för att uppmana barnen att argumentera för sina lösningar och berätta för varandra hur de tänkt. Frågor till barnen handlade också om nallarnas tankar och känslor kring fördelningen av kexen. Strategin med dessa frågor var att simulera barnen att resonera och uttrycka argument, kring matematiska lösningar eller värderingar om rättvisa, som skapades i mötet med nallarna och diskussionskamraten. I anteckningarna från ett möte kan vi läsa: ”Om djuren av någon anledning inte fått lika många ändrade barnen alltid till lika antal om läraren frågade hur de tänkt, eller om alla djuren var nöjda. Didaktiska val och slutsatser: viktigt att vi utmanar barnen med frågor även om en lösning är korrekt. Många barn tenderade att justera sina lösningar om de fick följdfrågor”. Förskollärarna upplevde att när de ställde följdfrågor, även om barnen hade

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 68–84 Maria Hedefalk m.fl.

presenterat en lösning, resulterade i att barnen justerade sina lösningar. Förskollärarna kunde alltså påverka barnen att komma fram till ett flertal olika lösningar på rättvis resursfördelning genom att ställa ytterligare frågor. En rättvis lösning, enligt barnen, kunde innebära att alla fick lika mycket, att en favorit-nalle fick mer, att den som var hungrigast fick mer, att en besökare bör vara glad om den får ett kex över huvud taget, att dela med sig av sitt kex är en ovanligt snäll (och ibland onödig) handling.

Fler förskollärare upplevde att många barn tyckte att det var svårt att komma överens om en lösning. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”I paren hade ofta de två barnen olika lösningar för vad som är rättvist”. Tre didaktiska utmaningar uppstod kopplat till att lösa fallet kollektivt: barnens utvecklingsnivå, vilka lösningar som ansågs godtagbara och användning av sax eller inte. Den första didaktiska utmaningen handlade om barnen hade uppnått en utvecklingsnivå som möjliggjorde för dem att kunna komma överens. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”De yngre barnen tenderade att fokusera mer på lek och omsorg om djuren än fördelning av kexen”. Förskollärarna kom fram till att de flesta femåringar har förmågan att både argumentera för sin uppfattning och att kunna diskutera olika uppfattningar med någon annan. Det didaktiska valet blev därför att utmana barnen att föra diskussioner, att komma fram till en egen lösning utan att först diskutera den med kamraten blev inte godtagbart. När den gemensamma diskussionen var klar var det dock tillåtet att komma fram till sin egen lösning.

Barnen löste resursfördelningen genom att ibland fördela lika många kex till nallarna och ibland ge fler kex till en favoritnalle. Barnen landade alltså inte alltid i en lösning. I instruktionen till fallen står att barnen kan lösa problemet matematiskt och etiskt. Den didaktiska utmaningen handlade om vilka lösningar som ansågs godtagbara. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Slutsats och didaktiska val: Barnen skulle få avgöra när en lösning var klar”. De kom alltså fram till valet att låta barnen själva bestämma när de ansåg att de hade kommit fram till en lösning. Detta gjorde de genom att ställa frågor så som: ”Är djuren nöjda nu?”, ”Är det rättvist?”. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Vi skulle använda frågor som ”Hur tänker du?”, ”Varför då?”, ”Är djuren nöjda?” för att hjälpa att argumentera för sina lösningar”.

Förskollärarna upplevde också att användning av sax, för att dela kexen i mindre bitar, resulterade i att barnen klippte väldigt många små bitar. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Val av material påverkade storleken på kexdelarna. Sax verkar ge signaler om att kexen kan delas i många små delar, om barnen istället skulle riva blev delarna som fördelades större”. När barnen rev kexen blev det enligt förskolläraren färre och större bitar. Många förskollärare valde därför att ta bort saxen för att inte fokus skulle läggas på att klippa som de upplevde tog över barnens uppmärksamhet. Syftet var ju att få barnen att argumentera kring resursfördelningen, vilket tappades bort i allt klippande. Förskollärarna menade att det uppstod fler samtal om vad som kunde vara rättvist när barnen inte fick klippa i kexen, helt i linje med syftet.

Fler förskollärare uttryckte att barnen hade svårt att både förstå instruktionerna kring fallet och att uttrycka sig på ett relevant sätt (med en matematisk begreppsapparat). I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Samma ord som på svenska är också svåra på modersmålet”. Didaktiskt uppstod två problem. Det ena problemet involverade vilket språk som var bäst för förskollärarna att använda för att sätta in barnen i fallen. Förskollärarna diskuterade hur de kunde reducera språket i fallen, så att barnen skulle förstå men ändå behålla samma komplexitet för att förstå de dilemman som skulle lösas. Hur de svenska orden översattes till modersmålet behövde göras genomtänkt, varför det var viktigt att förskolläraren både var kunnig på svenska och modersmålet. Det andra problemet låg i vilket språk barnen använde när de diskuterade fallen. Borde de tala svenska eller sitt modersmål? Förskollärarna kom fram till att det var viktigt att de språk som kunde hjälpa barnet tilläts och användes i undervisningen, därför blev det relevant att också använda barnens modersmål. Det didaktiska valet de kom fram till innebar att först para ihop barn med samma modersmål, men sedan att också para ihop barn som inte hade samma modersmål. Svåra ord enligt förskollärarna var: ”samma”, ”dela”, ”lika”, ”färre”, ”lika många”, ”lika stora”, ”del”, ”halv”, ”tredjedel”. Begreppen består främst av matematiska uttryck, vilket innebar nya begrepp för barnen både på svenska och på modersmålet. Att börja med modersmålet ansågs som en bra strategi för att barnen skulle få möjlighet att förstå dilemmat i fallen ordentligt, vilket upplevdes vara svårare om det gjordes på svenska. De flerspråkiga förskollärarna presenterade därför fallen och genomförde aktiviteten på modersmålet för att sedan prata om vad de hade gjort på svenska. På så sätt fick barnen möta både sitt modersmål och det svenska språket. Det visade sig att även om fallet presenterades på modersmålet, kunde barnen ha svårt att förstå och använda sig av många av begreppen.

Förskollärarna reflekterade också över miljön, vilket bland annat handlade om nallarna och hur de påverkade undervisningssituationen. De kom fram till att de skulle använda speciella nallar som inte användes i andra sammanhang. Förskollärarna menade att fler av barnen blev extra förtjusta i vissa nallar, vilket ledde till att dessa favoriserades och fick mer kex än de andra nallarna. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Pedagogerna på X fick låna tre mjukisdjur från vår samling. Pedagogerna på Y informerades om var Z samling av mjukisdjur finns”. Här väcktes en fråga om de borde byta ut nallarna mer frekvent för att barnen inte skulle utveckla känslor för specifika nallar. Förskollärarna ville att barnen skulle hålla sig mer objektiva till nallarna för att kunna argumentera för rättvisa mer dynamiskt. Tanken var att det skulle kännas exklusivt och spännande när nallarna togs fram. För att poängtera exklusiviteten och för att inte bli störda av andra aktiviteter genomfördes fallen i ett speciellt rum.

Fler av förskollärarna upplevde att det var svårt att observera och dokumentera samarbetet mellan barnen. De diskuterade vad som var möjligt att observera och kom fram till att det gick att observera samarbetet på individnivå. De kunde dokumentera hur barnen diskuterade något specifikt och det blev tydligt vilka barn som endast pratade om sina lösningar eller om de pratade med varandra om en lösning. Barnen kunde också själva dokumentera sina lösningar genom att både rita och fotografera nallarna och de kex de fått fördelade med en surfplatta. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Barnen skulle få avgöra när det var dags att knäppa kortet som visade en lösning”.

Analys av agens

Hur förskollärarens didaktiska val i undervisningen skapar agens, det vill säga att barnen på olika sätt får möjlighet att själva bidra till och skapa kunskap, beskrivs nedan, se tabell 2.

Förutsättningar för agens skapades i undervisningen redan vid formuleringen av den didaktiska vad-frågan där barnen förväntades utveckla sin resonemangsförmåga utifrån värderingar om resursfördelning som skapades i samtalen mellan barnen. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Vi skulle använda frågor som ”Hur tänker du?”, ”Varför då?”, ”Är djuren nöjda?” för att hjälpa att argumentera för sina lösningar”. Det var barnens förmåga att formulera egna argument i resonerandet med kamrater som låg i fokus, inte i förväg bestämda argument som ansågs var rätt av förskolläraren. Vilka argument som är relevanta var alltså inte bestämda i förväg, utan skapas av barngruppen i undervisningssituationen. Hur möjligheter för agens skapades framgår också i förskollärarnas val, i relation till den didaktiska hur-frågan. De kom fram till att det är barnen som avgör när lösningen är klar, inte förskolläraren. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: ”Barnen skulle få avgöra när en lösning var klar”. För att barnen skulle kunna engagera sig i fallen diskuterade förskollärna hur modersmålet kunde användas. Det var det kollektiva argumenterandet som fokuserades det vill säga utbyte av barnens tankar. Då förskollärarna upplevde att det svenska språket hindrade barnen att uttrycka sig och förstå både fallen och varandra kom förskollärarna fram till att de också skulle använda barnens modersmål. Barnen uppmuntrades att lyssna på varandras lösningar för att komma överens om en gemensam lösning. När de kommit fram till en gemensam lösning fick de också möjlighet att fatta ett eget individuellt beslut om vilken lösning som ansågs mest rättvist för nallarna. Igen var det barnen som skapade kunskap tillsammans, det vill säga att agens för barnen skapades. Slutligen engagerades barnen i dokumenterandet av lösningarna: de fick en möjlighet att själva bestämma vad som var relevant att fotografera och lägga i dokumentationen. I anteckningar från ett möte kan vi läsa: "Barnen skulle få avgöra när det var dags att knäppa kortet som visade en lösning".

Tabell 2
Tabellen består av två teman som beskriver hur undervisningen möjligör agens för barnen i relation till de didaktiska vad- och hur-frågorna. Vad-frågan innehåller ett undertema och hur-frågan innehåller fyra underteman.

Agens i den didaktiska vad-frågan (innehåll)
Att utveckla resonemangsförmåga och skapa kollektiva resonemang (för rättvis fördelning) Utveckla förmåga att lyssna på och resonera med andra. Utveckla förmåga att komma fram till sin egen lösning.
Agens i den didaktiska hur-frågan (metod)
Att organisera tid Barnen bestämmer när lösningen är klar. Det är viktigt att barnen får tid för att resonera med varandra.
Att möjliggöra för kollektiva resonemang Para ihop barn som känner varandra för att få igång resonemangen. Ta bort störande moment (så som saxar) för att kunna fokusera på att resonera. Uppmuntra barnen att resonera genom att utmana barnen att först komma fram till en gemensam lösning med kamraten. När diskussionen är klar kan barnet komma fram till sin egen lösning.
Att hantera språksvårigheter Få barnen att förstå fallen och dess dilemman genom att presentera fallet på modersmålet. Det svenska språket används när de går igenom vad de gjort.
Att dokumentera lärandet Barnen är med och dokumenterar genom att fota lösningarna.

Diskussion

Vi har genomfört en tematisk analys av dokumentation kring undervisning med i förväg skapade fall om rättvis fördelning. De frågor vi ville besvara var: Vilka didaktiska val blir relevanta för förskollärare när matematik och hållbar utveckling möts? och Hur möjliggör undervisningen utrymme för agens för barnen?

Forskning där matematik och hållbarhetsfrågor möts är näst intill obefintlig (Tryggvasson, 2023). Vi har därför i linje med Ernest (2020) uppmaning att skapa matematikundervisning för ett hållbart samhälle, undersökt undervisning där förskolebarn argumenterar för hållbara lösningar kring ett resursfördelningsproblem. Hållbarhetsfrågan anpassades efter förskolebarns möjlighet att förstå den, varför den förlades till en fantasivärld där nallar bor och behöver fördela en begränsad resurs. Uppgiften blev komplex och svårlöst då förutsättningarna om hur många kex som fanns tillgång till ändrades, samt att antalet mottagare och deras olika behov förändrades. Detta innebar att barnen fick ta ställning till olika dilemman, till exempel att någon var hungrig eller ledsen, och hur dessa olika behov skulle viktas i förhållande till begreppet ”rättvis fördelning”. Detta innebar att division som matematisk operation, där alla mottagare får lika stor andel, inte räckte till, utan barnen behövde göra val baserade på värderingar. Barnen mötte därmed andra matematikproblem än de var vana med och de behövde handla på nya sätt för att lösa fallen (t.ex. Niss, 2003). Innehållet i fallen skapade engagemang och känslor hos barnen (t.ex. Sumpter m.fl., under utgivning) som gjorde att de uppstod ett behov att värdera olika handlingar som mer rättvisa än andra (jfr Griffits & Murray, 2017; Håkansson & Östman, 2019). Genom att argumentera med en kamrat kunde barnen tillsammans lyfta upp olika sätt att förstå och lösa resursfördelnings-problemet (jfr Lundegård & Wickman, 2012). Barnen fick därmed utrymme att formulera argument, förankarade i matematik (jfr Lithner, 2008) eller i värderingar eller i både och (Sumpter & Hedefalk, 2023). På så sätt möjliggjordes för barnen att öva sig på att å ena sidan formulera och göra en egen värdering om vad de ansåg som rättvist, samt att å andra sidan lyssna in någon annans argument, och därmed få möjlighet att ändra uppfattning (jfr Hedefalk m.fl., 2022). Här skapades möjligheter för agens då det blev upp till barnen att lösa fördelningen där förskolläraren inte satt på det rätta svaret (Andersson, 2017; Haier m.fl., 2022). Barnen fick i undervisningssituationen gå in i nallarnas värld och förändra den till en, i deras mening, mer hållbar och rättvis värld (jfr Bacopé m.fl., 2018; Van Poeck & Östman, 2020).

De didaktiska val, som förskollärarna gjorde i undervisningssituationen, skapade i flera fall möjlighet för agens för barnen. Detta hände inte av sig självt, utan förskollärarna hade med hjälp av den didaktiska modellen, relekterat över hur de skulle möjliggöra för barnen att föra fram sina lösningar (jfr Löf & Vallberg Roth, 2021) . Formuleringen av vad-frågan, det vill säga att barnen förväntas lära sig att argumentera etiskt och matematiskt, innebär att barnens egna värderingar och tankar om rättvis resursfördelning hamnar i fokus. Det är inte förskolläraren som förmedlar de rätta argumenten (jfr Sumpter & Hedefalk, 2018). När agens skapas är inte uppfattningar bestämda före undervisningssituationen, utan dessa formas i den kollektiva diskussionen som förs med kamraterna (Lundegård & Wickman, 2012; Sporre m.fl., 2022; Sumpter, 2016) där deltagaren får möta både sin egen som andras syn i diskussionen om hållbarhetsfrågan (Wals, 2010). De olika scenarierna som nallarna hamnar i väckte barnens känslor för nallarnas väl, vilket är ett viktigt undervisningsinnehåll enligt Griffiths och Murray (2017). I linje med Håkansson och Östman (2019) skapas så kallad politisk agens då barnen får formulera sina egna värderingar kring resursfördelning bland de nallar de möter. Genom att ta egen ställning och bestämma sig för en lösning kunde barnen bidra till (hållbar) förändring för nallarna (jfr Bascopé m.fl., 2019). Enligt Van Poeck och Östman (2020) är det sällan som lärarna vet vilka handlingar som är hållbara på grund av hållbarhetsfrågornas komplexitet. De föreslår att undervisningen istället bör öppna upp för nyheter, kreativitet, frihet och pluralism, vilket resultatet visar, är precis vad som hände när barnen arbetade med fallen. Det blev möjligt för barnen att agera på nya oväntade sätt; de fick vara kreativa i sina lösningsförslag, de var fria att lösa problemet utan att förskolläraren talade om vad som var rätt och barnen mötte en pluralism av uppfattningar och lösningar.

I linje med Sheridan och Williams (2018) som lyfter vikten att ha en tydlig intention med undervisningen, visar resultatet här att förskollärarna som deltog i studien hade en tydlig intention att barnen skulle utveckla sin argumentationsförmåga. På så sätt möjliggjorde didaktisk modellering som design att förskollärarna kunde utveckla sin undervisning utifrån sina förutsättningar i samarbete med kollegor och forskare (Hamza & Lundqvist, 2023). Den tematiska analysen resulterade i två underteman till vad-frågan: att utveckla resonemangsförmågan och att utveckla språket. De två hör ihop då det behövs ett språk för att kunna resonera (Niss, 2003). I dokumentationen framgår det att det är det matematiska språket som blev viktigast att utveckla, men då begrepp som möjliggjorde för barnen att föra fram sina argument. Den didaktiska hur-frågan – kring hur förskollärarna skulle få barnen att argumentera – diskuterades och landade i en förståelse att de kollektiva resonemangen ledde till att barnen kunde fördjupa sina argument. Det didaktiska valet landade därför i att arbeta med fallen i par för att ha någon att argumentera med. Detta är i linje med teorin bakom kollektiva matematiska resonemang där resonemanget skapas tillsammans (Sumpter, 2016). Hur-frågan inkluderade fem underteman; att organisera tid, att möjliggöra för kollektiva resonemang, att hantera språksvårigheter, att organisera miljön och att dokumentera lärandet. De didaktiska utmaningarna handlade om att fånga och bibehålla barnens intresse under den tid de arbetade med fallen, men också att få barnen att lyssna på varandra, bygga vidare på varandras argument och att slutligen landa i en egen uppfattning om den mest rättvisa lösningen. Förskollärarna menade att barnen, efter hand som de arbetade med fallen, blev bättre och bättre på att lyssna på varandra och bygga vidare på varandras argument. Förskollärarna utvecklade också frågorna så att de ställde fler och bättre utmanande frågor för att få barnen att komma vidare i sitt resonerande. Detta är centralt då tidigare studier visar att det är lätt för lärare att ta över det matematiska resonemanget (Sumpter & Hedefalk, 2018).

Förskollärarnas lösningar på de didaktiska utmaningarna de mötte i undervisningen med fallen visar att intentionen med undervisningen var tydlig, förskollärarna visste vad barnen förväntades utveckla kunskap om. *Hur* detta kunskapande skulle gå till väckte en hel del reflektioner och flera lösningar. Resultatet skapar också följdfrågor som endast kan besvaras av fler studier. Förskollärarna kom till exempel fram till att barnen behövde arbeta i par. Exempel på dilemman som impliceras är: Vilka förskolor har den möjligheten då barngrupperna är stora och förskollärarna är få? och Går det att undervisa i större grupper? En annan implikation, med tanke på att språkutveckling är en viktig del av resonerande, oavsett om det är matematiska resonemang eller etiska resonemang, är hur man skapar utrymme för språkutveckling framför allt i stora barngrupper. Även om många av barnen hade svårt att uttrycka sig, skapade förskollärarna möjligheter för dem att göra egna bidrag i kunskapandet när de arbetade med fallen. De didaktiska val som resultatet visar möjliggör för meningsskapande där matematik och UHU möts, och i denna undervisning skapas också möjligheter för agens för barnen där de kan lösa hållbarhetsproblemen utifrån kollektiva resonemang tillsammans med sina kamrater.

Tack

Projektet har finansierats av Skolforskningsinstitutet, projekt 2021-00068.

Referenser

Andersson, K. (2017). Starting the pluralistic tradition of teaching? Effects of education for sustainable development (ESD) on pre-service teachers' views on teaching about sustainable development. *Environmental Education Research* ,*23*(3), 436–449. https://doi.org/10.1080/13504622.2016.1174982

Bascopé, M., Perasso, P. & Reiss, K. (2019). Systematic review of education for sustainable development at an early stage: Cornerstones and pedagogical approaches for teacher professional development. *Sustainability*, *11*(3), 719. https://doi.org/10.3390/su11030719

Bauman Z. (2013). Learning to walk on quicksand. I P. Mayo (Red.), *Learning with adults. International issues in adult education* (s. 9–18). SensePublishers.

Berglund, T. & Gericke, N. (2015). Separated and integrated perspectives on environmental, economic, and social dimensions – an investigation of student views on sustainable development. *Environmental Education Research*, *22*(8), 1115–1138. https://doi.org/10.1080/13504622.2015.1063589

Biesta, G. (2012). Becoming world-wise: An educational perspective on rhetorical curriculum, *Journal of Curriculum Studies*, *44*, 815–826. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.730285

Block, T., Goeminne, G. & Van Poeck, K. (2018). Balancing the urgency and wickedness of sustainability challenges: Three maxims for post-normal education. *Environmental Education Research*, *24*(9), 1424–1439. https://doi.org/10.1080/13504622.2018.1509302

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Caiman, C. & Lundegård, I. (2014). Pre-school children's agency in learning for sustainable development. *Environmental Education Research*, *20*(4), 437–459. https://doi.org/10.1080/13504622.2013.812722

Cobb, P. & Bowers, J. S. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational Researcher*, *28*(2), 4–15. https://doi.org/10.3102/0013189X028002004

Codex. *Regler och riktlinjer för forskning*. (u.å.). [elektronisk resurs]

Dillenbourg, P. (1999). Introduction: What do you mean by 'collaborative learning'? I P. Dillenbourg (Red.), *Collaborative learning: cognitive and computational approaches. Advances in learning and instruction series* (s. 1–19). Elsevier Science Inc.

Eriksson, H., Hedefalk, M. & Sumpter, L. (2023). The tension between division and fair share. I H. Palmér, C. Björklund, E. Reikerås & J. Elofsson (Red.), *Teaching mathematics as to be meaningful – foregrounding play and children's perspectives: results from the POEM5 conference, 2022* (s. 69–79). Springer.

Ernest, P. (2020). Mathematics, ethics and purism: an application of MacIntyre's virtue theory. *Synthese*, *199*(1–2), 3137–3167. https://doi.org/10.1007/s11229-020-02928-1

Förenta Nationerna. (22 december 2022). *Sustainable development goals, 4. Quality education goal, target 7*. https://www.un.org/sustainabledevelopment/education/

Griffiths, M. & Murray, R. (2017). Love and social justice in learning for sustainability. *Ethics and Education*, *12*(1), 39–50. https://doi.org/10.1080/17449642.2016.1272177

Haier, K., Siller, H. S. & Vorhölter, K. (2022). Criteria for sociocritical modeling tasks in sustainable development contexts. [Konferensbidrag] *Twelfth congress of the European society of research in Mathematics Education (CERME12).*, Bozen-Bolzano, Italy. hal-03745376

Hamza, K. & Lundqvist, E. (2023). Mangling didactic models for use in didactic analysis of classroom interaction. I F. Ligozat, K. Klette & J. Almqvist (Red.), *Didactics in a changing world: European perspectives on teaching, learning and the curriculum* (s. 103–121). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20810-2_7

Hedefalk, M., Caiman, C. & Ottander, C. (2022). Deliberation och kritik i förskolans undervisning för hållbar utveckling – "så att det bli snällt där i världen". *Forskning om undervisning och lärande*, *10*(2), 88–108. https://doi.org/10.61998/forskul.v10i2.19006

Hedefalk, M. (2014). *Förskola för hållbar utveckling. Förutsättningar för barns utveckling av handlingskompetens för hållbar utveckling.* [Doktorsavhandling, Uppsala universitet].

Hedefalk, M., Almqvist, J. & Lundqvist, E. (2015). Teaching in preschool. *Nordic Studies in Education*, *35*, 20–36.

Hjälmeskog, K., Andersson, K., Gullberg, A. & Lagrell, K. (2020). *Didaktik i förskolan*. Gleerups.

Håkansson, M. & Östman, L. (2019). The political dimension in ESE: the construction of a political moment model for analyzing bodily anchored political emotions in teaching and learning of the political dimension. *Environmental Education Research, 25*(4), 585–600. https://doi.org/10.1080/13504622.2017.1422113

Höglund, A. T. (2020). What shall we eat? An ethical framework for well-grounded food choices. *Journal of agricultural and environmental ethics*, *33*, 283–297. https://doi.org/10.1007/s10806-020-09821-4

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lundegård, I. & Wickman, P. O. (2012). It takes two to tango: studying how students constitute political subjects in discourses on sustainable development. *Environmental Education Research*, *18*(2), 153–169. https://doi.org/10.1080/13504622.2011.590895

Löf, C. & Vallberg Roth, A. C. (2021). Minding the gap: Dilemmas in a didactic and pragmatically informed teaching approach in preschool. *Nordisk tidskrift för allmän didaktik*, *7*(1), 38–54. https://doi.org/10.57126/noad.v7i1.6595

Manson, J. (2020). *Qualitative researching.* SAGE.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. I *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (s. 115–124). The Hellenic Mathematical Society.

Rockström, J., Steffen, W., Noone, K., Persson, A., Chapin, F. S., Lambin, E. F., Lenton, T. M., Scheffer, M., Folke, C., Schellnhuber, H. J., Nykvist , B., de Wit, C. A., Hughes, T., van der Leeuw, S., Rodhe, H., Sörlin, S., Snyder, P. K., Costanza, R., Svedin, U., … Foley, J. A. (2009). A safe operating space for humanity. *Nature*, *461*, 472–475. https://doi.org/10.1038/461472a

Rudsberg, K. & Öhman, J. (2010). Pluralism in practice – experiences from Swedish evaluation, school development and research. *Environmental Education Research, 16*(1), 95–111. Routledge. https://doi.org/10.1080/13504620903504073

Samuelsson, L. (2020). Etik i utbildning för hållbar utveckling–att undervisa den etiska dimensionen av en kontroversiell fråga. *Acta Didactica Norden*, *14*(4), 1–22. https://doi.org/10.5617/adno.8348

Sheridan, S. & Williams, P. (Red.). (2018). *Undervisning i förskolan: En kunskapsöversikt*. Skolverket.

Sjöström, J. (2019). Didaktisk modellering. I K. Stolpe, G. Höst & A. Larsson (Red.), *Forum för forskningsbaserad NT-undervisning. Bidrag från konferensen FobasNT18 13-14 mars 2018 i Norrköping* (s. 121–132). Linköping University Electronic Press.

Skolverket. (2018). *Läroplan för förskolan.* [elektronisk resurs]

Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematical education. I P. Valero och R. Zevernberger (Red.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (s. 207–226). Kluwer Academic Publisher.

Sumpter, L., Eriksson, H., Hedefalk, M. & Markkanen, P. (under utgivning). Grade 2 students' conceptions about working with sharing. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education.*

Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2023). När dela lika är olika. *Nordisk barnehageforskning*, *20*(2), 1–20. https://doi.org/10.23865/nbf.v20.256

Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2018). Teachers' roles in preschool children's collective mathematical reasoning. *European Journal of STEM Education*, *3*(3), 16. https://doi.org/10.20897/ejsteme/3876

Sumpter, L. (2016). Two frameworks for mathematical reasoning at preschool level. I T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics education in the early years: Results from the POEM2 conference, 2014* (s. 157–169). Springer. https://doi.org/10.1007/9783319239354_9

Sporre, K., Lotz-Sisitka, H. & Osbeck, C. (2022). Taking the moral authorship of children and youth seriously in times of the Anthropocene. *Ethics and education*, *17*(1), 101–116. https://doi.org/10.1080/17449642.2021.2024991

Tryggvason, Á, Öhman, J. & Van Poeck, K. (2023). Pluralistic environmental and sustainability education – a scholarly review, *Environmental Education Research*, Förhandspublicering online. https://doi.org/10.1080/13504622.2023.2229076

Vallberg Roth, A.-C., Holmberg, Y., Löf, C. & Stensson, C. (Red.). (2020). *Didaktik – flerstämmig undervisning i förskolan*. Studentlitteratur.

Van Poeck, K. & Östman, L. (2020). The risk and potentiality of engaging with sustainability problems in education—a pragmatist teaching approach. *Journal of Philosophy of Education*, *54*(4), 1003–1018. https://doi.org/10.1111/1467-9752.12467

Wahlström, N. (2023). *Läroplansteori och didaktik*. Gleerups.

Wals, A. (2010). Between knowing what is right and knowing that is it wrong to tell others what is right: on relativism, uncertainty and democracy in environmental and sustainability education. *Environmental Education Research*, *16*(1), 143–151. https://doi.org/10.1080/13504620903504099

Wickman, P.-O., Hamza, K. & Lundegård, I. (2018). Didaktik och didaktiska modeller för undervisning i naturvetenskapliga ämnen. *NorDiNa*, *14*(3), 239–249. https://doi.org/10.5617/nordina.6148

Ärlemalm-Hagsér, E. & Sundberg, B. (2016). Naturmöten och källsortering – En kvantitativ studie om lärande för hållbar utveckling i förskolan. *NorDiNa*, *12*(2), 140–156. https://doi.org/10.5617/nordina.1107

Författarpresentationer

Maria Hedefalk

Maria Hedefalk är lektor och docent i didaktik vid institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningssociologi vid Uppsala universitet. Hon forskar om vad som utmärker undervisning i förskolan med ett särskilt intresse för undervisningssituationer där barn kan överväga och ta kritisk ställning.

Lovisa Sumpter

Lovisa Sumpter är professor i matematikämnets didaktik på Stockholm Universitet. Hennes främsta forskningsintresse är matematiska resonemang, genus och affekt.

Helena Eriksson

Helena Eriksson är fil dr och lektor i kombinerad tjänst mellan Borlänge kommun och Högskolan Dalarna med intresse för undervisningsutvecklande forskning.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, 85–107
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Att utveckla undervisning om tal och talrelationer i förskoleklass

Orginalartikel

Anna-Lena Ekdahl[1]* & Birgitta Lundberg[1]

Sammanfattning

Syftet med artikeln är att bidra med kunskap om hur en intervention, med fokus på undervisning om tal och talrelationer i förskoleklass, kan utveckla matematikundervisning. I interventionen har en undervisningsutvecklande modell tagits som utgångspunkt, där planering, genomförande och reflektion över undervisning har skett i en cyklisk process tillsammans med kollegor och forskare. Då interventionen sträckte sig över fyra år, gavs möjligheter att, identifiera och förändra komponenterna i modellen i relation till syfte och kontext. En nyckelkomponent är de reflektionsunderlag som utvecklades och hur de bidrog till reflektion kring undervisning och elevers lärande. De vetenskapligt förankrade aktiviteterna som förfinades är en annan nyckelkomponent. Kunskapsprodukten som har genererats innehåller den undervisningsutvecklande modellen, samt en undervisningsguide med beprövade och designade undervisningsaktiviteter med tillhörande reflektioner kring lärares matematikdidaktiska handlingar.

Nyckelord: matematik, förskoleklass, undervisningsutveckling, kunskapsprodukt, talrelationer

Abstract

The purpose of this article is to contribute knowledge about how an intervention, focused on teaching numbers and number relations in preschool class, can develop teaching. In the intervention, we employed a practice-oriented model based on planning, teaching, and reflecting on teaching in an iterative process, in collaboration with colleagues and researchers. We carried out this intervention over four years, during which we identified key components of the model that were essential for the development of mathematics teaching. We also changed these components based on the purpose and local context. A key component is the reflection documents that were developed and how they contributed to reflection on teaching and learning. Another key component is the research-based activities that we refined. The knowledge product includes the teaching model as well as a teaching guide with documented and designed teaching activities with reflections on the teacher's enactment of the mathematical activities.

Keywords: Mathematics, Preschool class, Teaching development, Knowledge product, Number relations

[1] Högskolan för Lärande och Kommunikation, Jönköping University

*Korresponderande författare:
Anna-Lena Ekdahl
anna-lena.ekdahl@ju.se

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 85–107
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.23896
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Introduktion

Undervisningsutvecklande forskning karakteriseras av nära samverkan mellan forskare och lärare, där forskares kunskaper om tidigare forskning, teorier och analysmodeller kopplas samman med lärares erfarenheter av undervisning och elevers lärande. Tillsammans planeras och genomförs någon form av intervention (exempelvis en undervisningsaktivitet) som sedan analyseras, förfinas och prövas på nytt i en iterativ process där teori och praktik samverkar (Carlgren, 2020). Flertalet interventioner som syftar till att utveckla undervisning kännetecknas av ett iterativt upplägg (Andrée & Eriksson, 2019; Bakker, 2018; McKenney & Reeves, 2018). Modellernas design beskrivs i exempelvis steg, faser, som komponenter eller genom designprinciper och kan sträcka sig över en kortare eller längre tidsperiod (Plomp, 2013). Tidigare forskning har identifierat faktorer som påverkar interventionsprocessen och dess resultat. Det kan handla om klargörande av förväntningar från deltagarna, de roller lärare och forskare förväntas ta eller i vilken omfattning lärarna aktivt medverkar i forskningsprocessen (Andrée & Eriksson, 2019; Gueudet m.fl., 2013).

Internationell forskning lyfter fram vikten av att fortlöpande analysera vald forskningsmodell utifrån vad som fungerar och inte fungerar, samt vad som kan ses som mer avgörande för att modellen ska fungera (Century & Casata, 2016). Vidare diskuterar forskare interventioners hållbarhet, vad som händer när projekt och forskares medverkan avslutas samt hur kunskaper från tidigare projekt kan spridas och användas i andra kontexter (Andrée & Eriksson, 2019; Kullberg, m.fl., 2020). Det finns ett fortsatt behov av att diskutera och beforska interventioners design (Carlgren, 2020) och hur de genom ett iterativt upplägg kan utvecklas och bli hållbara över tid. Detta görs i denna artikel genom att bidra med kunskap om hur lärare och forskare i samverkan, i en intervention under fyra års tid, har utvecklat matematikundervisning i en kommuns förskoleklasser. Det långvariga samarbetet har skapat goda möjligheter för att ge en realistisk och nyanserad bild av hur en undervisningsutvecklande modell har utvecklats över tid, vad modellen har bidragit med samt hur den kan användas som utgångspunkt för undervisningsutveckling i andra kontexter.

Syfte och frågeställningar

Syftet med artikeln är att bidra med kunskap om hur en undervisningsutvecklande modell, med fokus på undervisning om tal och talrelationer i förskoleklass, kan användas och utvecklas genom en samverkan mellan lärare och forskare över en längre tid, samt vilka komponenter som kan vara avgörande för att modellen ska kunna bidra till en utvecklad matematikundervisning. Ytterligare ett syfte är att beskriva hur en intervention i förskoleklass kan generera en kunskapsprodukt för en hållbar matematikundervisning på vetenskaplig grund. Artikeln utgår från följande frågeställningar:

- Vilka nyckelkomponenter har identifierats i den undervisningsutvecklande modellen och hur har dessa förändrats över tid, i relation till projektets syfte, lokala förutsättningar och deltagares medverkan?

- Vad karaktäriserar den kunskapsprodukt, för matematikundervisning om tal och talrelationer i förskoleklass, som har generats i samverkan mellan lärare och forskare?

Bakgrund

Det som kännetecknar undervisningsutvecklande forskning är att forskare och lärare tillsammans bedriver forskning i nära anslutning till klassrum. En sådan samverkan kan bidra till utveckling av undervisning på vetenskaplig grund och förbättrade förutsättningar för elevers lärande (Eriksson, 2018). Lärare behöver därför ges möjlighet att delta i undervisningsutvecklande forskning och se sig som medskapare av kunskap (Carlgren, 2012; Eriksson, 2021). Stigler och Thompson (2009) menar att forskare, utifrån expertområden och kännedom om tidigare forskning, mycket väl kan vara de mer drivande i den initiala fasen. I nästa fas, då interventionen är i gång och undervisningsaktiviteter ska prövas i klassrum, kommer lärarna att inta en mer aktiv roll i hur undervisning kan iscensättas i de aktuella klassrummen. Lärare kan därmed bidra med värdefull input till den gemensamma reflektionen och bli medskapare i designen av nya uppgifter (Konrad & Bakker, 2018).

Undervisningsutvecklande modeller

Educational Design Research (EDR), som ibland på svenska benämns som designforskning, växte fram utifrån ett behov av att utveckla metoder för att beforska och besvara frågor som inte kan besvaras genom experimentella studier (Cobb m.fl., 2003). Istället behöver frågorna ställas i nära relation till undervisning och lärande i dess naturliga sammanhang, det vill säga i klassrummen. EDR är en undervisningsutvecklande modell som kännetecknas av att vara interventionistisk (praktikens frågor i fokus), iterativ (cykler av design, analys, utvärdering, revidering), processorienterad (förstå och förbättra interventionen), användbar (i verkliga kontexter) och teoridriven (bidra till undervisning med teoretisk grund). I en undervisningsutvecklande modell involveras oftast praktiker i processen (McKenney & Reeves, 2013; Van den Akker, m.fl., 2006). I EDR ses det som implementeras och prövas (det prospektiva) och utvärdering, analys och reflektion över undervisningen samt lärandet (det reflektiva) inte som åtskilda komponenter utan som sammanflätade (Bakker, 2018). Kännetecken som iterativitet och kollaborativ samverkan mellan forskare och praktiker, är inte unikt för EDR utan känns igen från andra forskningsmodeller. Ett sådant exempel är Design för Lärande (Åkerfeldt & Åberg, 2021) som har stora likheter med EDR men som tar sin utgångspunkt i en socialsemiotisk teoribildning (Selander & Kress, 2021). Ett annat exempel är Learning study-modellen som använder principer från designforskning men som oftast tar sin utgångspunkt i variationsteori (Marton, 2015). Det iterativa i en Learning study återfinns i sättet på vilket lektioner designas, prövas, utvärderas, förfinas och prövas på nytt. Utifrån ett specifikt avgränsat ämnesinnehåll med identifierade kritiska aspekter, designas lektioner för att ge eleverna möjlighet att lära sig det som avses. Communities of Inquiry (Jaworski, 2006) är ytterligare en forskningsmodell där lärares och forskares kritiska reflektion över undervisning och hur den kan utvecklas står i förgrunden.

Reflektionsunderlag

Analys och reflektion är centrala komponenter i undervisningsutvecklande modeller, därför behövs reflektionsunderlag som stöd i processen. Reflektionsunderlag kan bestå av tidigare forskningsresultat, lektionsplaneringar, observations- eller reflektionsprotokoll, videosekvenser från filmad undervisning, elevintervjuer, för- och eftertest alternativt strukturerade frågor som riktar fokus på olika aspekter i undervisning (Harvey & Teledahl, 2022). Val av reflektionsunderlag och hur de används beror på forskningsobjektet. I Shimizu och Kangs studie (2022) användes individuella skriftliga reflektioner som underlag för observation av matematikundervisning och för den efterföljande gemensamma diskussionen. Oftast används och prövas flera underlag i en och samma intervention. Om syftet med interventionen är att utveckla undervisning av ett specifikt innehåll, kan videofilmning av lärares undervisning och elevintervjuer utgöra effektfulla verktyg för lärares och forskares gemensamma reflektion (Ekdahl, 2019). Reflektionsunderlag initieras oftast av forskare som också leder diskussioner om utveckling av undervisning utifrån valda underlag (Harvey & Teledahl, 2022).

Kunskapsprodukt

En intervention resulterar oftast i någon slags kunskapsprodukt (Morris & Hiebert, 2011). Kännetecknande för en kunskapsprodukt är att den är utvecklad i samverkan mellan lärare och forskare, att den kan användas av de som har medverkat i interventionen och att den kan bidra med fortsatt utveckling av undervisning. Kunskapsprodukten kan sedan spridas, användas och utvecklas ytterligare av andra lärare och forskare. Om resultatet ska spridas till andra behöver kunskapsprodukten förpackas så att upplägget av forskningmodellen och dess kontext, beskrivs så detaljerat som möjligt (Stigler & Thompson, 2009).

Kunskapsprodukten kan bestå av specifika matematikuppgifter, didaktiska exempel alternativt undervisningsaktiviteter designade av forskare och utprövade samt förfinade i samverkan med lärare, i en iterativ process utifrån ett teoretiskt perspektiv (Björklund m.fl., 2020; Ekdahl, 2020). Det är viktigt att ta i beaktande att ett praktiknära projekt kan generera mer än en typ av kunskapsprodukt (Lindberg m.fl., 2023). I en analys av kunskapsprodukter i svenska forskningsprojekt identifierade Lindberg och hennes kollegor (2023) sex olika kategorier av kunskapsprodukter. Dessa kategorier var: kunnande och förmågor, undervisnings- och lektionsdesign, didaktiska exempel, redskap, generella och kontextuella förutsättningar samt processer och metaperspektiv. Den sistnämnda kategorin karaktäriseras av en beskrivning av processen, det vill säga de komponenter som har haft betydelse för designen av projektet och därför är viktiga för andra som skulle vilja genomföra ett liknande projekt. Inom EDR-forskning lyfts ofta fram hur interventioner som har till syfte att utveckla undervisning kan generera olika slags kunskapsprodukter i relation till aktuella läroplaner och kursplaner. En kunskapsprodukt inom EDR kan även utgöras av själva designen av modellen (Van den Akker, 2013).

I Višňovskás studie (2023) genererades en kunskapsprodukt där en serie undervisningssekvenser, designade av Cobb med kollegor (1997), togs som utgångspunkt i en lärares undervisning. Genom att läraren implementerade och modifierade undervisningssekvenserna kunde produkten, innehållande syfte, specifika lärandemål och material, göras tillgängligt digitalt för fler lärare. De kunde då ta del av produkten och implementera denna i sina klassrum. I nästa skede kunde dessa lärare gemensamt ytterligare förfina produkten. I processen är det avgörande att ta tillvara lärares erfarenheter av att tolka och interagera med materialet (Pepin m.fl., 2013). Sålunda ska lärarna vara aktiva i designen och i utvecklingen av materialet och produkten (Gueudet m.fl., 2013).

En intervention kan även generera en kunskapsprodukt i form av lärarhandledningar eller utbildningsprogram med mer eller mindre detaljerade beskrivningar av undervisningsaktiviteter (Mulligan m.fl., 2010; Sarama & Clements, 2009). Ett exempel på hur en longitudinell undervisningsutvecklande intervention har resulterat i en kunskapsprodukt, är det franska programmet: *Programmation et Progression ACE*, som utvecklats av Sensevy med kollegor (2015). Utbildningsprogrammet syftar till att utveckla 6–7 åriga elevers relationella förståelse av tal. Ett fåtal matematikuppgifter designades av forskare och lärare och prövades ut under flera års tid. Genom kontinuerliga iakttagelser från klassrummen, och genom samverkan mellan forskare och lärare, gjordes förfiningar av uppgifterna (Joffredo-Le Brun, m.fl., 2018). Utifrån en svensk förskoleklasskontext kan även interventionsprogrammet TUFF (TalUppfattningFörskoleklass) nämnas som ett exempel på en kunskapsprodukt. TUFF är ett tolv-veckorsprogram som har designats och genomförts i en svensk kommun i syfte att stötta förskoleklasselevers utveckling

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 85–107

av taluppfattning (Westerholm & Samuelsson, 2020). Programmet bygger vidare på en intervention som har utarbetats av en internationell forskargrupp (Jordan m.fl., 2012). Ett annat exempel på ett kunskapsprodukt i förskoleklass, som har prövats ut under längre tid, är Tänka, Resonera och Räkna (TRR). Programmet har fokus på taluppfattning och tals användning och med en tydlig struktur i upplägg av aktiviteter och instruktioner (Sterner & Helenius, 2015). Sterner med kollegor (2023) har även studerat hur programmet kan genomföras i större skala och diskuterar vad som händer med ett program när stödet från extern handledare minskar och lärare ges ett större ansvar att genomföra aktiviteterna på egen hand.

Ytterligare ett exempel på en kunskapsprodukt är dokumenterade kritiska aspekter av ett (matematiskt) innehåll som har framkommit i en Learning study. Det en lärargrupp har identifierat som kritiskt att lära sig, för just deras elevgrupper, kan delges lärare på andra skolor och tas som utgångspunkt i undervisningen av samma innehåll (Runesson m.fl., 2018). På så vis kan andra lärare pröva de dokumenterade kritiska aspekterna i sina elevgrupper och utifrån dessa, identifiera ytterligare kritiska aspekter och därmed utveckla undervisningen (Kullberg m.fl., 2020).

Det matematiska innehållet - strukturell ansats till undervisning och lärande om tal

Interventionen som är forskningsobjektet i den här artikeln utgår från en strukturell ansats till undervisning och lärande om tal och talrelationer för att kunna utveckla hållbara räknefärdigheter. Kortfattat innebär talstruktur att se tal som sammansatta enheter (enheter större än ett) och att se tal som del-helhetrelationer (Baroody & Purpura 2017; Neuman, 1987). När elever ser tal som uppbyggda av andra tal kan de använda talrelationer för att lösa artitmetikuppgifter, som till exempel att ta reda på en saknad del, utan att behöva räkna ett steg i taget bakåt eller framåt (Neuman, 2013). När en elev använder talstruktur för att lösa en uppgift som: ”Jag har sju och ger bort fem, hur många har jag kvar?” utan att behöva räkna fem steg bakåt från 7, tar eleven hjälp av tals del-helhetsrelationer. I det här fallet genom att veta att 7, 5 och 2 har en relation till varandra; 7 är helheten, en del är 5 och den saknade delen är 2. Eleven kan även använda fingermönster (7) och genom att titta på sju fingrar, ser ”5:an i 7:an” och ser då att svaret är 2. Då använder eleven kunskapen om tals del-helhetsrelationer på ett framgångsrikt sätt. Fingermönster blir ett visuellt stöd för att urskilja delar och helhet. Denna kunskap är enligt Neuman (2013) grundläggande för att elever ska kunna utveckla hållbara räknestrategier och inte behöva förlita sig på enstegsräkning.

Metod

Data för denna artikel är hämtat från ett samverkansprojekt (ett ULF-avtal)[1] som initierades utifrån en behovsinventering gjord av lärare i förskoleklass i en kommun. Kommunens lektor hade sedan tidigare ett samarbete med en av lärosätets forskargrupper, vilket öppnade upp för ansökan för ULF-medel för samverkansprojektet. I inventeringen framkom att lärarna ställde sig frågan om hur de kunde utveckla sin matematikundervisning utifrån det nya obligatoriska kartläggningsmaterialet *Hitta matematiken* (Skolverket, 2019). Eftersom kartläggningsmaterialet inte belyste undervisningsperspektivet, blev det övergripande syftet med samverkansprojektet att genom kollegialt lärande och med stöd av forskare gemensamt bygga ett fundament för matematikundervisningen i förskoleklass, utifrån tidigare forskning och aktuella styrdokument.[2]

1 Ett ULF-avtal ska utveckla och pröva hållbara samverkansmodeller mellan akademi och skola vad gäller forskning, skolverksamhet och lärarutbildning.

2 Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att lära sig om naturliga tal och deras egenskaper, ange antal, tals ordning, del av helhet och del av antal och använda talen för att resonera och lösa problem (Skolverket, 2022).

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 85–107

Forskare och huvudman beslutade i samråd om att genomföra en intervention med fokus på undervisning och lärande i matematik. Ett villkor som ställdes från huvudmannanivå var att alla kommunens lärare i förskoleklass skulle delta i interventionen. Under de fyra år som projektet pågick har det matematiska innehållet avgränsats till tal och talrelationer samt till att utveckla förmågan att se antal som grupper (talstruktur) för att lösa matematiska problem.

Studiens design

Interventionen har sedan starten utgått från en undervisningsutvecklande modell (se figur 1) som innehåller komponenterna: planering, genomförande, utvärdering av undervisning och reflektion över vad eleverna gavs möjligt att lära sig, vilket skedde både enskilt och tillsammans med kollegor och forskare i en cyklisk process. Modellen har därför likheter med EDR-modellen (Bakker, 2018; Van den Akker m.fl., 2006). Alla lärare som deltog förväntades pröva gemensamt planerade undervisningsaktiviteter i sin praktik. Lärarna skulle sedan på egen hand reflektera över vad undervisningen gav eleverna möjlighet att lära. Utifrån denna reflektion, skulle de sedan förfina undervisningen och genomföra aktiviteten på nytt. I nästa steg reflekterade kollegor och forskare tillsammans över undervisningen och elevers lärandemöjligheter för att därefter planera en ny undervisningsaktivitet (se figur 1).

Figur 1

Den undervisningsutvecklande modellens komponenter och cykliska process

Not. Figuren visar komponenterna i den undervisningsutvecklande modellen och i vilka steg dessa genomförs.

Ett begränsat antal vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter från tidigare forskningsprojekt (Ekdahl, 2019; Sensevy m.fl., 2015) med fokus på tal som sammansatta enheter (enheter större än ett) och tals additiva del-helhetsrelationer, initierades under det första året. Undervisningsaktiviteterna med tillhörande teoretiska principer (Björklund m.fl., 2021; Neuman, 1987, 2013) togs som utgångspunkt. Likaså introducerades representationer och material som möjliggör för elever att urskilja talrelationer (fingermönster, pärlband, och tärningsmönster). Även dessa har använts framgångsrikt i tidigare forskningsprojekt (Björklund, m.fl., 2020; Ekdahl, 2019; Sensevy m.fl., 2015).

Kontext och deltagare

Då det i den aktuella kommunen finns så väl mindre som större skolor, har det varit av stor vikt att samtliga sju skolenheter (tio till tolv förskoleklasser per läsår) har deltagit för att gemensamt bygga ett fundament för matematikundervisning. I början av varje projektår skickades informationsbrev ut till elever och vårdnadshavare där vi informerade om projektets syfte och vad deltagande skulle innebära för eleverna. Samtycke för deltagande inhämtades av elever och deras vårdnadshavare. Även lärare informerades och gav sitt samtycke för deltagande.

Sju lärare har deltagit i studien under alla fyra projektåren, fyra lärare har deltagit två av fyra projektår, två lärare deltog endast det första projektåret. Under det fjärde projektåret tillkom tre lärare. Två forskare var delaktiga i samverkansprojektet; en lektor i didaktik och en adjunkt med lång erfarenhet av undervisning i matematikdidaktik. Lektorn deltog alla fyra projektåren medan adjunkten deltog de tre första projektåren. Rektorer, speciallärare, resurslärare och en kommunlektor deltog sporadiskt vid träffar men var inte involverade i genomförandet av undervisning. Under interventionens tre första år ägde gemensamma träffar med lärare och forskare rum en gång per månad, totalt genomfördes åtta träffar per läsår, i huvudsak digitala. Vid träffarna diskuterades hur undervisning kan möjliggöra elevers lärande om tal och talrelationer samt hur undervisning kan stödja elever att utveckla förmåga att använda talrelationer för att lösa matematiska problem. Samtalen grundades i gemensamt planerade och av lärarna genomförda aktiviteter i sina klasser samt genom olika reflektionsunderlag. I syfte att i större omfattning fokusera på utveckling av undervisning i relation till elevers lärande, förändrades delvis upplägget på träffarna. Från projektår 2 avsattes mer tid under träffarna för planering av undervisning och mötestiden utökades från 90 till 120 minuter. Mer fokus lades projektår 2 och 3 på att utifrån filmklipp reflektera tillsammans och dra slutsatser. Under projektår 4 fasades forskarnas medverkan ut och endast en av forskarna träffade lärarna en gång per termin. Därutöver ansvarade kommunes lektor för digitala träffar med samtliga lärare i förskoleklass en gång i månaden. Eftersom syftet i den här artikeln är att beskriva nyckelkomponenter i den undervisningsutvecklande modellen, inte enskilda lärares undervisning eller reflektioner över undervisning, särskiljs inte individuella lärare eller forskare i resultatet.

Datainsamling

Olika dokumentations- och datainsamlingsmetoder användes under processen, främst i formativt syfte, vilket är vanligt i EDR-forskning (Nieveen & Folmer, 2013). Lärarreflektioner, loggböcker och fältanteckningar är exempel på data som kontinuerligt samlades in. Fem semistrukturerade lärarintervjuer genomfördes av forskarna i slutet av projektår 1. Under projektår 2 genomfördes individuella elevintervjuer[3] av forskarna. Dessutom filmade lärarna sin egen undervisning. Dessa undervisningsfilmer[4] användes som reflektionsunderlag.

För att besvara studiens forskningsfrågor gjordes ett urval av data för analys (se tabell 1). I huvudsak består datamaterialet av olika slags dokument, vilket är relevant data att använda då syftet är att se tillbaka på vad som har hänt över tid (Denscombe, 2017). I tabell 1 presenteras en översikt av data för analys.

3 Uppgiftsbaserade elevintervjuer genomfördes av forskarna i början och slutet av förskoleklassåret (97 intervjuer september 2020, respektive 130 intervjuer maj 2021). Sammanställningen av elevresultat och exempel på elevresonemang användes i projektet som underlag för gemensam reflektion över undervisning.

4 Analys av undervisningsfilmer användes som underlag för gemensam reflektion. Analysen av innehållet i undervisningsfilmerna utgör inte specifik data i denna artikel.

Tabell 1
Urval av insamlad data för analys projektår 1–3.

Projektår 1	23 lärarreflektioner (8 loggböcker och 15 post-it lappar), 5 transkriberade lärarintervjuer, fältanteckningar och PowerPoints från gemensamma möten.
Projektår 2	15 individuella lärarreflektioner (15 post-it lappar från en gemensam fysisk träff), fältanteckningar och PowerPoints från gemensamma möten samt lärarreflektioner från utvärdering av projektet på kommunnivå.
Projektår 3	39 individuella lärarreflektioner, fältanteckningar och PowerPoints från gemensamma möten samt summeringar från kollegiala reflektioner (4 möten).

Dataanalys

För att identifiera avgörande komponenter (nyckelkomponenter) för utveckling av en hållbar matematikundervisning på vetenskaplig grund gjordes projektår 4 en retroperspektiv analys (Gravemeijer & Cobb, 2013). Den tog avstamp i Century och kollegor (2010), som menar att olika typer av skriftliga underlag så som forskarnas och lärarnas reflektioner kring vad som har bidragit till utvecklingen och resultatet av en intervention behöver beaktas när nyckelkomponenter ska identifieras.

Den kvalitativa dataanalysen genomfördes i flera steg (Fejes & Thornberg, 2015). I ett första steg gick vi igenom de skriftliga underlagen så som anteckningar från möten, Powerpoints, transkriberingar av lärarintervjuer och övriga dokument som hade använts. Lärarnas röster framkom i intervjuerna från projektår 1, fältanteckningar från möten och den kommunövergripande årliga utvärderingen av projektet. Vi som forskare analyserade datamaterialet från ett år i taget och försökte identifiera tänkbara nyckelkomponenter inom respektive tidsspann, det vill säga vilka komponenter i den undervisningsutvecklande modellen (se figur 1) som kan ha bidragit till utveckling av en matematikundervisning på vetenskaplig grund. För att ytterligare fördjupa en sådan typ av kvalitativ analys kan frågor utgöra ett verkningsfullt redskap (Widén, 2015). De frågor som vägledde vår analysprocess var: *Vad behålls i modellen och vad är skälet till att det behålls?* och *Vad förändras, hur förändras det i så fall och varför?* I nästa steg gjordes en systematisk sammanställning över tänkbara nyckelkomponenter där vi kortfattat beskrev dessa (projektår 1–4), vad som hade behållits och vad som hade förändrats inom respektive komponent. Då kunde vi se vad i modellen som hade förändrats över tid, när förändringen skedde och vad som hade föranlett denna förändring, främst mellan projektår 1 och 2 respektive projektår 2 och 3. I nästa steg ställde vi komponenter mot varandra (Gravermeijer & Cobb, 2013) för att kunna bekräfta alternativt förkasta om den skulle ses som en nyckelkomponent, det vill säga om det var en komponent som var avgörande för att modellen skulle kunna fungera framgångsrikt i syfte att utveckla undervisningen eller om den kunde betraktas som en grundförutsättning i den cykliska modellen. I analysen identifierades två nyckelkomponenter.

För att besvara vad som karaktäriserar den kunskapsprodukt för matematikundervisning i förskoleklass som hade generats under interventionen, genomfördes i nästa steg ytterligare en kvalitativ analys (Descombes, 2017) av en av de nyckelkomponenter som hade identifierats. Projektår 1 gjordes en inledande analys av de förändringar som lärarna hade gjort i samma undervisningsaktivitet, mellan undervisningstillfällen samt vilka förändringar de hade reflekterat över att göra inför kommande undervisning[5] (se även figur 1). Det framkom att reflektionerna kännetecknades dels av praktiska förändringar, dels av förändringar relaterade till lärarnas didaktiska handlingar och elevers lärande. Projektår 4 genomfördes en fördjupad analys av samtliga individuella reflektioner från projektår 1–3. Utgångspunkten i analysen togs i Shimizu och Kangs (2022) kategorier av lärarreflektioner över observerad matematikundervisning. I en process testades data mot Shimizu och Kangs (2022) kategorier, det vill säga vad i datamaterialet som kunde överensstämma med någon av deras kategorier. Då reflektionerna endast analyserades utifrån förändring av undervisning, var inte alla kategorier möjliga att identifiera i materialet. Däremot kunde kategorierna *Rules/Norms*, *General pedagogies* och *Teaching/Learning* identifieras.[6] Vår analys resulterade i tre kategorier där den tredje bestod av två underkategorier. Kategorierna kan härledas till Shimizu och Kangs kategorier men har till viss del modifierats utifrån vårt forskningsobjekt. Materialet kodades utifrån de tre kategorierna (inkluderat de två underkategorierna) och datamaterialet systematiserades utifrån respektive kategori i relation till respektive undervisningsaktivitet.

Resultat

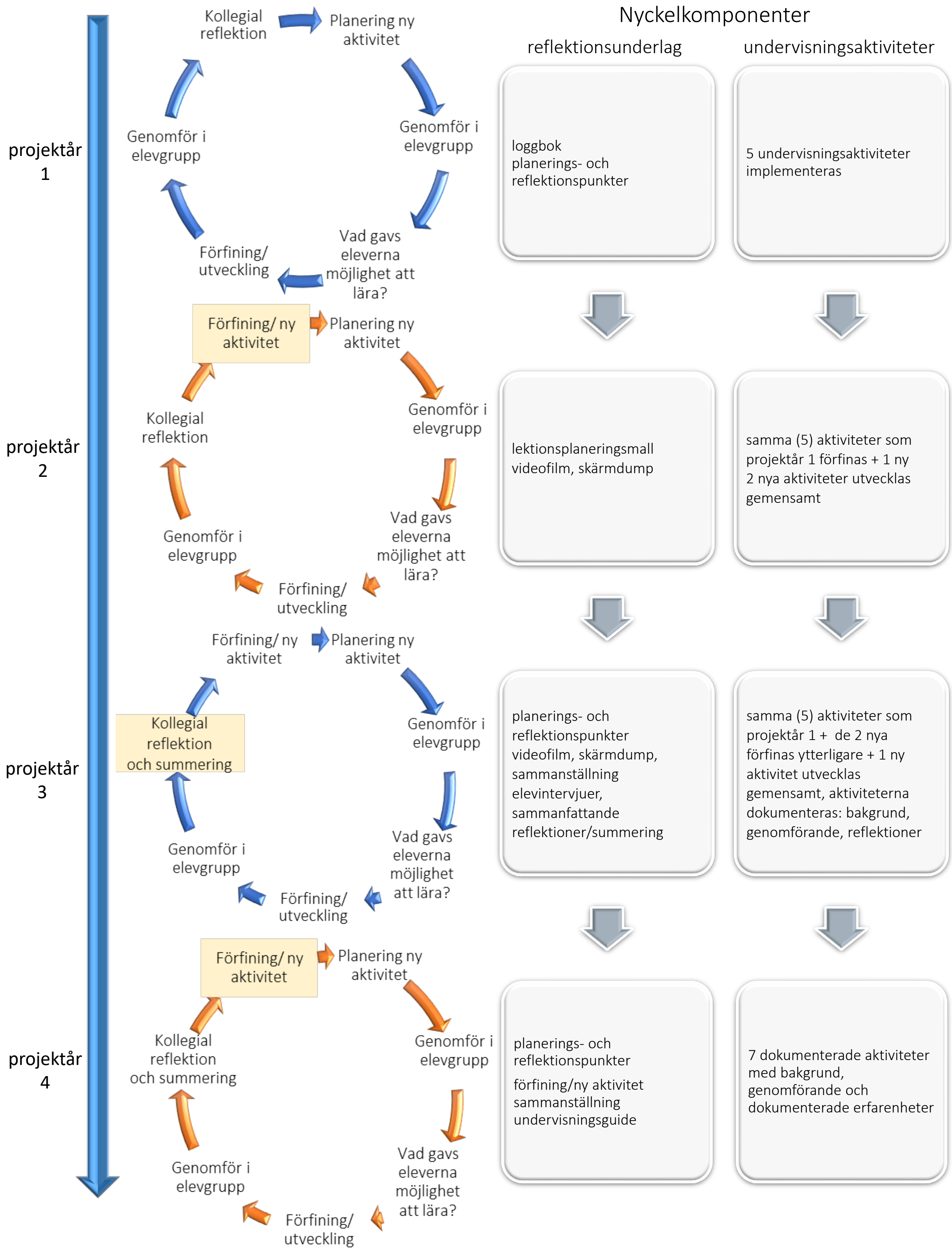
I resultatsavsnittet redogörs inledningsvis för de två nyckelkomponenter som har identifierats i den undervisningsutvecklande modellen och hur dessa nyckelkomponter har förändrats under interventionsprocessen. De två nyckelkomponenterna är *vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter* och *reflektionsunderlag*. Dessa komponenter kan härledas till såväl den individuella som den kollegiala reflektionen samt till planering och genomförande av aktiviteter i den undervisningsutvecklande modellen som vi har valt att använda (se figur 1). Under separata rubriker beskrivs nyckelkomponenterna; vad inom respektive nyckelkomponent som vi har behållit under åren och varför samt vad som har förändrats och anledningen till dessa förändringar. Därefter beskrivs vad som karaktäriserar den kunskapsprodukt som har tagits fram och hur den används i den lokala kontexten då forskarnas medverkan har fasats ut. I figur 2 presenteras en översiktlig bild över vår modell (projektår 1–4) med tillhörande nyckelkomponenter och hur dessa har förändrats.

5 Vilka förändringar gjorde du i undervisningen mellan de två undervisningstillfällena? Hur skulle du vilja förändra ytterligare för att fler elever ska lära sig det som planerats?

6 De kategorier från Shimizu och Kangs studie (2022) som vi inte kunde identifiera i vår data var: *Problem Solving, Mathematics, Students' thinking.* Kategorin: Rules/Norms innehåller vissa aspekter som kan kopplas till vår data.

Figur 2

Modellens cykliska process från projektår 1 till 4



Not. Figuren visar en sammanfattning av de två nyckelkomponenterna: vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter och reflektionsunderlag, samt hur dessa komponenter har utvecklats över tid.

Vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter

En nyckelkomponent, som har identifierats och bidragit till utveckling av en hållbar matematikundervisning, är de vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteterna. Undervisningsaktiviterna har ett tydligt avgränsat matematiskt innehåll som under en lång tidsperiod har implementerats och förfinats i projektet. Redan från starten av projektet, introducerade forskarna idéen om hur tidigare forskningsresultat väcker nya frågor som behöver besvaras och hur vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter kan prövas och utvecklas av andra lärare i en annan kontext. Projektår 1 implementerades fem undervisningsaktiviteter med tillhörande representationer på liknade sätt som i tidigare forskningsprojekt (Björklund m.fl., 2021; Ekdahl, 2019; 2020).[7] Det framkom i lärarintervjuerna hur de av forskarna introducerade undervisningsaktiviteterna, lett till nya insikter om det matematiska innehållet. En lärare uttryckte det på följande sätt:

Lärare B:	Längs vägen ser jag nu massor av intressanta delar där jag har ett helt annat djup och en helt annan förståelse för vad vi kan göra i undervisningen.
Intervjuare:	Kan du ge något exempel …
Lärare B:	Ja, exempel kan ju bli det här med uppdelning av tal, hur man delar upp tal. (…) Men nu har vi fördjupat oss i tal och delat upp tal, (…) och fingermönster och hur viktiga de här delarna är ser jag som en helt annan insikt hos mig. (Lärare B, projektår 1, juni, 2020)

Eftersom flera lärare uttryckte att de vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteterna hade lett till nya insikter och utvecklat undervisningen, behölls dessa och förfinades ytterligare (se figur 2). I senare delen av projektår 2 designade lärarna och forskarna två nya aktiviteter med samma matematiska innehåll i fokus (strukturell ansats till tal och talrelationer). I den första aktiviteten ”Prickar i grupper, lika men ändå olika” introducerades spatiala mönster (prickmönster) och i den andra ”Matteduellen” fokuserades det på att synliggöra samband mellan olika representationer (fingermönster, spatiala mönster, siffersymboler och additionsuttryck). De två aktiviteterna hade inte sitt ursprung i tidigare forskningsprojekt men prövades dock sedan i en cyklisk process, på samma sätt som de vetenskapligt förankrade aktiviteterna (se figur 2).

Eftersom interventionen sträckte sig över flera år och flertalet lärare deltog mer än ett läsår gavs möjlighet för dem att dels under ett och samma läsår förfina undervisningen, dels ytterligare förfina samma undervisningsaktiviteter kommande läsår, men då i en ny elevgrupp. Upplägget ledde till en mer fördjupad reflektion över undervisning och elevers lärande. En av lärarna som har deltagit i projektet reflekterade kring detta på följande sätt:

> Jag har varit med två f-klasser parallellt med projektet. Första året fanns ju en liten osäkerhet kring lekarna och uppdragen så det var ju skillnad andra året att känna igen aktiviteterna och få pröva en gång till på en ny grupp. (Utsaga från anonymiserad utvärdering av projektet på kommunnivå projektår 2, juni, 2021)

Projektår 3 designades ytterligare en aktivitet, med fokus på talstruktur, men där eleverna skulle utmanas i att utforska tal och talrelationer i talområdet 1–30. Inför projektår 3 enades lärare och forskare om att dokumentera hur respektive undervisningsaktivitet skulle genomföras och vilka aspekter av innehållet som var viktiga för lärare att lyfta fram i undervisningen. Vidare skrevs en kort text om tidigare forskning kopplat till den specifika aktiviteten och förslag på frågor att

7 ”5- och 10-masken”, ”Franska tärningsspelet”, ”Kontextuppgifter”, ”Sju apor leker i två träd”, ”Fingermönster”

använda i undervisningen (se figur 2). Forskarna ansvarade för dokumentationen med syfte att stötta nytillkomna lärare och underlätta för alla lärares planeringar. Dokumentationerna användes och utvärderades sedan av alla lärare i slutet av projektår 3. Sammanfattningsvis behölls flertalet undervisningsaktiviteter från tidigare forskningsprojekt och de nya aktiviteterna från projektår 2 förfinades ytterligare under projektår 3.

Reflektionsunderlag

Reflektionsunderlagen är, utöver vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter, den komponent som framstår som avgörande för att genom den undervisningsutvecklande modellen utveckla en hållbar matematikundervisning på vetenskaplig grund. I den cykliska modellen ingår steg av både individuell och kollegial reflektion över undervisning och elevers lärandemöjligheter. Därför fanns det skäl till att olika reflektionsunderlag initierades, prövades, förkastades alternativt förfinades under processen (se figur 2).

Loggbok

Projektår 1 introducerades loggbok där lärarna förväntades anteckna utifrån ett antal planerings- och reflektionspunkter. Att skriftligt reflektera över undervisning och sedan delge kollegor och forskare dessa reflektioner, var till en början ovant för flera lärare. Upplägget med *Loggbok utifrån planerings- och reflektionspunkter* var inte tillräckligt förankrat i lärargruppen. Bristen på tid och ovanan att skriftligt dokumentera framkom i lärares utsagor i slutet av projektår 1. En lärare uttryckte:

> Jag tänker att det är jättesvårt att ta sig tid att skriva. Det har stressat mig. Att man måste skriva för att reflektera. Reflektera gör jag, det är inte säkert alla gör det, men jag gör det hela tiden. Det finns där i bakhuvet, man är så van vid att tänka, hur gick det där nu då? Och vad ska jag tänka på till nästa gång. Det där tar för mycket tid för mig. (Lärare C, projektår 1, juni, 2020)

En annan lärare uttryckte att det skriftliga reflektionsunderlaget hade varit ett stöd i reflektionen över undervisning, även om det har tagit tid och säger:

> … men jag kanske har skrivit ett planeringsunderlag, och jag kan gå tillbaka till det planeringsunderlaget. Ja, men det var dom där frågorna jag skulle ställa, att man även om jag inte hinner skriva jättemånga planeringsunderlag så har jag ändå stolparna som kan hjälpa mig att ta tillbaka mig till – vad var det viktiga i det här syftet, vilka frågor var det nu som var dom viktiga att ställa … (Lärare A, projektår 1, juni, 2020)

Då endast ett fåtal av lärarna använde loggbok blev den inte ett fungerande underlag och därför beslöts det i samförstånd att avsluta loggboksskrivandet (se figur 2). Vid de kollegiala träffarna projektår 1 kom reflektionerna mestadels att hamna i hur man hade genomfört aktiviteten (fältanteckningar 2020-02-27). Vad som skulle kunna förändras i undervisningen för att det matematiska innehållet skulle synliggöras, tolkades ibland som att en helt annan aktivitet skulle prövas. Därför initierades videofilmning.

Videofilmning och lektionsplaneringsmall

Videofilmning som reflektionsverktyg infördes projektår 2, något som vi i projektet fortsatte med under även under projektår 3 (se figur 2). Skärmdumpar och videoklipp från undervisning som valdes ut till de gemensamma träffarna ledde till mer fördjupade reflektioner, ur både ett undervisnings- som ett lärandeperspektiv. Oftast hade läraren som filmat sig själv, redan reflekterat kring filmen innan den laddades upp. Förutom videofilmning prövades projektår 2 en *Lektionsplaneringsmall* (se figur 2) med färre planerings- och reflektionspunkter jämfört med loggboken. Undervisningen planerades i sekvenser. För varje sekvens skulle det matematiska fokuset, exempel och planerade frågor skrivas fram. Lektionsplaneringsmallen visade sig dock endast delvis fungera. Flera lärare uttryckte osäkerhet kring mallens rubriker och vad som skulle skrivas var, vilket gjorde att det oftast blev forskarna som ledde arbetet med att skriva i mallen vid de digitala träffarna.

Elevintervjuer

Eftersom elevperspektivet mer sällan framkom i reflektioner projektår 1 och lärarna återkom till att det vore av intresse att kartlägga elevernas kunnande om tal, genomförde forskarna *Elevintervjuer* i början och slutet av projektår 2. Exempel på elevresonemang och sammanställning av resultat på kommunnivå, användes återkommande vid träffarna för kollegial reflektion över hur undervisning kunde få fler elever i förskoleklass att utveckla förmågan att se antal som grupper, tals del-helhetsrelation och att använda denna förmåga för att lösa aritmetikproblem. I uppstarten av projektår 3 användes sammanställning av eleveleververvjuer som underlag för vad som verkar ha fungerat i undervisningen projektår 2 och vad som behövde fokuseras i mötet med nya elever projektår 3.

Strukturerade planerings- och reflektionspunkter

För att kunna utveckla en undervisningsutvecklande modell där alla lärare kan känna sig delaktiga i att planera, genomföra och reflektera över undervisning om tal och talrelationer, användes ett reflektionsunderlag i form av *Strukturerade planerings- och reflektionspunkter* (se figur 3).[8]

Figur 3

Strukturerade planerings- och reflektionspunkter som stöd för planering av och reflektion över undervisning

Planeringspunkter:

- Syftet – vad ska aktiviteten ge eleverna möjlighet att lära?
- Vilka representationer/ material?
- Vilka exempel väljer jag?
- Vad ska lyftas fram/ pekas ut för att aktivitetens syfte ska nås?
- Vilka frågor ska jag ställa?
- Hur ska jag sammanfatta/ knyta ihop påsen på slutet?

Reflektionspunkter:

- Hur tog sig eleverna an aktiviteten?
- Vad verkar de ha fått syn på/ vad har de inte fått syn på? Hur såg du det?
- Vad hände när du använde de planerade frågorna?
- Vilka förändringar gjorde du i undervisningen mellan de två undervisningstillfällena?
- Hur skulle du vilja förändra ytterligare för att fler elever ska lära sig det som har planerats.

8 Små justeringar av formuleringar har gjorts under processen.

Projektår 3 återgick vi till planerings- och reflektionspunkterna från projektår 1, men vi förfinade några formuleringar och ändrade *hur* underlaget skulle användas. Anledningen till denna förändring var att flera lärare från samma skolenhet hade deltagit från projektår 1, medan andra lärare från andra skolenheter var nya i projektet. Utan stöd av kollega kunde det ta tid att sätta sig in i modellens upplägg (se figur 1) med dess tillhörande undervisningsaktiviteter. Det fanns även lärare som av praktiska skäl inte hade kunnat genomföra undervisningen så som de hade önskat. Därför öppnades det projektår 3 upp för en viss frihet i vilken av aktiviteterna som planerades vid träffarna och hur länge lärare valde att stanna kvar i samma undervisningsaktivitet innan man gick vidare till nästa aktivitet. Eftersom aktiviteterna hade ett liknade matematiskt fokus och avgränsning i vilka representationer som användes, påverkades inte diskussionen om undervisning och elevers lärande nämnvärt. Lärare kunde ta del av kollegors erfarenheter vid de gemensamma reflektionerna, även om hen inte hade prövat just den specifika aktiviteten. Då en punkt i underlaget handlade om att reflektera över hur man skulle förändra sin undervisning ytterligare och som vi oftast under projektår 1 och 2 lät lärarna anteckna enskilt, införde vi istället projektår 3 att dessa punkter skulle sammanfattas skriftligt av en av forskarna under pågående träff. Nedan (figur 4) finns ett exempel på en sådan sammanfattning av den undervisningsaktivitet som kallas *5- och 10-masken*, som skrevs på en digital träff.

Figur 4

Ett exempel på sammanfattande reflektioner från en gemensam träff projektår 3

Förändringar – Vad tar vi med oss till nästa gång? 5/10- masken

- För att förstå delar i helheten, häng kvar i exemple~~t~~,följ strukturen ”3 och 2 tillsammans är 5” förtydliga helheten/ delarna.
- Tänka på två femmor = 10, se grupper, erbjuda alternativ till att räkna en och en … våga hänga i …
- Vilken delning är bra att börja med? (val av exempel) 6 synliga = 5 och en till (4 gömda). Skillnader i vad elever får syn på.
- Iaktta och stöttar alla barn i hur de visar, Jobba med hela femman, påminna om helheten
- Se helheten 5, vara en modell själv~~-~~ fingermönster
- Utgå från en hand starka femman, betona skillnad mellan Franska tärningsspelet/ Masken
- Stödfrågor och uppmaninga~~r~~-- hålla fokus på matematiska innehållet
- ”Visa svaret” och stötta de som behöver det mest☺

Not. Figuren visar en sammanfattning av lärarreflektioner knutna till undervisningsaktiviteten ”5-och 10-masken” (skärmdump av Powerpoint, mars 2022).

Genom att använda reflektionsunderlaget på detta sätt fick nytillkomna lärare och lärare som kände en viss osäkerhet i undervisningen, stöd genom att ta del av andra lärares undervisningserfarenheter. I fältanteckningar från möten (projektår 3) finns noteringar om lärare som sett det som värdefullt att ta del av andras reflektioner och sedan kunna använda dem i sin planering av samma aktivitet. Utifrån önskemål om att fler kollegor skulle delge sina reflektioner vid de digitala träffarna gjordes projektår 3 ytterligare en förändring av *hur* reflektionsunderlaget skulle användas. Lärare som planerade samma aktivitet vid träffen skulle inför nästkommande träff skicka sina reflektioner över genomförd undervisning till en av forskarna och till de kollegor som hade planerat samma aktivitet.

Analys av individuella reflektioner av undervisning

Genom en analys av de skriftliga individuella reflektionerna över de förändringar i undervisning som lärarna gjort mellan undervisningstillfällena, samt vilka förändringar de reflekterat över att göra inför kommande undervisning, har tre kategorier identifierats i analysen:

Kategori 1: Organisatoriska och praktiska förändringar

Kategori 2: Lärarens didaktiska handlingar

Kategori 3a: Lärarens matematikdidaktiska handlingar utifrån eleviakttagelser

Kategori 3b: Lärarens matematikdidaktiska handlingar i relation till aktivitetens syfte

Kategori 1, *Organisatoriska och praktiska förändringar* relaterar till arbetsformer (t.ex. gruppstorlek eller gruppsammansättning utifrån kunskapsnivå), arbetssätt (t.ex. stationsarbete eller helklassamtal), digitala hjälpmedel, placering i klassrummet och undervisningspassets längd. Kategori 2, *Lärarens didaktiska handlingar* kännetecknas av lärarens förändrade handlingar för att eleverna ska lära sig. Det kan handla om att förtydliga instruktionen, pröva flera gånger, utveckla egen säkerhet i aktiviteten, ställa de planerade frågorna eller att komma ihåg att summera på slutet. Till skillnad från de organisatoriska och praktiska förändringarna är dessa reflektioner mer knutna till undervisningen. Däremot är de inte kopplade till en specifik aktivitet och motiverar heller inte varför dessa handlingar skulle synliggöra matematikinnehållet. I kategori 3a, *Lärarens matematikdidaktiska handlingar utifrån eleviakttagelser* och 3b, *Lärarens matematikdidaktiska handlingar i relation till aktivitetens syfte* kännetecknas reflektionerna av att förändringarna motiveras utifrån det man har sett att eleverna inte verkar ha lärt sig om det specifika matematiska innehållet i aktiviteten. Exempelvis kan det handla om hur materialet stöttar eleverna att se antal som grupper och på så sätt erbjuder alternativ till att räkna ett till ett, peka ut 5:an som referenstal eller att låta eleverna jämföra två sätt att visa en uppdelning av ett tal.

Projektår 3 relaterade flertalet reflektioner till eleviakttagelser och syftet med aktiviteten (kategori 3a och 3b). Det förekom även projektår 3 förslag på praktiska och organisatoriska förändringar, som att ”en mindre gruppstorlek skulle ge bättre förutsättningar för lärande” men även att ”en större grupp” elever skulle lämpa sig bättre då eleverna på så vis får ta del av fler strategier och mer hållbara sätt att lösa en uppgift. Projektår 3 var det vanligare att det i en och samma reflektion fokuseras både på organisatoriska förändringar och matematikdidaktiska handlingar, utifrån eleviakttagelser och aktivitetens syfte. Det kan jämföras med reflektioner från projektår 1 och 2 där flertalet reflektioner handlade om praktiska och organisatoriska förändringar. Enstaka reflektioner från projektår 1 motiverar förändringar utifrån eleviakttagelser och det matematiska innehållets behandling.

Sammanfattningsvis visar analysen att reflektionsunderlag är en nyckelkomponent i modellen för att skapa det gemensamma fundamentet för undervisning. Inte minst sättet på vilket de strukturerade punkterna i reflektionsunderlaget användes för såväl den individuella som den kollegiala reflektionen. Det förefaller som att reflektionsunderlagen i form av skriftlig reflektion, videoklipp av undervisning och exempel från elevintervjuer utvecklade modellen under projektår 1–3. Möjligheten att välja hur länge man ville stanna kvar i samma undervisningsaktivitet verkade vara en framgångsrik anpassning till den lokala kontexten. Likaså att dela de individuella reflektionerna med kollegor innan den gemensamma träffen, bidrog till en fördjupad diskussion. Loggboken (projektår 1) och Lektionsplaneringsmallen (projektår 2) gav inte det stöd för utveckling av matematikundervisning som hade önskats. Summeringen av enskilda och kollegiala reflektioner i slutet av respektive lärarträff visade sig däremot vara värdefull för utvecklingen av undervisning (se figur 4).

forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 85–107

Kunskapsprodukt

Syftet med interventionen var att, utifrån praktikens frågeställningar i samverkan med forskare och genom kollegialt lärande, gemensamt bygga ett fundament för en hållbar matematikundervisning om tal och talrelationer med stöd av aktuell forskning. Under de fyra år som interventionen pågick har det getts möjlighet att genom en process, identifiera och förändra nyckelkomponenter i den modell som har tagits som utgångspunkt. Denna process har genererat en kunskapsprodukt som består av två delar. Den första delen är en undervisningsguide, med beprövade och designade undervisningsaktiviteter med tillhörande reflektioner, som tagits fram tillsammans med lärarna. Den andra delen i kunskapsprodukten är den undervisningsutvecklande modell med de nyckelkomponenter som haft avgörande betydelse för modellen och hur den har förfinats under interventionen.

Delarna i kunskapsprodukten har olika karaktär men sätter matematikundervisning och elevers lärande i fokus och ska ses som sammanflätade.

Undervisningsguide

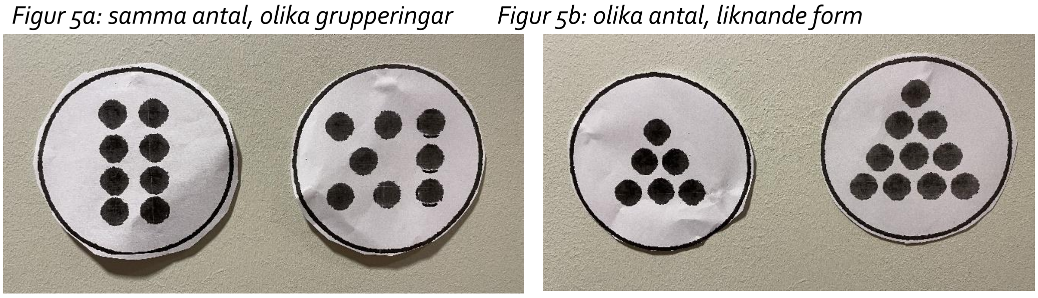
Kunskapsprodukten som beskriver de sju gemensamt dokumenterade undervisningsaktiviteterna är sammanställda i en undervisningsguide. Respektive undervisningsaktivitet innefattar en kort teoretisk forskningsbakgrund och en beskrivning av genomförandet (1–1½ A4-sida). Dokumentationen som ligger till grund för undervisningsguiden skrevs fram under projektår 3 (se även figur 2) och sammanställdes under projektår 4. Undervisningsguiden har således sin förankring i nyckelkomponenten vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter och karaktäriseras av en tydlig avgränsning av det matematiska innehållet i kombination med systematiskt utprövade aktiviteter med stark förankring i tidigare forskning.

Undervisningsguiden innehåller även material från nyckelkomponenten reflektionsunderlag, främst från de individuella och gemensamma reflektionerna (projektår 2 och 3). Dessa reflektioner har sammanfattats i punktform (½-1 A4-sida) för respektive aktivitet och under två huvudrubriker: ”Vad är viktigt att tänka på?”, som inkluderar praktiska och organisatoriska aspekter samt mer allmändidaktiska handlingar (kategori 1 och 2) och ”Lärarens matematikdidaktiska handlingar” (kategori 3a och 3b). För att illustrera hur en sådan dokumentation kan se ut väljer vi en av undervisningsaktiviteterna som kallas ”Prickar i grupper, lika men ändå olika”, där syftet är att eleverna ska utveckla förmåga att uppfatta antal i grupper och att en helhet (antal prickar) kan bestå av sammansatta delar. Eleverna ska även ges möjlighet att se att antalet prickar i olika mönster kan vara grupperade på olika sätt. I aktiviteten ska läraren visa två prickmönster, antingen med samma antal och olika grupperingar (se figur 5a) eller olika antal men med liknande form (se figur 5b). Eleverna ska resonera om hur de ser mönstret och vilka likheter och skillnader de ser. I figur 5 finns exempel på prickmönster som läraren visar.

Figur 5a och 5b

Aktiviteten Prickar i grupper, lika men ändå olika

Figur 5a: samma antal, olika grupperingar *Figur 5b: olika antal, liknande form*



forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 85–107

I figur 6 ges exempel på lärarreflektioner ur undervisningsguiden. I reflektionen över undervisning av den här aktiviteten framkommer bland annat hur läraren kan stötta elever genom att erbjuda alternativ till att räkna prickarna en och en. Vidare ges förslag på vilka mönster som är lämpliga att jämföra (figur 6).

Figur 6
Exempel på lärarreflektioner tillhörande aktiviteten Prickar i grupper, lika men ändå olika

Gemensamma reflektioner (projektår 2 och 3)
Vad är viktigt att tänka på?
✓ Elmon/ dokumentkameran är lämplig att använda i denna aktivitet. Det blir lättare för eleverna att se mönstren.
✓ Aktiviteten fungerar med såväl en mindre som en större grupp. Det beror på storleken på bilderna och om dokumentkameran används eller inte.
✓ Börja med ett enklare mönster *och färre antal* prickar, så att alla kan vara med och resonera.
Lärarens matematikdidaktiska handlingar *Vad är lärarens ämnesdidaktiska roll i samband med genomförandet av aktiviteten? Hur kan lärarens handlingar möjliggöra elevers lärande?*
✓ Viktigt att erbjuda alternativ till de som räknar prickarna en och en. Det kan göras genom att peka ut/ ringa in den del av mönstret som är lättast att se. Ex. i en pyramid med sex prickar, ringa in de tre på toppen och synliggör då sex som två treor.
✓ Påminn gärna eller jämför prickmönstren med hur prickarna ser ut på tärningen, då de är bekanta med dem.
✓ Använd gärna frågan: Hur kan man veta det?
✓ Utmana genom att jämföra fler än två mönster. Välj då mönster där exempelvis skillnaden är ett, eller där formen, ex. pyramiden blir större och större. Be eleverna resonera om vad som skiljer och hur en större pyramid skulle kunna se ut.

I de andra aktiviteterna i undervisningsguiden finns liknande dokumenterade reflektioner som de ovan, beskrivna till respektive aktivitet. Förutom beskrivningar av aktiviteter med tillhörande reflektioner ingår samma planerings- och reflektionspunkter som har använts tidigare i modellen. Denna del av kunskapsprodukten har sin förankring i nyckelkomponenten reflektionsunderlag och synliggör lärares beprövade erfarenhet.

Den undervisningsutvecklande modellen

Utöver den undervisningsguide som har tagits fram består kunskapsprodukten av den undervisningsutvecklande modell som har haft betydelse för upplägget av samverkansprojektet. Modellen tog sin utgångspunkt i EDR (Bakker, 2018; Van den Akker, 2013) och kännetecknas av en iterativ process innehållande komponenter som planering, undervisning, enskild och kollegial reflektion samt förfining av undervisning. Den modell vi ser kan utgöra en kunskapsprodukt har utvecklats utifrån identifierade nyckelkomponenter. Dessa har förändrats över tid och i relation till den lokala kontexten (se figur 2). Det som karaktäriserar denna del av kunskapsprodukten är vad, i det här fallet vilka komponenter, som har haft avgörande betydelse för att modellen ska fungera just som en undervisningsutvecklande modell. En nyckelkomponent är de vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteterna som genomförs flera gånger, där lärare får tar del av tidigare lärares reflektioner men även fortsätter att reflektera individuellt och tillsammans med kollegor över undervisning om tal och talrelationer. Stöd för reflektion finns i den andra nyckelkomponenten; de strukturerade planerings- och reflektionspunkterna och specifikt i reflektionspunkterna: ”Vad verkar eleverna ha fått syn på/ Vad har de inte fått syn på? Hur såg du det?”

och ”Hur skulle du vilja förändra ytterligare för att fler elever ska lära sig det som har planerats?” Med andra ord är inte undervisningsguiden i sig tillräcklig för att den kunskapsprodukt som har tagits fram ska leda till en hållbar matematikundervisning på vetenskaplig grund. Därutöver behöver den undervisningsutvecklande modellen och de komponenter som har tagits i beaktande och förändrats över tid, vara en del i kunskapsprodukten. Analysen av processen visar att kunskapsprodukten, med dess två delar är nödvändig för att interventionen ska vara framgångsrik men även betydelsefull för andra som skulle vilja genomföra en liknande intervention.

Under projektår 4 användes undervisningsguiden av lärare som hade deltagit under de första tre åren men även av nytillkomna lärare. Aktiviteterna förväntades genomföras i alla kommunens förskoleklasser. Utifrån studiens resultat togs beslut av huvudman att undervisningsguiden framöver ska revideras varje år i samverkan mellan lärargrupper, forskare och kommunens lektor. Vid en av de gemensamma träffarna projektår 4 framkom ytterligare reflektioner kring lärarnas ämnesdidaktiska handlingar. Dessa skrevs in för respektive aktivitet. Det framfördes argument för att lägga till en av aktiviteterna som hade plockats bort inför projektår 4 (totalt 7 aktiviteter). Det beslutades även att kunskapsprodukten framöver ska spridas till kommunens lärare som inte har undervisat i förskoleklass tidigare samt till nyanställda lärare. Det femte projektåret ska dessa lärare erbjudas en introduktion av modellen och undervisningsguiden, av en lärare som har deltagit sedan start. Kunskapsprodukten är tillgänglig för lärare i förskoleklass, rektorer, specialpedagoger, kommunens utvecklingsledare, verksamhetschefen och kommunlektor via kommunens intranät.

Diskussion

Carlgren (2020) efterlyser en diskussion om interventioners utformning och hur dessa kan utvecklas genom iterativa processer. Vi hoppas att denna artikel har kunnat ge en realistiskt och nyanserad bild av hur en undervisningsutvecklande modell har utvecklats och förfinats i en långsiktig process. Vår avsikt har varit att beskriva undervisningsmodellen och dess identifierade nyckelkomponenter på ett så detaljerat sätt som möjligt. Vi menar att det inte är tillräckligt att identifiera och beskriva komponenterna (Century & Cassata, 2016) utan även förklara hur nyckelkomponenterna har förändrats över tid och därmed kan ses som avgörande för interventionen och för den kunskapsprodukt som har tagits fram i samverkan mellan lärare och forskare.

I ett retrospektivt perspektiv ser vi hur valen av reflektionsunderlag (Harvey & Teledahl, 2022) och sättet på vilka de har använts verkar vara avgörande för undervisningsutvecklingen. Reflektionsunderlag i form av videoklipp och skärmdumpar från undervisning ledde till fördjupade kollegiala reflektioner. De strukturerade reflektionspunkterna bidrog till att reflektioner och diskussioner riktades mot elevers lärande och lärarens ämnesdidaktiska roll i undervisningen. Speciellt visade sig detta fungera väl då reflektionerna skickades till kollegor och forskare innan de gemensamma träffarna. Då fokuserades i större utsträckning på matematikdidaktiska handlingar utifrån eleviakttagelser och aktivitetens syfte, vilket ledde till en mer fördjupad kollegial reflektion. Flertalet av dessa reflektioner kom att utgöra en bärande del i kunskapsproduktens undervisningsguide. Med utgångspunkt i denna studie vill vi argumentera för att reflektionsunderlag, specifikt i form av strukturerade planerings- och reflektionspunkter och hur dessa har använts, kan tas som utgångspunkt i andra liknande undervisningsutvecklande projekt.

Praktiska frågor som tid för deltagande är en förutsättning för aktivt deltagande i praktiknära forskningsprojekt (Eriksson, 2018). I vårt projekt har dessa förutsättningar varit goda, inte minst genom framförhållning, terminsplanering och korta kommunikationsvägar till lärare, rektorer och kommunledning. Lärarnas tid för deltagande har prioriterats av skolledningen. Däremot har det periodvis legat en utmaning i att alla lärare har förväntats delta i interventionen, genom att undervisa och bidra med sina erfarenheter. Vi tror att stödet från mer erfarna kollegor, viss frihet i valet av aktiviteter (projektår 3) och den framarbetade undervisningsguiden med ett begränsat antal undervisningsaktiviteter, kan ha bidragit till en större delaktighet. Eftersom interventionen har pågått under en lång tid upplever vi att forskarnas expertroll har tonats ner och att lärarna har blivit mer aktiva och bidragit med fördjupade reflektioner kring undervisning och lärande.

Erfarenheter från samverkansprojektet indikerar att undervisningsutveckling, utifrån en mindre välkänd ansats (den strukturella ansatsen till undervisning och lärande om tal) tar tid. Att starta i vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteter från tidigare forskningsprojekt och utveckla dessa för att sedan designa och förfina nya uppgifter som bygger på samma principer, tror vi har varit betydelsefullt för undervisningsutvecklingen. Likaså att genomföra samma undervisningsaktivitet flera gånger, såväl under samma som efterföljande läsår och fortlöpande reflektera över elevers lärandemöjligheter, ser vi som avgörande för att bygga ett fundament för en hållbar matematikundervisning.

De flesta interventioner resulterar oftast i någon slags kunskapsprodukt utvecklad i samverkan mellan lärare och forskare (Van den Akker, 2013). Kunskapsprodukten som har utvecklats i detta projekt kan sägas ha likheter med tidigare studier (jfr Ekdahl, 2020; Višňovská m.fl., 2023) då undervisningsaktiviteter har designats och utgångspunkten har tagits i tidigare forskning. Kunskapsprodukten (Siegler & Thompson, 2009) har vi försökt att beskriva så detaljerat som möjligt. Kanske skulle någon se det som att projektet har genererat två kunskapsprodukter, vilket skulle kunna vara fullt möjligt (Lindberg m.fl., 2023), om undervisningsguiden och den undervisningsutvecklande modellen med tillhörande nyckelkomponenter ses som åtskilda. Kännetecknande för vår kunskapsprodukt är däremot att den utarbetade guiden är sammanflätad med vår modells komponenter, då reflektionsunderlagen används i relation till de vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteterna i undervisningsguiden. Vidare menar vi att undervisningsguiden inte ska ses som en statisk produkt, likt ett läromedel, utan är tänkt att revideras kontinuerligt utifrån lärares reflektioner efter genomförd undervisning.

Undervisningsguiden har ett tydligt fokus på undervisning och vad eleverna förväntas lära sig om tal och talrelationer. Den är i hög grad praktiknära då dess innehåll är framtaget i nära samverkan med lärare under en längre tid, och i nära anslutning till klassrummen. Genom de vetenskapligt förankrade undervisningsaktiviteterna och reflektioner över undervisningen, har den beprövade erfarenheten dokumenterats, kommunicerats och prövats på nytt. De i punktform formulerade reflektionerna till respektive aktivitet är konkret formulerade. Då framtagandet av vår kunskapsprodukt bygger på en hög grad av medverkan av lärare (jfr Gueudet m.fl., 2013) argumenterar vi för att lärares sätt att formulera förslag på förändringar av undervisning och sättet på vilket det har skrivits fram, har varit viktigt under hela processen. Undervisningsguiden innehåller ett mycket begränsat antal undervisningsaktiviteter (sju) vilket skiljer sig från Tänka, Resonera och Räkna (TRR) i förskoleklass (Sterner & Helenius, 2015) där antalet aktiviteter som lärare förväntas genomföra är betydligt fler.

Några av de dokumenterade undervisningsaktiviteterna prövas och förfinas nu i ett annat forskningsprojekt. De används även av studenter på forskarnas lärosäte. Kunskapsprodukten sprids också till andra lärare inom den aktuella kommunen. Detta sätt att sprida kunskap utanför klassrum och lokal kontext (kommunen) är viktigt för att kunskapen ska kunna användas och utvecklas ytterligare av andra lärare (jfr Andrée & Eriksson, 2019). Undervisningsguiden med aktiviteter och lärarreflektioner skulle kunna användas av enskilda lärare i andra kommuner och förfinas ytterligare. Likaså skulle de utarbetade planerings- och reflektionspunkterna mycket väl kunna användas i planering av och reflektion för undervisning oavsett ämne och åldersgrupp. Utifrån genomförd studie, vill vi hävda att lärare behöver ta del av den beprövade erfarenheten i guiden, pröva aktiviteterna flera gånger med sina elever och fortsätta reflektera (individuellt och kollegialt) över vad i undervisningen som kan förfinas ytterligare för att fler elever ska lära sig det som avses. Om syftet är att generera en hållbar (matematik)undervisning är inte undervisningsguiden tillräcklig, utan modellen och dess nyckelkomponenter behöver också tas i beaktande.

Avslutningsvis har vi, lärare och forskare, genom en långsiktig intervention bidragit till en utveckling av matematikundervisning på vetenskaplig grund. Samverkansprojektet har gett möjlighet att fördjupa kunskaper om lärande och undervisning om tal och talrelationer. Lärare har tillsammans med kollegor och forskare i en iterativ process prövat och dokumenterat undervisningsaktiviteter med stöd av den undervisningsutvecklande modellen. I samverkansprojektet har lärare aktivt deltagit i att ta fram en kunskapsprodukt som kan bidra till en fortsatt utveckling av undervisning. Vi har låtit det ta tid. Undervisningsutveckling måste få ta tid!

Tack

Tack till alla deltagande lärare och elever i förskoleklass, kommunlektor, rektorer och verksamhetschef. Tack också till ULF försöksverksamhet (www.ulfavtal.se).

Referenser

Andrée, M. & Eriksson, I. (2019). A research environment for teacher-driven research–some demands and possibilities. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *9*(1), 67–77. https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2019-0015

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge.

Baroody, A. & Purpura, D. (2017). Early number and operations: Whole numbers. I J. Cai (Red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 308–354). National Council of Teachers of Mathematics.

Björklund C., Ekdahl A.-L. & Runesson Kempe, U. (2020). Implementing a structural approach in preschool number activities. Principles of an intervention program reflected in learning. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 72–94. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1756027

Björklund, C., Marton, F. & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 261–284. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(2), 126–139. https://doi.org/10.1108/20468251211224172

Carlgren, I. (2020). Redaktionell kommentar 2020: 1. *Forskning om undervisning och lärande*, *8*(1), 3–8.

Century, J., Rudnick, M. & Freeman, C. (2010). A framework for measuring fidelity of implementation: A foundation for shared language and accumulation of knowledge. *American journal of evaluation*, *31*(2), 199–218. https://doi.org/10.1177/1098214010366173

Century, J. & Cassata, A. (2016). Implementation research: Finding common ground on what, how, why, where, and who. *Review of research in education*, *40*(1), 169–215. https://doi.org/10.3102/0091732X16665332

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for research in mathematics education*, *28*(3), 258–277. https://doi.org/10.2307/749781

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Denscombe, M. (2017). *The good research guide: For small-scale social research projects*. McGraw-Hill Education.

Ekdahl, A.-L. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections*. [Doktorsavhandling, Jönköping University].

Ekdahl, A.-L. (2020). Different learning possibilities from the same activity—Swedish preschool teachers' enactment of a aumber relation activity. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *65*(4), 601–614. https://doi.org/10.1080/00313831.2020.1739131

Eriksson, I. (2018). Lärares medverkan i praktiknära forskning: Förutsättningar och hinder. *Utbildning och Lärande*, *12*(1), 27–40.

Eriksson, I. (2021). Från att veta vad som fungerar till att driva utveckling av undervisningen. I Å. Hirsh & A. Olin (Red.), *Skolutveckling i teori och praktik* (s. 185–200). Gleerups.

Fejes, A. & Thornberg, R. (2015). *Handbok i kvalitativ analys* (2 uppl.). Liber AB.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. I T. Plomp & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 73–113). Netherlands institute for curriculum development.

Gueudet, G., Pepin, B. & Trouche, L. (2013). Collective work with resources: An essential dimension for teacher documentation. *ZDM*, *45*, 1003–1016. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0527-1

Harvey, F. & Teledahl, A. (2022). Characteristics of professional learning communities in mathematics: A systematic review. *Mathematics Teacher Education and Development*, *24*(1), 72–95.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of mathematics teacher education*, *9*(2), 187–211. https://doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z

Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G. & Quilio, S. (2018). Cooperative engineering as a joint action. *European Educational Research Journal*, *17*(1), 187–208. https://doi.org/10.1177/1474904117690006

Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B. & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: A randomized controlled study. *Journal of educational psychology*, *104*(3), 647–660. https://doi.org/10.1037/a0029018

Konrad, U. & Bakker, A. (2018). From implementer to co-designer: A teacher's changing role in a design research project. I A. Bakker (Red.), *Design research in education: A practical guide for early career researchers* (s. 246–254). Routledge.

Kullberg, A., Vikström, A. & Runesson, U. (2020). Mechanisms enabling knowledge production in learning study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *9*(1), 78–91. https://doi.org/10.1108/IJLLS-11-2018-0084

Lindberg, V., Kempe, U. R. & Eriksson, I. (2023). Kunskapsprodukter för lärarprofessionen–Skolforskningsinstitutets projekt 2016 och 2017. *Forskning om undervisning och lärande*, *11*(3), 58–84. https://doi.org/10.61998/forskul.v11i3.18052

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

McKenney, S. & Reeves, T. C. (2013). Systematic review of design-based research progress: Is a little knowledge a dangerous thing? *Educational researcher*, *42*(2), 97–100. https://doi.org/10.3102/0013189X12463781

McKenney, S. & Reeves, T. (2018). *Conducting educational design research*. Routledge.

Morris, A. K. & Hiebert, J. (2011). Creating shared instructional products: An alternative approach to improving teaching. *Educational Researcher*, *40*(1), 5–14. https://doi.org/10.3102/0013189X10393501

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C., English, L. D. & Robertson, G. (2010). Implementing a pattern and structure mathematics awareness program (PASMAP) in Kindergarten. I C. Hurst, L. Sparrow & B. Kissane (Red.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 796–803). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithemtic skills: A phenomographic approach*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), 3–46.

Nieveen, N. & Folmer, E. (2013). Formative evaluation in educational design research. *Design Research*, *153*(1), 152–169.

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, *45*, 929–943. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0534-2

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. I T. Plomp & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 11–50). Netherlands institute for curriculum development.

Runesson, U., Lövström, A. & Hellquist, B. (2018). Beyond the borders of the local: How "instructional products" from learning study can be shared and enhance student learning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *7*(2), 111–123. https://doi.org/10.1111/ejed.12336

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Selander, S. & Kress, G. (2021). *Design för lärande: ett multimodalt perspektiv.* Studentlitteratur AB.

Sensevy, G., Quilio, S. & Mercier, A. (2015). Arithmetic and comprehension at primary school. I X. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Red.), *Proceedings of ICMI STUDY 23: Primary mathematics study on whole number,* (s. 472–479). University of Macau.

Skolverket. (2019) *Kartläggning i förskoleklass*. https://www.skolverket.se/undervisning/forskoleklassen/kartlaggning-i-forskoleklassen

Skolverket, (2022) *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet- Lgr 22*. https://www.skolverket.se/download/18.2cb9d0c18340c7dae31dd/1663664935672/pdf9718.pdf

Shimizu, Y. & Kang, H. (2022). Discussing students' thinking and perspectives for improving teaching: An analysis of teachers' reflection in post-lesson discussions in lesson study cycles. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(2), 419–431. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01371-5

Stigler, J. W. & Thompson, B. J. (2009). Thoughts on creating, accumulating, and utilizing shareable knowledge to improve teaching. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 442–457. https://doi.org/10.1086/596995

Sterner, G. & Helenius, O. (2015). Number by reasoning and representations–the design and theory of an intervention program for preschool class in Sweden. *Development of Mathematics Teaching: Design, Scale, Effects*, 159–168.

Sterner, G., Nagy, C. & Nyström, P. (2023). A scaled-up mathematics intervention in preschool classes. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–11. https://doi.org/10.1080/00313831.2023.2250352

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). *Educational design research*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203088364

Van den Akker, J. (2013). Curricular development research as a specimen of educational design research. I T. Plomp & N. Nieveen (Red.), *Educational design research* (s. 52–71). Netherlands institute for curriculum development.

Višňovská, J., Cortina, J. L. & Eckert, A. (2023). Resource design for re-sourcing teaching. I B. Pepin, G. Gueudet & J. Choppin (Red.), *Handbook of digital resources in mathematics education*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_39-1

Westerholm, K. & Samuelsson, J. (2020). Att utveckla god taluppfattning hos alla elever i förskoleklassen interventionsstudie i matematik. *Forskning om undervisning och lärande*, *8*(2), 46–68.

Widén, P. (2015). Textanalys. I A. Fejes & R. Thornberg. *Handbok i kvalitativ analys* (2 uppl., s. 176–193). Liber AB.

Åkerfeldt, A. & Svärdemo Åberg, E. (2021). Designs for learning: A research approach. I*nternational Journal of Educational Methodology*, *7*(4), 547–555. https://doi.org/10.12973/ijem.7.4.547

Författarpresentationer

Anna-Lena Ekdahl

Anna-Lena Ekdahl är universitetslektor i didaktik vid Jönköping University. Hon forskar om barns matematiklärande och hur lärare i samarbete med forskare utvecklar undervisningen.

Birgitta Lundberg

Birgitta Lundberg är universitetsadjunkt i matematikdidaktik vid Jönköping University. Hon arbetar i lärarutbildningen och är medforskare i praktiknära forskningsprojekt.

FORSKUL
FORSKNING OM UNDERVISNING & LÄRANDE

FORSKNING OM UNDERVISNING OCH LÄRANDE, VOL. 12, NR 2, 2024, S. 108–112
TEMA: MATEMATIKINTERVENTIONER I FÖRSKOLA OCH FÖRSKOLEKLASS

Förskolan och förskoleklass i blickfånget – tankar och spaningar om ett forskningsfält på stark frammarsch

Extern kommentar 2024:2

Camilo von Greiff*

*Korresponderande författare:
Camilo von Greiff
camilo.vongreiff@gmail.com

Forskning om undervisning och lärande, vol. 12, nr 2, 2024, s. 108–112.
DOI: 10.61998/forskul.v12i2.24721
ISSN:2001-6131

Publicerad: 2024-06-04

Med stort nöje har jag fått möjligheten att ge en kommentar i detta spännande temanummer om interventioner i matematikundervisning i förskola och förskoleklass. Det känns lite extra lyxigt att få landa en stund i förskolan och skolan (hädanefter förskolan) igen, som jag yrkesmässigt lämnat för ett knappt år sedan. På ett övergripande plan lämnar temanumret min bild av det praktiknära forskningsfältet intakt. Det är uppenbart att fältet är på stark frammarsch och producerar många artiklar med hög vetenskaplig kvalitet och hög relevans ur ett undervisningsutvecklande perspektiv. De fem forskningsartiklarna i detta temanummer är inga undantag. De visar på bredden av kvaliteter som en och samma studie behöver besitta för att verkligen utgöra ett bidrag till fältet; djup förtrogenhet med undervisning och vad som utgör utmaningar i densamma för berörda åldersgrupper, avancerade metodkunskaper och en skarp blick, på både den nationella och internationella forskningsfronten, för att beskriva den egna studiens bidrag. Och som om detta inte vore nog tror jag att man som forskare i fältet behöver ha goda organisatoriska och brobyggande egenskaper för att bygga fungerande, förtroendefulla relationer med förskollärare och lärare (hädanefter förskollärare) och rektorer i de miljöer där forskningen bedrivs. *Standards are high!*

Bredden och djupet av beskrivna kvaliteter är framträdande i såväl Björklund med flera (2024), Hedefalk med flera (2024), van Bommel med flera (2024), Walla och Palmér (2024) som Ekdahl och Lundberg (2024), som i blixtbelysning visar hur långt matematikdidaktisk forskning i just förskolan och förskoleklass - fokuset för detta temanummer – har kommit i utvecklingen. Det visar sig också genom att vi ser så många beviljade forskningsbidrag från detta fält i öppna utlysningar, med mycket hård konkurrens med andra delar av det praktiknära forskningsfältet och utbildningsvetenskap generellt.

Jag tänkte dock inte uppehålla mig vid smickrande omdömen utan i det följande pröva några argument om vad jag ser som utvecklingsmöjligheter, inte bara för forskning om matematikundervisning i förskola och förskoleklass, utan mer övergripande för det praktiknära fältet, med hjälp av några nedslag i föreliggande studier. Jag skriver medvetet ”prövar”, eftersom erfarenheten säger mig att det bland alla kloka forskare och förskollärare ofta finns gott om starka motargument som kan ta udden av, eller rent utav förkasta, framförda teser. Men gott så, på det sättet bidrar vi alla till en livfull och framåtsyftande debatt!

Vilka är egentligen förskollärarna och barnen i studierna?

Ofta beskrivs förskollärare, barn och elever (hädanefter barn) mycket knapphändigt i studierna, typiskt sett endast med antal. Jag tror att det är en brist för att resultaten ska kunna tolkas på ett rättvisande sätt. I de ofta småskaliga, övervägande kvalitativa studier som utgör bulken i den praktiknära forskningen är inte resultaten generaliserbara, på så sätt att man kan förvänta sig att uppnå samma resultat i en annan kontext än den som studien genomfördes i, som i vissa större kvantitativa studier. Istället ligger generaliserbarheten i att förskolläraren utifrån beskrivningar, mönster och tolkningar av undervisningssekvenser finner igenkänning från sin egen undervisning, och kan använda vunna insikter för att utveckla denna.

För att kunna göra en kvalificerad tolkning av hur en studies resultat kan ha bäring på den egna undervisningen behöver förskolläraren rimligen få en uppfattning om de förskollärare som har bedrivit undervisningen i studien, och vilken typ av barngrupper som deltar. Annars finns en stor risk att en uppsjö alternativa resultat döljs bland de presenterade resultaten. En undervisning som fungerar för en förskollärare med 25 års erfarenhet i en lugn, studiemotiverad barngrupp behöver inte betyda att den fungerar lika väl, eller alls, för en nyutexaminerad förskollärare i en barngrupp med många utåtagerande barn med låg studiemotivation, för att ta ett exempel. Den typen av ”markbeskrivningar” borde vara vanligare och mer omfattande i ett fält med anspråk på att vara praktiknära och undervisningsutvecklande. Det gäller i synnerhet forskning om undervisningsmoment som med min förförståelse förefaller synnerligen avancerad, såsom problemformulering i förskoleklass i van Bommel med flera (2024), pararbete om mönsterenheter i förskoleklass i Walla och Palmér (2024) och etiska resonemang om hållbar utveckling i förskolan i Hedefalk med flera (2024). Där tolkar jag flera beskrivningar av barnens reaktioner och tillvägagångssätt i undervisningen som att nivån på lärandemålet är på gränsen till, och ibland över, vad vissa barn i den åldern är mogna för. Det är förstås ingen kritik av studierna men förstärker, som jag ser det, behovet av fylliga beskrivningar av kontexten. Jag inser att det finns rena utrymmesbegränsningar hos de flesta tidskrifter, men van Bommel med flera (2024) visar föredömligt att det går att lägga visst fokus både på vilka förskollärare och barn som deltar i studien och kontexten i övrigt, och hur detta skulle kunna påverka implementering och resultat av interventionen.

I anslutning till detta resonemang tycker jag att det huvudsakliga motivet till Ekdahl och Lundberg (2024), som jag tolkar studien, inte är den kunskapsprodukt som genereras per se, utan snarare att undersöka hur forskningsresultat omhändertas, implementeras och förfinas. Det är förstås ytterst angeläget, men väcker samtidigt frågan när undervisning kan sägas vila på vetenskaplig grund. Är det när förskollärare tar stöd och inspiration från forskning? Eller behöver forskningsresultatens implementering i sig först beforskas, som i Ekdahl och Lundberg (2024)? Och behöver i så fall sådana implementeringsstudier göras för varje enskilt lärobjekt som beforskats eller finns det generiska lärdomar att dra utifrån implementeringsforskning? Eller ska man helt enkelt se det som att undervisning aldrig vilar på vetenskaplig grund i någon bestämd, statisk mening utan alltid är en del i en process där den vetenskapliga grunden utvecklas? Oavsett svar på dessa frågor är det lätt att se forskning som *en* viktig källa till undervisningsutveckling, men att förskollärares förmåga att förstå, värdera och använda forskning – deras forskningslitteracitet - och deras erfarenhet och professionella omdöme är minst lika viktiga komponenter.

Spelar det inte någon roll vilka förskolor och barngrupper som deltar och hur många de är?

Ett relaterat tema är hur urvalet av förskolor och barn i praktiknära studier görs, dels själva tillvägagångssättet och dels urvalets storlek. Utan att ha någon empiri att luta mig emot tycker jag mig se tendenser att det oftare är på relativt välfungerande, stabila förskolor med fokus och engagemang för undervisningsutveckling som praktiknära projekt bedrivs. Är resultaten från sådana studier relevanta i helt andra kontexter? Det är som jag ser det en empirisk fråga som bara kan adresseras genom studier i olika typer av förskolor och kontexter och att dessa kontexter tydligt beskrivs i studierna så att förskollärare som tar del av studier, med sitt professionella omdöme, kan värdera resultatens värde och användningsområde i den egna kontexten.

Hur urvalet är gjort beskrivs ofta inte alls eller sparsamt, och storleken på urvalet kommenteras ofta inte, är mitt intryck. Det framstår mer som slumpens skördar, hur många barngrupper och barn som deltar. I exempelvis Hedefalk med flera (2024) beskrivs att två förskolor, elva förskollärare och 64 barn deltar, utan att diskuteras eller motiveras. Om urvalsprincip och antal har betydelse, hade det varit bättre att ha dubbelt så många deltagande förskolor och barn och hur skulle det ha kunnat påverka resultaten? Om urvalsprincip och antal *inte* har betydelse, varför bedrevs inte forskningen bara på en förskola, som gissningsvis kunde ha besparat forskargruppen mycken möda och stort besvär? Den typen av resonemang skulle vara nyttigt och spännande att få ta del av.

Det är uppfriskande med studier som Björklund med flera (2024) som bryter av det huvudsakliga mönstret i fältet med småskaliga, kvalitativa ansatser i forskningsdesignen. I studien engageras så många som 361 barn, uppdelat på interventions- respektive kontrollgrupper, vilket aktualiserar generaliseringsanspråk i det ”kvantitativa” perspektivet (se ovan). Det framstår därför som olyckligt, och enligt min bild inte helt ovanligt, att inte undersöka, eller i varje fall inte redovisa, om de resultat som kommer fram är statistiskt signifikanta eller inte.

På vilket sätt påverkar den teoretiska ansatsen resultaten?

Det praktiknära forskningsfältet innehåller, såsom andra forskningsfält, en rik flora av teoribildning utifrån vilken studier tar sin utgångspunkt. Min bild är att det teoretiska valet sällan motiveras särskilt utförligt, och än mer sällan diskuteras vilka alternativa teoretiska utgångspunkter som hade varit möjliga och hur det i så fall hade kunnat påverka studiens resultat och slutsatser. Ett exempel på detta är Björklund med flera (2024), som utgår från en variationsteoretisk ”syn” på lärande, i stället för att argumentera för att en variationsteoretisk utgångspunkt är den mest lämpliga för studiens syfte, eller ännu hellre, som vid en jämförelse med andra teoretiska utgångspunkter har visat sig ha starkast förankring i hur barn och barn de facto utvecklas och lär sig. Med de enorma landvinningar som görs inom forskning om barns utveckling och lärande inom många discipliner så förefaller det mig som att omsättningshastigheten av teoretiska utgångspunkter inom det praktiknära forskningsfältet är påfallande låg. Det vill säga, teoretiska utgångspunkter, med stark förankring i modern forskning om hur barn utvecklas och lär, borde i högre grad konkurrera ut sådana med svagare förankring.

Disciplinär mångsidighet – utbildningsvetenskapliga forskningens tillgång och dilemma

Den praktiknära forskningen är en del av den utbildningsvetenskapliga forskningen, som inte bara inkluderar forskning inom många olika teoritraditioner (jämför diskussionen ovan) utan även discipliner. Utöver forskare inom pedagogik, didaktik, ämnesdidaktik, pedagogiskt arbete och andra närliggande hemvister, som jag lämnar till någon annan att reda ut rågångarna emellan, så bidrar även forskning inom till exempel psykologi och kognitionsvetenskap till kunskapsutvecklingen inom fältet. Det kan å ena sidan innebära en stor tillgång, där många perspektiv och forskningstraditioner kan befrukta och brytas mot varandra. Men det är å andra sidan väldigt svårt för både forskare och förskollärare att få en överblick av forskningens samlade resultat och få något grepp om ”forskningsfronten” för en viss företeelse. En framskjuten forskare i fältet beskrev en gång situationen som att den utbildningsvetenskapliga forskningen visserligen är kumulativ, i meningen att forskning bygger på tidigare forskning, men inte på ett samlat sätt för en viss forskningsfråga utan som separata öar representerande ett visst perspektiv, en viss teoretisk utgångspunkt, en viss forskningsdesign eller en viss disciplin. I den bästa av världar flyter dessa öar samman till tvärövergripande forskningsmiljöer- och samarbeten, och även om sådana exempel finns, får nog den övergripande bilden sägas vara att öarna utvecklas i stor utsträckning var och en för sig med ganska litet utbyte av varandra, ibland omedvetna om närliggande öars existens och ibland medvetna, men skeptiska till, de andra öarnas möjlighet att bidra till kunskapsutvecklingen.

Utifrån ett undervisningsutvecklande perspektiv tror jag att detta är problematiskt, då resultaten från en studie typiskt sett kan sägas spegla kunskapsbidraget från en viss ”ö”, samtidigt som andra öar kan ha forskningsresultat att erbjuda som erbjuder andra väsentliga perspektiv eller till och med går helt på tvärs med det förstnämnda kunskapsbidraget. Till viss del erbjuder Skolforskningsinstitutets systematiska forskningssammanställningar en ”lösning” på detta dilemma men jag tror att problemet går djupare än så. Det är en sak att, i dessa sammanställningar, inkludera studier från olika teoretiska perspektiv, forskningsmiljöer och ibland forskningsdiscipliner. Det är något helt annat att, i en och samma studie, inkorporera forskningskompetens från vitt skilda fält.

Jag inser att det är lättare sagt än gjort att plädera för mer tvärvetenskapliga studier och samarbeten och har till exempel förstått att det kan vara svårt att publicera sig vetenskapligt, då många vetenskapliga tidskrifter är nischade till vissa forskningstraditioner. Men ambitionen bör leva vidare, inte i första hand för forskningens egen skull utan för att forskningsresultaten i möjligaste mån ska bidra till barns utveckling och lärande, som väl får sägas vara ett av den praktiknära forskningens grundsyften. Jag vill även tro att mer forskning av den typen kan bidra till en sakligare och bättre skolpolitisk debatt om mer övergripande frågor som ändå har tydlig bäring på undervisning - såsom digitalisering, ansvarsfördelning för kunskapsutveckling mellan förskollärare och barn och styrdokumentens utformning - där det i forskning inte sällan går att hitta stöd för vitt skilda ståndpunkter, bara man väljer rätt ”ö”.

Tack

Tack till Camilla Björklund och Johan Samuelsson för värdefulla synpunkter på en tidigare version av denna kommentar.

Referenser

Björklund, C., Elofsson, J., Kullberg, A., Ekdahl, A.-L., Runesson Kempe, U. & Alkhede, M. (2024). Förskoleklassbarns användning av talstrukturer. *Forskning om undervisning och lärande*, *12*(2). https://doi.org/10.61998/forskul.v12i2.23890

van Bommel, J., Palmér, H. & Ebbelind, A. (2024). Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering. *Forskning om undervisning och lärande*, *12*(2). https://publicera.kb.se/forskul/article/view/23893

Ekdahl, A.-L. & Lundberg, B. (2024). Att utveckla undervisning om tal och talrelationer i förskoleklass. *Forskning om undervisning och lärande*, *12*(2). https://doi.org/10.61998/forskul.v12i2.23896

Hedefalk, M., Sumpter, L. & Eriksson, H. (2024). Matematiska och etiska resonemang i förskolan - didaktisk modellering som intervention. *Forskning om undervisning och lärande*, *12*(2). https://doi.org/10.61998/forskul.v12i2.23608

Walla, M. & Palmér, H. (2024). Utveckling av matematikundervisning som främjar likvärdighet i förskoleklass. *Forskning om undervisning och lärande*, *12*(2). https://doi.org/10.61998/forskul.v12i2.23887.

Författarpresentation

Camilo von Greiff
Camilo von Greiff var myndighetschef för Skolforskningsinstitutet 2018–2023.